Факультет електроніки та інформаційних технологій
Кафедра електроніки, загальної та прикладної фізики

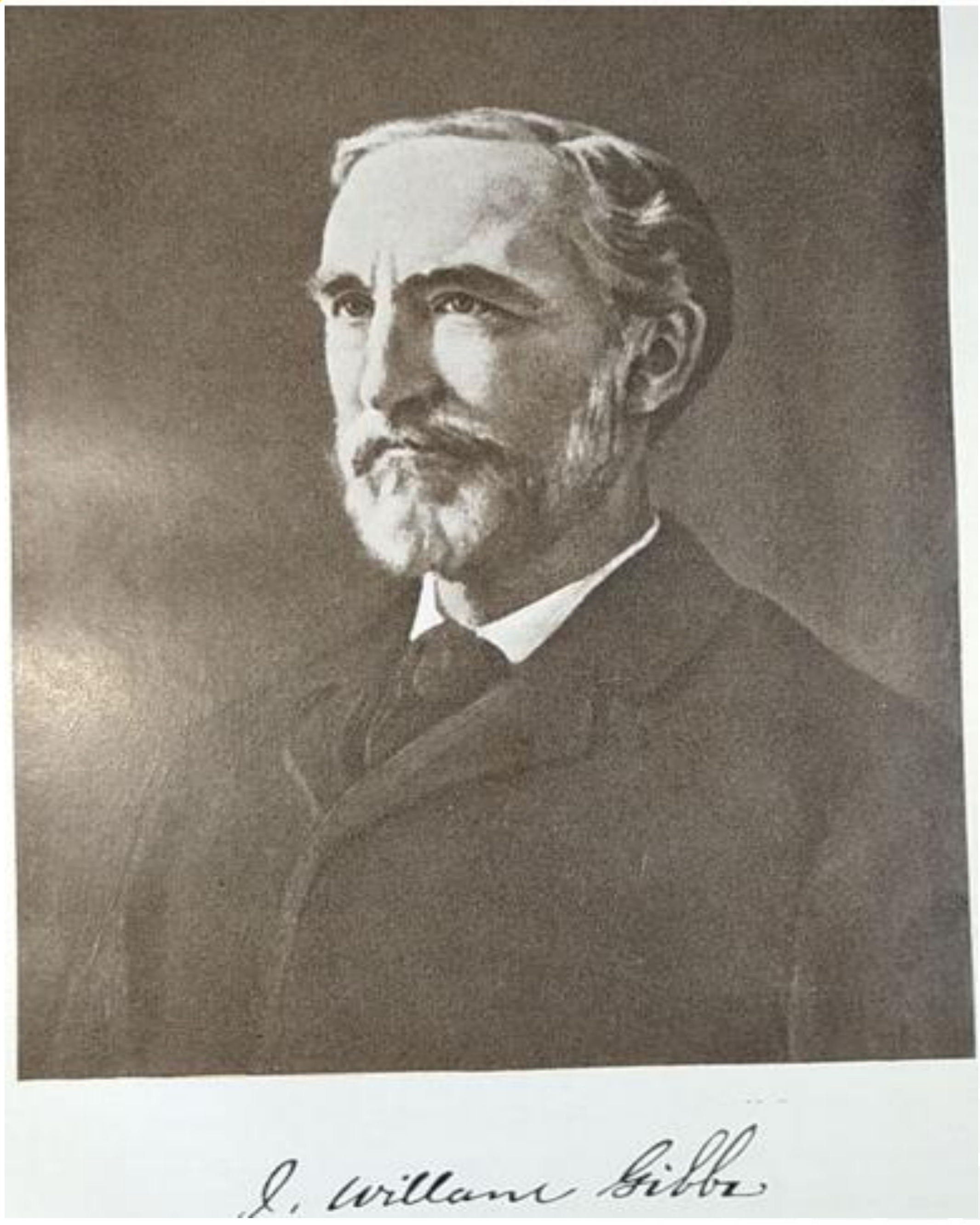
Частина 2. Статистична фізика

Викладач – д.ф.-м.н., професор Проценко Іван Юхимович

Суми 2023

Зміст частини 2. Статистична фізика

1. **Основні поняття статистичної фізики**
   1.Фазовий простір.
   2.Теорема Ліувілля про збереження фазового об'єму.
   3.Ергодична гіпотеза.
2. **Статистичні розподіли.**
   1.Канонічний розподіл Гіббса.
   2. Розподіл Максвелла.
   3.Розподіл Больцмана для газу в зовнішньому полі.
   4.Основи квантової статистики. Розподіл Бозе-Ейнштейна і Фермі –Дірака.
   5. Теплоємність газів.
   6. Теорії теплоємності кристалів: Теорія Дюлонга і Пті. Моделі Ейнштейна і Дебая.


J. Willard Gibbs

Основні поняття статистичної фізики

Фазовий простір

1. P, V, T, c, …   M = const

$v_{x_1}, 0,0, v_{x_2}, 0,0, p_{x_1}, 0, 0, p_{x_2}, 0, 0$ і т. д.

$v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1}, v_{x_2}, v_{y_2}, v_{z_2}, \ldots p_{x_1}, p_{y_1}, p_{z_1} \ldots$

2. Канонічні змінні

2N, N = n·i   i =3 (x, y, z)   i =5 (x, y, z, α, β)

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$x_1 = f(y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) \quad (i = 5)$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_N$

$p_1, p_2, p_3 \ldots p_N$ $P = \frac{\partial E_к}{\partial q}$ $P = mv_x, mv_y$

3. Рівняння Гамільтона

$H = E_k + E_n$

$$E_k = E_k(p_1, p_2, \dots, q_1, q_2 \dots)$$

$$E_n = E_n(q_1, q_2 \dots) \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q}; \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial q}$$

4. Фазовий простір

x, y, z, p_x, p_y, p_z

$H = H\,(_{x_1, x_2, x_3 \dots}\, p_1, p_2) = const$

$$d\Gamma = d\, q_1, q_2 \dots q_n, d_{p_1,} d_{p_2} \dots d_{p_n}$$

$$d\Gamma = d\Gamma_q \cdot d\Gamma_p$$

$\Gamma = \int_{(q,p)} d\Gamma = \int_{(xyz)} dV \int_{(p)} d\Gamma_p = V \cdot \int_{(p)} d\Gamma_p$

$d\Gamma_p = 4\pi p^2 dp$ $\varepsilon_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$ $p^2 = 2m\,\varepsilon$, $p = (2m\,\varepsilon)^{1/2}$

$dp = 1/2(2m)^{1/2}\,\varepsilon^{-1/2}\,d\varepsilon$

$d\Gamma_p = 1/2 \cdot 4\pi(2m)^{1/2} \cdot 2m\,\varepsilon \cdot \varepsilon^{-1/2}\,d\varepsilon$

$\Gamma_p = 4\pi(m)^{3/2} \cdot \sqrt{2} \int_0^{\varepsilon_{max}} \varepsilon^{1/2}\,d\varepsilon$.

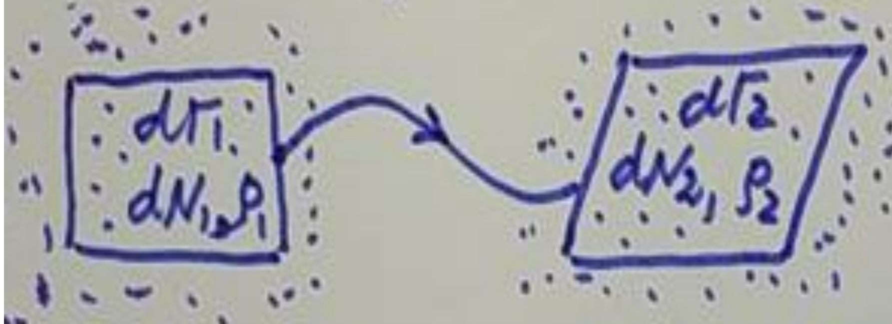
після інтегрування вів 0 до ε_{max} отримуємо

$\Gamma_p = 4/3\pi(2m)^{3/2} \cdot \varepsilon_{max}^{3/2}$ Весь об’єм: $\Gamma = 4/3\pi(2m)^{3/2} \cdot V \cdot \varepsilon_{max}^{3/2}$

Статистичний ансамбль

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow \text{р.с.}$

Ергодичність ансамблю



– до теореми Ліувілля

$$dN_1 = \rho_1 d\Gamma_1 \qquad dN_2 = \rho_2 d\Gamma_2$$

$$dN_1 = dN_2$$

$$\rho_1 d\Gamma_1 = \rho_2 d\Gamma_2, \quad \rho = const \Rightarrow d\Gamma_1 = d\Gamma_2$$

або

$$\boxed{\Delta\Gamma_1 = \Delta\Gamma_2}$$

Канонічний розподіл Гіббса

$$dn = \rho\, d\Gamma$$

$$\frac{dn}{n} = dw = \frac{\rho}{n} d\Gamma = \chi\, d\Gamma$$

$E_{вз} \ll E_1 і E_2$ $\quad dw_1 = \chi_1(E_1)\,d\Gamma_1 ; \; dw_2 = \chi_2(E_2)\,d\Gamma_2$

$$dw = \chi(E_1+E_2)\,d\Gamma = dw_1 \cdot dw_2$$

$$\chi(E_1+E_2) = \chi(E_1)\cdot\chi_2(E_2) \Rightarrow \ln\chi(E_1+E_2) = \ln\chi_1(E_1) + \ln\chi_2(E_2)$$

$$\frac{\chi'(E_1)dE_1}{\boxed{\chi(E_1+E_2)}} = \frac{\chi_1'(E_1)dE_1}{\chi_1(E_1)} ; \quad \frac{\chi'(E_2)dE_2}{\boxed{\chi(E_1+E_2)}} = \frac{\chi'(E_2)\,dE_2}{\chi(E_2)}$$

$=$

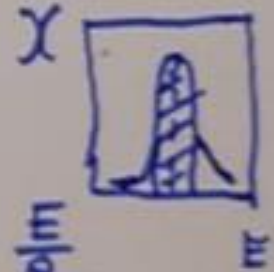
$$\frac{\chi_1'(E_1)}{\chi_1(E_1)}dE_1 = \frac{\chi_2'(E_2)}{\chi_2(E_2)}dE_2 = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\chi_1 = aE_1 + A_1; \quad \chi_1(E_1) = A_1' e^{aE_1}$$

$$A_1' = \ln A_1$$

$$\chi_2(E_2) = A_2' e^{aE_2} \Rightarrow dw = A e^{aE}\cdot d\Gamma$$

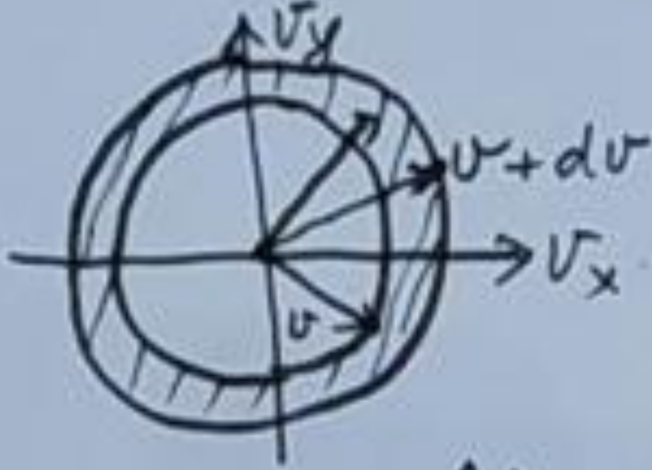
$$A = \frac{1}{\int\limits_{(q,p)} e^{aE} d\Gamma}, \quad a = -\frac{1}{\theta},$$



$$dw = \frac{e^{-E/\theta}\, d\Gamma}{\int\limits_{(q,p)} e^{-E/\theta} d\Gamma}, \quad Z(q,p) = \int\limits_{(q,p)} e^{-\frac{E}{\theta}} d\Gamma$$

2.2. Розподіл Максвелла

Розподіл Максвелла для газових атомів (молекул)



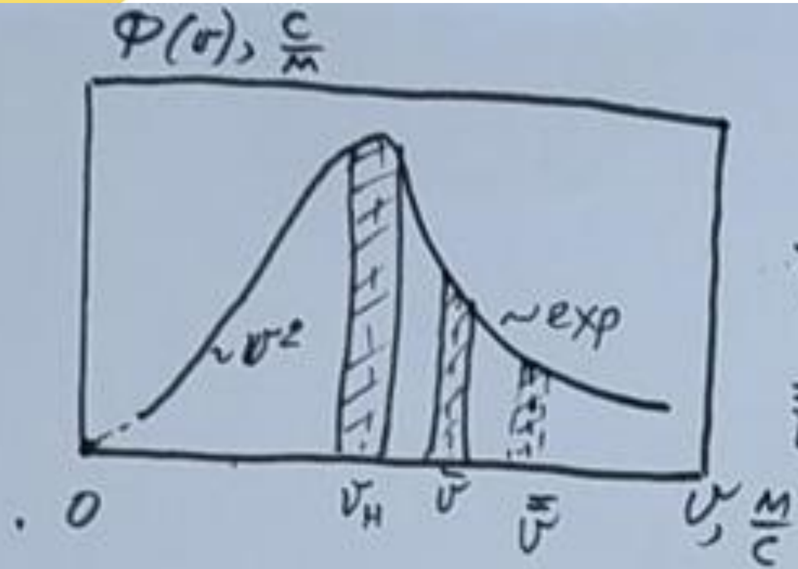
$$dn_v \sim n\cdot\Delta V\cdot f(v)$$

$$\Delta V = 4\pi v^2 dv,$$

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

$$\Delta n_v = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \Delta v$$

$$\Delta\omega_v = \frac{\Delta n_v}{n}; \quad \Phi(v) = \frac{\Delta n_v}{n\Delta v}$$

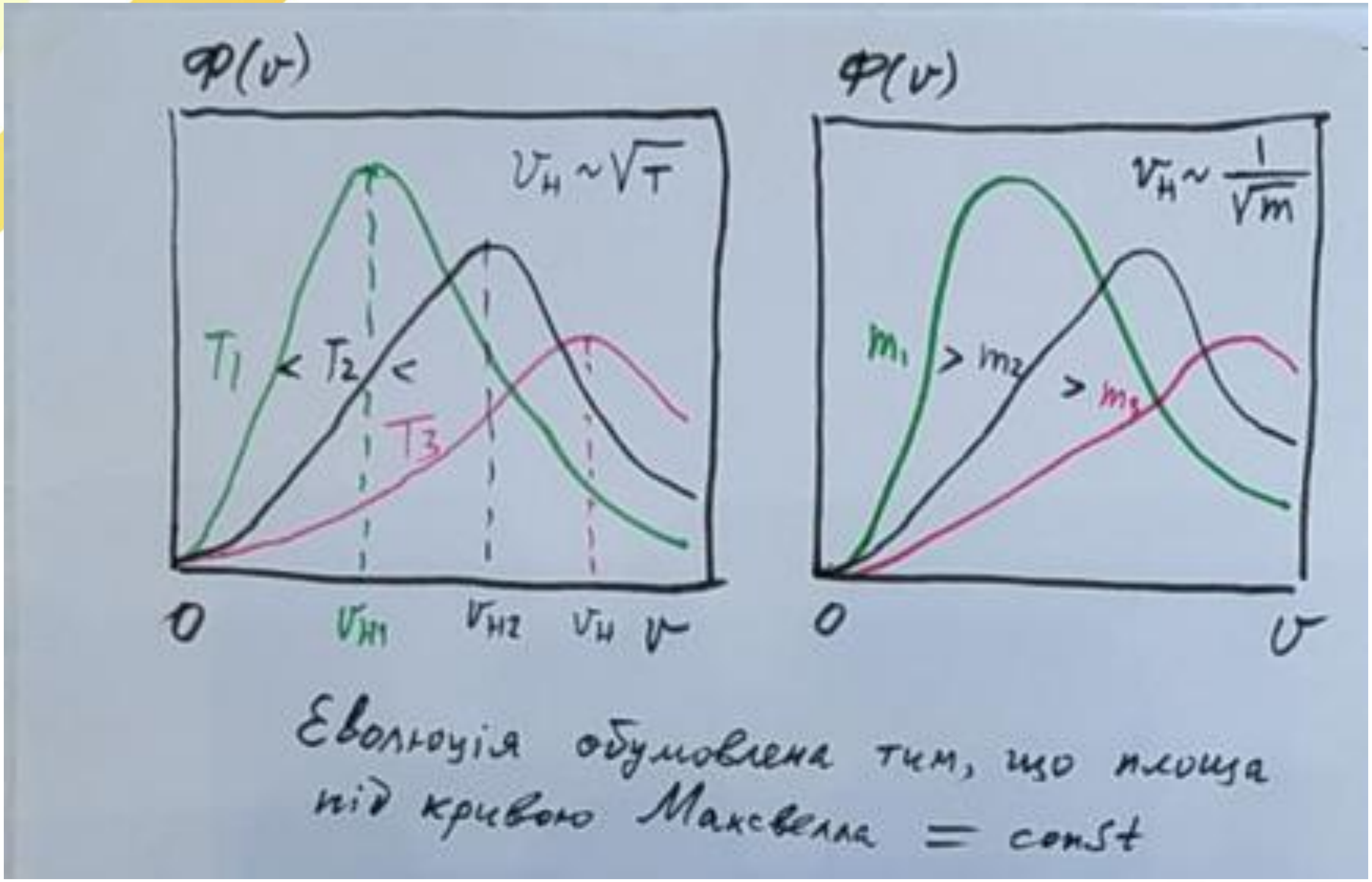


$$v_н = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}},$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}},$$

$$\bar{\bar{v}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

$v_н$, м/с	$\bar{v}$, м/с	$\bar{\bar{v}}$, м/с	Газ
1487	1694	1838	Водень (H_2)
398	453	492	Азот (N_2)


Φ(v)
v_H ~ √T
T1 < T2 < T3
0
v_H1
v_H2
v_H
v
Φ(v)
v_H ~ 1/√m
m1 > m2 > m3
0
v
Еволюція обумовлена тим, що площа під кривою Максвелла = const

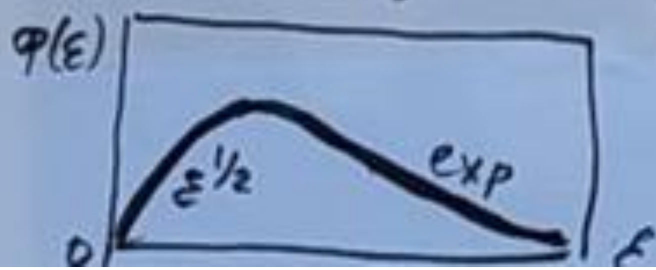
$\Phi(\varepsilon) - ?$ $\quad dn_v = dn_\varepsilon \quad \begin{matrix} v,\ v+dv \\ \varepsilon,\ \varepsilon+d\varepsilon \end{matrix} \quad \varepsilon = \dfrac{mv^2}{2}$

$$d\varepsilon = mv\,dv \Rightarrow dv = \frac{d\varepsilon}{mv}$$

$$dn_\varepsilon = dn_v = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv \, \frac{m}{2} \cdot \frac{2}{m}$$

$$dn_\varepsilon = 2\pi n \left(\frac{1}{\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \cdot \varepsilon^{1/2} d\varepsilon$$

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{dn_\varepsilon}{n\,d\varepsilon} = 2\pi \left(\frac{1}{\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \varepsilon^{1/2}$$



$$\boxed{\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} kT}$$

2.3. Розподіл Больцмана

Розподіл Больцмана для атомів газу

К. р. Гіббса у цьому випадку: $dw_z = \dfrac{e^{-\frac{mgz}{kT}}dz}{\frac{kT}{mg}} = \left(\dfrac{mg}{kT}\right)e^{-\frac{mgz}{kT}}dz$, $dw_z \sim dz = \dfrac{dn_z}{n}$.

$$dn_z = n\left(\frac{mg}{kT}\right)e^{-\frac{mgz}{kT}}dz = Ce^{-\frac{mgz}{kT}}\underbrace{dz\cdot 1\,m^2}_{dV}$$

$$\frac{dn_z}{dV} = n = \text{const}\; e^{-\frac{mgz}{kT}} : \quad z=0,\ n=n_0$$

$$n = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

Основи квантової статистики

1. Квантовий розподіл Гіббса

$$N = N_1 + N_2$$

$$E = E_1 + E_2$$

$$dw = A e^{-E_1/\theta} d\Gamma_1 \cdot e^{-E_2/\theta} d\Gamma_2$$

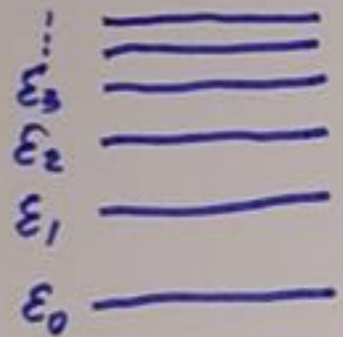
$$dw_{1,2} = A e^{-E_1/\theta} \cdot d\Gamma_1 \cdot \int_{(\Gamma_2)} e^{-E_2/\theta} d\Gamma_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{ф.т. п/с 1 в } d\Gamma_1\text{, а} \\ \text{ф.т. п/с 2 в } \Gamma_2 \end{array} \right.$$

$$Z_2 = \int_{(\Gamma_2)} e^{-\frac{E_2}{\theta}} d\Gamma_2 .$$

$$dw_{1,2} = B e^{\frac{\mu N_1 - E_1}{\theta}} d\Gamma_1, \quad \boxed{dw = B e^{\frac{\mu N - E}{\theta}} d\Gamma}$$

$$B = \frac{1}{\int\limits_{(q,p)} e^{\frac{\mu N - E}{\theta}} d\Gamma}, \quad \bar{M} = \frac{\int M e^{\frac{\mu N - E}{\theta}} d\Gamma}{\int\limits_{(q,p)} e^{\frac{\mu N - E}{\theta}} d\Gamma}$$

2. Розподіл Фермі–Дірака



$$\bar{n}_i = \frac{\sum\limits_{(n)} n_i e^{\frac{n_i(\mu - \varepsilon_i)}{\theta}}}{\sum\limits_{(n)} e^{\frac{n_i(\mu - \varepsilon_i)}{\theta}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{n}_i = \theta \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_{(n)} e^{\frac{n_i(\mu - \varepsilon_i)}{\theta}} \, !$$

$n = 0, 1$ — ферміони, $s = 1/2, 3/2, \ldots$

$$\bar{n}_i = \theta \frac{\partial}{\partial \mu} \ln\left(1 + e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta}}\right) = \theta \frac{e^{\frac{\mu-\varepsilon_i}{\theta}} \frac{1}{\theta}}{1 + e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta}}} =$$

$$= \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{\theta}} + 1}. \qquad \boxed{\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{\theta}} + 1}} \quad \text{Ф-Д}$$

3. Розподіл Бозе-Ейнштейна

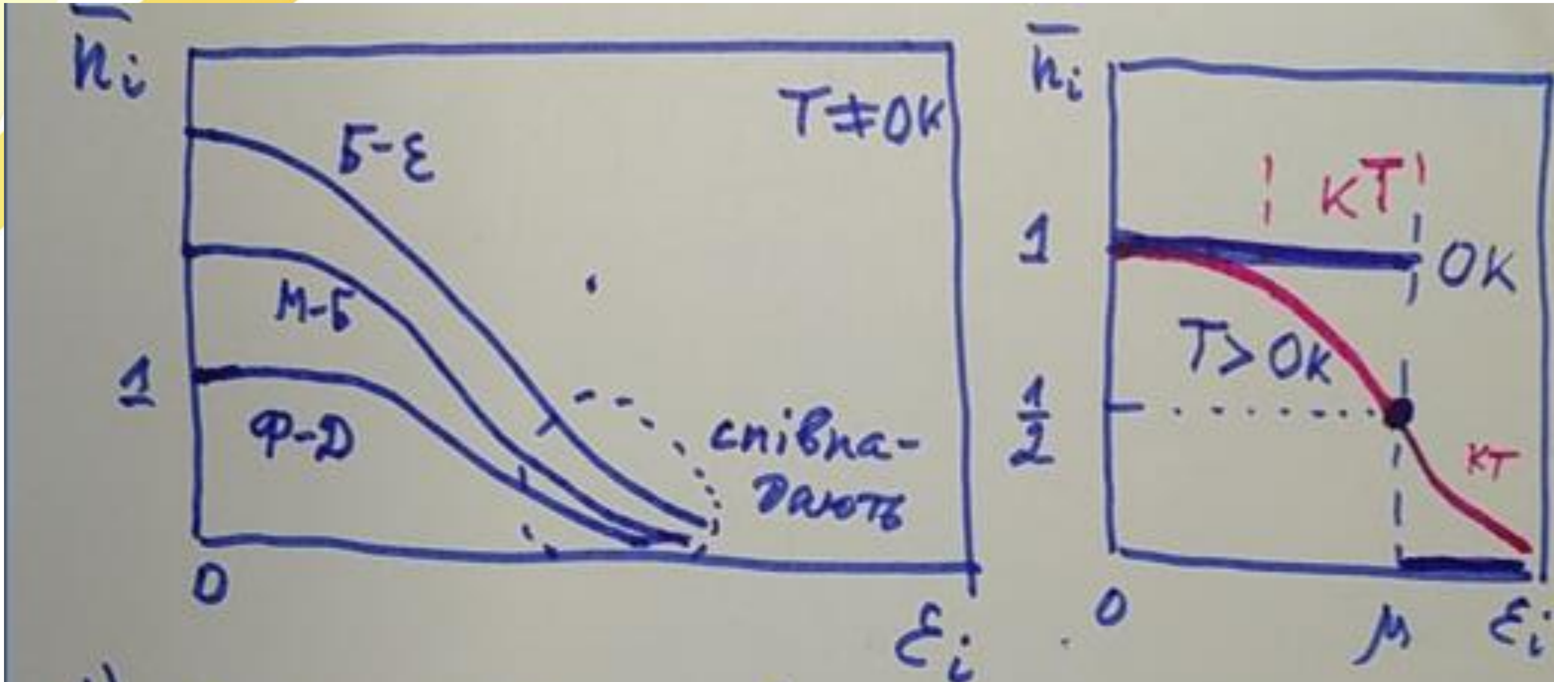
$$\bar{n}_i = \theta \frac{\partial}{\partial \mu} \ln\left(1 + e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta}} + e^{\frac{2(\mu - \varepsilon_i)}{\theta}} + \dots\right) =$$

$$\Sigma = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1 - e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta}}}$$

$$= \theta \frac{\partial}{\partial \mu} \ln\left(1 + x + x^2 + \dots\right) = \theta \frac{\partial}{\partial \mu} \ln\left(\frac{1}{1 - e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta}}}\right)$$

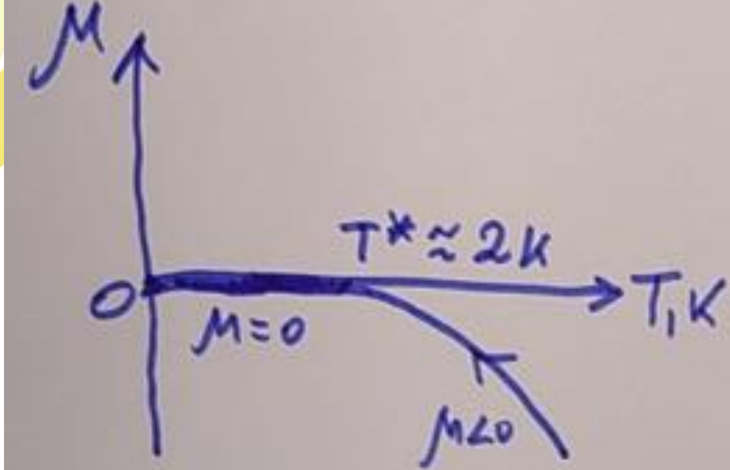
$$= \frac{1}{1 + e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta}}}; \qquad \boxed{\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{\theta}} - 1}} \quad \text{– Б-Е}$$

$$n = 0 \dots \infty, \; S = 0$$



$$a')\ \varepsilon_i < \mu,\ \bar{n}_i = \frac{1}{e^{-\infty}+1} = 1;\quad б')\ \varepsilon_i > \mu,\ n_i = 0$$

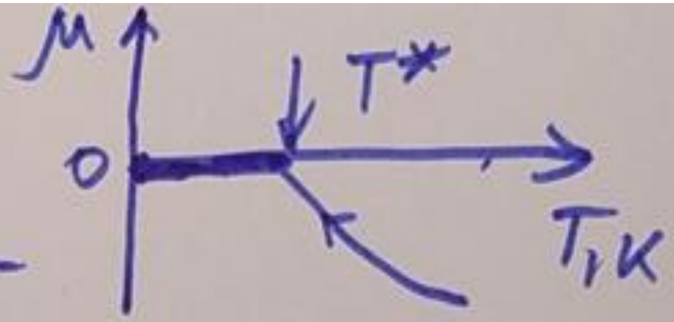
$$в')\ \varepsilon_i = \mu,\ \bar{n}_i = \frac{1}{e^{0/0}+1} = \frac{1}{2}$$



а) $T > T^*$, $\bar{n}_i \approx \dfrac{1}{e^{\approx\infty}}$

б) $T < T^*$, $\mu = 0$, $\bar{n}_i = \dfrac{1}{e^{\varepsilon_i/\theta}-1} \to \infty$, якщо $\varepsilon_i \to 0$

T* – тем-ра бозе-конден-сації



4. Розподіл Максвела – Больцмана

$$e^{\varepsilon_i - \mu/\theta} \gg 1 \Rightarrow \boxed{\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{\theta}}}} \quad \text{М-Б}$$

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\varepsilon_i - \mu/\theta} + q}, \quad q = \begin{cases} +1, & \text{Ф-Д} \\ -1, & \text{Б-Е} \\ 0, & \text{М-Б} \end{cases}$$

Теплоємність газів

1. $\varepsilon_q = \frac{p_q^2}{2m} = b p_q^2$; $\varepsilon_\varphi = \frac{p_\varphi^2}{2I}$, $I = mr^2$

$$dw = \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}} d\Gamma}{\int\limits_{(\Gamma)} e^{-\varepsilon/\theta} d\Gamma}; \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\int\limits_{(\Gamma)} \varepsilon e^{-\varepsilon/\theta} d\Gamma}{\int\limits_{(\Gamma)} e^{-\varepsilon/\theta} d\Gamma},$$

$\Theta = kT$.

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_i + \bar{\varepsilon}' = \frac{\int\limits_{(\Gamma)} (\bar{\varepsilon}_i + \bar{\varepsilon}') e^{-\frac{(\varepsilon_i + \varepsilon')}{\Theta}} dp_i \, d\Gamma_p' \, d\Gamma_q}{\int\limits_{(\Gamma)} e^{-\frac{(\varepsilon_i + \varepsilon')}{\Theta}} dp_i \, d\Gamma_p' \, d\Gamma_q}$$

$$= \ldots = \frac{\int \varepsilon_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{\Theta}} dp_i}{\int e^{-\varepsilon_i/\theta} dp_i} = \ldots = \frac{1}{2}\Theta = \boxed{\frac{1}{2} kT}$$

2. $$\frac{p^2}{2m\varepsilon} + \frac{q^2}{2\varepsilon} = 1$$ – фазова траєкторія осцилятора

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_{(\Gamma)} \varepsilon e^{-\varepsilon/\theta} d\Gamma}{\int_{(\Gamma)} e^{-\varepsilon/\theta} d\Gamma} = \dots = kT = \boxed{\theta}$$

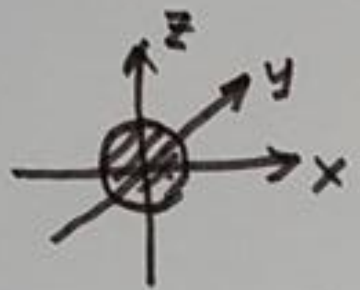
3. Одноатомний газ

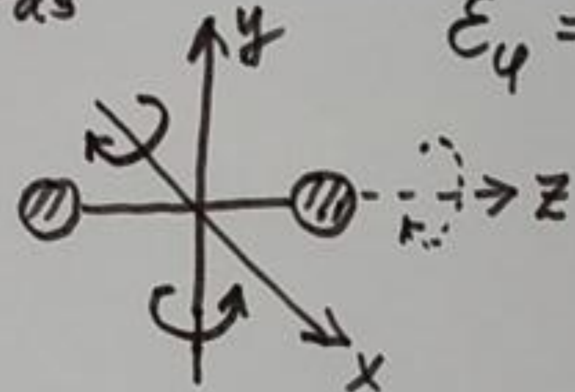
$$U = 3 \cdot \frac{1}{2} kT N_A + U_0 \Rightarrow \begin{cases} C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2} R \\ C_p = C_V + R = \frac{5}{2} R \end{cases} \quad \gamma = 1{,}667$$

Газ	$\gamma_{екс}$	$\gamma_{теор}$
Ar	1,667	1,667
He	1,630	
Ne	1,642	

4. Двоатомний газ

$$\bar{\varepsilon}_ч = \frac{1}{2}kT = \boxed{\frac{1}{2}\Theta}$$





$$I_z = mr^2 = 0$$

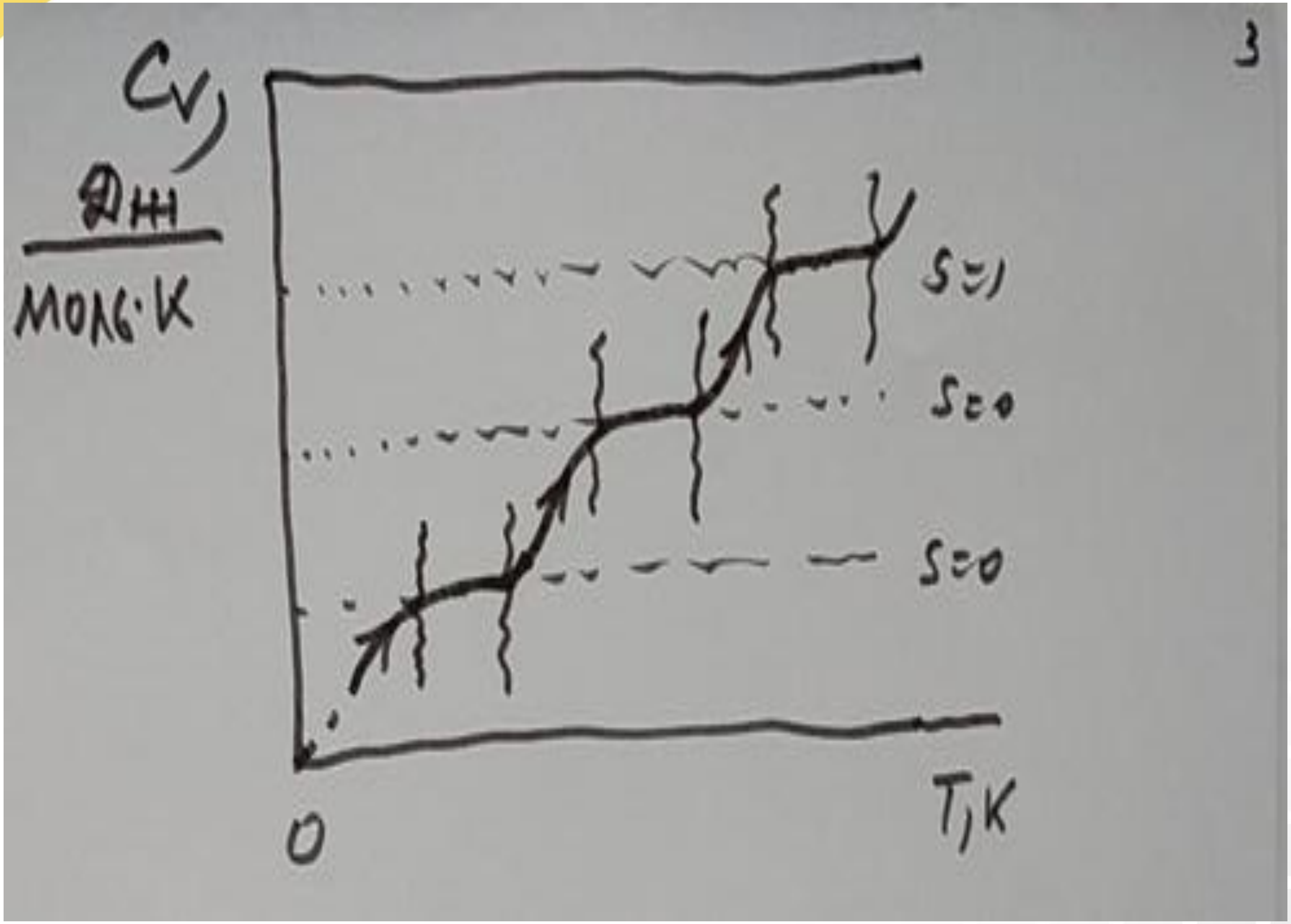
$$\varepsilon_z = 0$$

$$U = \frac{1}{2}kTN_A(i+r) + U_0 \Rightarrow \underbrace{c_V = \frac{5}{2}R,\ c_p = \frac{7}{2}R}_{\gamma = 1{,}40}$$

$$U = \frac{1}{2}kTN_A(i+r+2s) + U_0 \Rightarrow c_V = \frac{7}{2}R\ (s=1)$$

$$c_p = \frac{9}{2}R,\ \gamma = 1{,}29$$

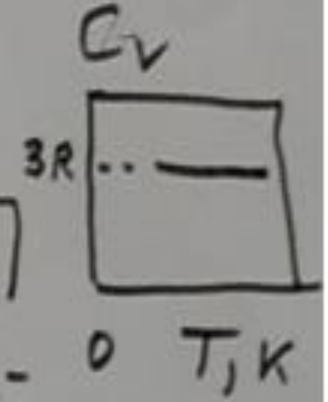
$$\gamma_{експ} = 1{,}41\ (N_2);\ 1{,}40\ (O_2);\ 1{,}41\ (H_2)$$


3
Cv,
моль·К
S=1
S=0
S=0
0
T, K

Теплоємність кристалів

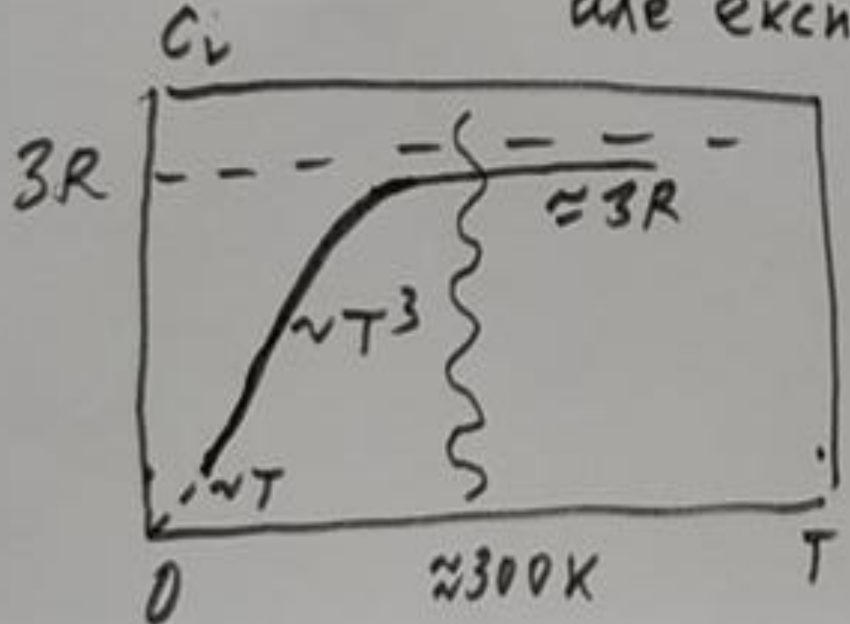
Теплоємність кристалів

1. Класична теорія Дюлонга і Пті



$$U = 3kTN_A + U_0 \Rightarrow C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v = \boxed{3R}$$

але експеримент давав інший результат



4. Квантова теорія Ейнштейна

$$\varepsilon = n\hbar\omega = nh\nu \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{(\varepsilon)} \varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}}}{\sum_{(\varepsilon)} e^{-\varepsilon/\theta}} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} nh\nu\, e^{-\frac{nh\nu}{\theta}}}{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{nh\nu}{\theta}}} \Rightarrow$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

При $\frac{h\nu}{kT} \ll 1$ $\quad e^{\frac{h\nu}{\theta}} \simeq 1 + \frac{h\nu}{\theta} + \dots - 1 \Rightarrow \bar{\varepsilon} = \boxed{kT}$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$U = 3N_A \frac{h\nu_0}{e^{\frac{h\nu_0}{kT}} - 1} + U_0, \qquad h\nu_0 = \hbar\omega_0,$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{3N_A \frac{\hbar\omega_0}{k} \cdot \frac{k}{T^2} e^{\frac{\hbar\omega_0}{kT}}}{\left(e^{\frac{\hbar\omega_0}{kT}} - 1\right)^2} = 3R \frac{\left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 \cdot e^{\frac{\theta_E}{T}}}{\left(e^{\theta_E/T} - 1\right)}.$$

$$\Theta_E = \frac{\hbar\omega_0}{K} \text{ – тем-ра Ейнштейна}$$

а) $\frac{\Theta_E}{T} \ll 1$ (в.т.): $C_V \simeq 3R\left(1+\frac{\Theta_E}{T}+\dots\right)\cdot\left(1+\frac{\Theta_E}{T}+\dots-1\right) = 3R,$

$$e^{\Theta_E/T} \simeq 1+\frac{\Theta_E}{T}+\dots$$

б) $\frac{\Theta_E}{T} \gg 1$ (н.т.): $C_V = 3R\left(\frac{\Theta_E}{T}\right)^2 \cdot e^{\frac{\Theta_E}{T}} \sim \frac{1}{T^2}\, e^{\frac{\Theta_E}{T}}$

3. Квантова теорія Дебая

$$dU = \bar{\varepsilon}\, dz = \frac{3V\hbar}{2\pi^2\bar{v}^3}\,\frac{\omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}$$

$$U = \frac{3V\hbar}{2\pi^2\bar{v}^3}\int_0^{\omega_{max}}\frac{\omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1} = \frac{3N_A\hbar}{\omega_{max}^3}\int_0^{\omega_{max}}\frac{\omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}.$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{3R}{\Theta_D^3}\frac{\partial}{\partial T}\left(T^4\int_0^{\Theta_D/T}\frac{x^3dx}{e^x-1}\right) =$$

$$= 3R\left[12\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3\cdot\int_0^{\Theta_D/T}\frac{x^3dx}{e^x-1} - \frac{3\,\Theta_D/T}{e^{\Theta_D/T}-1}\right].$$

а) $\frac{\Theta_D}{T} \ll 1$ (в.т.): $U = \frac{9RT^4}{\Theta_D^3}\int_0^{\Theta_D/T}\frac{x^3dx}{e^x-1} = 3RT$

$C_V = 3R.$

б) $\frac{\Theta_D}{T} \gg 1$ (н.т.): $U = \frac{9RT^4\Theta}{\Theta_D^3}\int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{e^x-1} = \frac{9R}{\Theta_D^3}\cdot\frac{\pi^4}{15}\cdot T^4$

$$C_V = \frac{12\pi^4 R}{5\Theta_D^3}T^3 = \alpha T^3$$

$$\Delta U_e = \Delta n \cdot kT = \frac{k^2 n T}{2\mu}; \quad C_V = \frac{\partial}{\partial T}(\Delta U_e) = \frac{k^2 n}{\mu} T \sim T$$

$$\frac{C_{ev}}{C_{v\,кл}} = \frac{k^2 N_A T}{\frac{3}{2} R \mu} \simeq 0{,}01$$

Дякую за увагу!

Тема: Фазовий простір, теорема Ліувілля

Задача 11. Записати співвідношення для фазової траєкторії частинки масою m, яка рухається по інерції із швидкістю v_0.

Відповідь P = mv_0.

Задача 12. Провірити справедливість теореми Ліувілля на одновимірного руху матеріальних точок із прискоренням.

Відповідь: P^2- P_0^2 = $2m^2$q (q - q_0); $\Delta\Gamma_0 = \Delta P_0\ \Delta q_0$; $\Delta\Gamma_1 = \Delta P_0\ \Delta q_0$; $\Delta\Gamma_0 = \Delta\Gamma_1$.

Тема: Розподіл Максвелла

Задача 13. Проаналізувати еволюцію розподілу Максвелла при збільшенні температури газу від T_1 до $T_2 > T_1$.

$$d\omega = 4\pi n\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)e^{\frac{-mV^2}{2KT}} V^2 dV$$

$$V_н = \sqrt{\frac{2KT}{m}}, \quad \Phi(V) = \frac{dn}{ndV}.$$

Задача 14. Проаналізувати еволюцію розподілу Максвелла при збільшенні маси частинки від m_1 до $m_2 > m_1$.

Задача 15. Оцініть значення найімовірнішої, середньої та середньоквадратичної швидкостей поступального руху молекул водню та кисню при кімнатній температурі

Розв'язання. Для оцінок перепишемо формули (1.47)–(1.49) у вигляді

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}, \qquad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}, \qquad v_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}},$$

де $\mu = N_{\mathrm{A}}m$ – молярна маса речовини, $R = N_{\mathrm{A}}k = 8,31$ Дж/(кг · К) – універсальна газова стала (N_{A} – стала Авогадро). Для молекулярних водню H_2 ($\mu \approx 2$ г/моль $= 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль) та кисню O_2 ($\mu \approx 32$ г/моль $= 3,2 \cdot 10^{-2}$ кг/моль) при кімнатній температурі ($T \approx 293$ К) маємо відповідно 1560, 1760, 1910 м/с та 390, 440, 480 м/с.

Семінар 2: Квантові статистики

1. Отримати розподіл Фермі-Дірака.
2. Отримати розподіл Бозе-Ейнштейна.
3. Графічне зображення розподілу Ф-Д при різних температурах.
4. Уявлення про бозе-конденсацію.

Додатки

Завдання 10*. Побудуйте та зобразіть графічно функцію розподілу для значень кінетичної енергії ε поступального руху молекули. За його допомогою знайдіть: а) найімовірніше значення ε; б) середнє значення ε; в) частку молекул від їх загальної кількості, кінетичні енергії яких менші за $\langle\varepsilon\rangle$.

Вказівка. У розподілі (1.50) перейдіть від модуля імпульсу до кінетичної енергії молекули за формулою $\varepsilon = p^2/2m$.

Відповіді:

$$dw(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(kT)^{3/2}}\, e^{-\varepsilon/kT}\sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon; \qquad \text{а) } \varepsilon_{\max} = \frac{1}{2}kT; \qquad \text{б) } \langle\varepsilon\rangle = \frac{3}{2}kT; \qquad \text{в) } 60,8\%.$$

Залежність густини ймовірності $dw(\varepsilon)/d\varepsilon$ від ε показано на рис. 10.1.

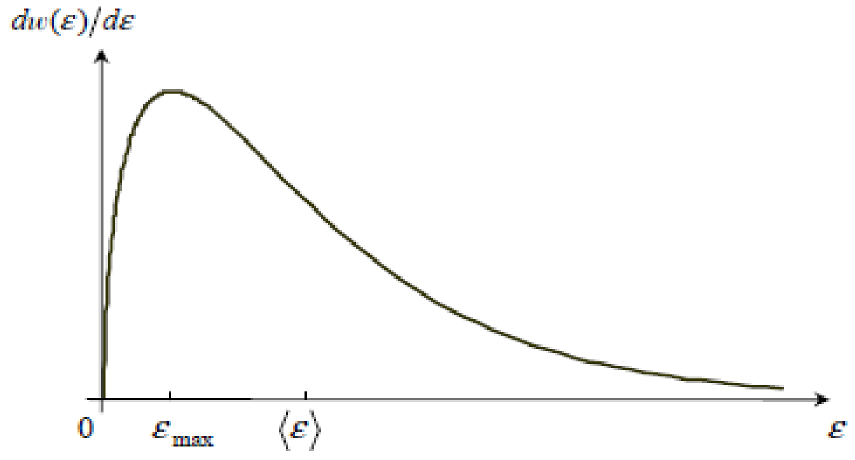


Рис. 10.1. Густина розподілу за значеннями кінетичної енергії поступального руху молекули.

Завдання 102. Для виродженого електронного газу знайдіть: а) хімічний потенціал; б) внутрішню енергію; в) теплоємність; г) ізотермічну стисливість.

в) Згідно із (7.65), теплоємність виродженого електронного газу

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{V,N} \simeq \frac{\pi^2}{2} Nk \left(\frac{kT}{\mu_0}\right). \tag{7.66}$$

Цією формулою описується внесок електронної підсистеми в теплоємність металу. Оцінки показують, що при температурах $T \sim \Theta$ (Θ – температура Дебая) він складає за порядком величини приблизно 1% від внеску в теплоємність від кристалічної ґратки. При температурах $T \sim 0,01\,\Theta$ ці внески зрівнюються. При ще нижчих температурах внесок електронів у теплоємність металу стає домінуючим (див. рис. 102.1).

$$E \simeq \frac{3}{5} N\mu_0 \left[1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right].$$

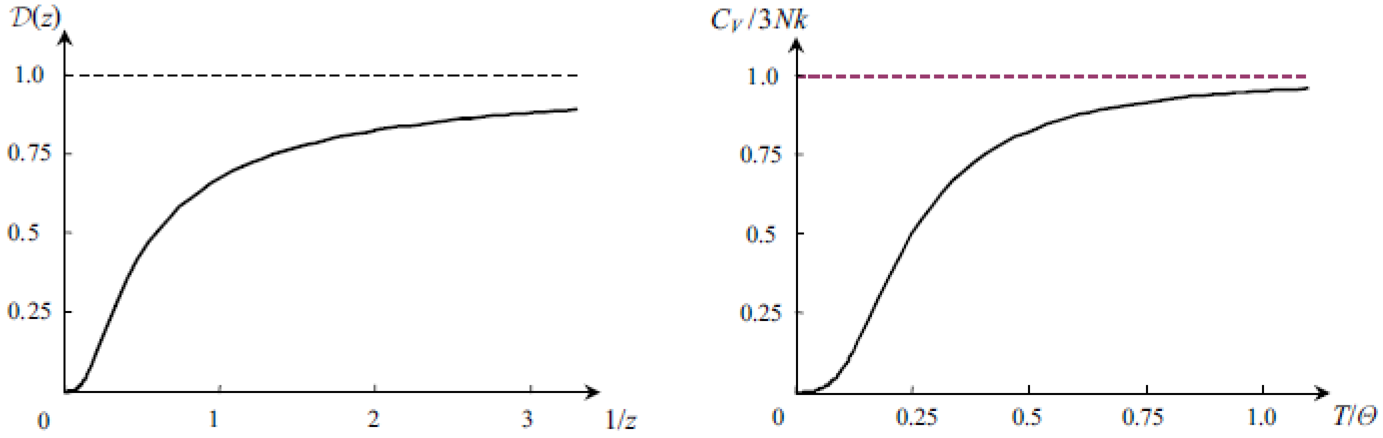


Рис. 110.1. Функція Дебая (зліва) та температурна залежність теплоємності тривимірного кристала в моделі Дебая (справа).

Припустимо, що $\overline{\varepsilon}(\omega)$ збігається із середньою енергією квантового осцилятора, що має таку саму частоту ω, тобто

$$\overline{\varepsilon}(\omega) = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}.$$

Тут перший доданок – внесок нульових коливань. Внутрішня енергія системи таких осциляторів з функцією розподілу частот $g_2(\omega)$ дається формулою

$$U = U_0 + \frac{4N\hbar}{\omega_{\rm D}^2} \int_0^{\omega_{\rm D}} \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1},$$

де $U_0 = (2/3)N\hbar\omega_{\rm D}$ – внесок нульових коливань, який від температури не залежить.

$$E \simeq \frac{3}{5} N \mu_0 \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu_0} \right)^2 \right].$$

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_{V,N} \simeq \frac{\pi^2}{2} N k \left(\frac{kT}{\mu_0} \right).$$

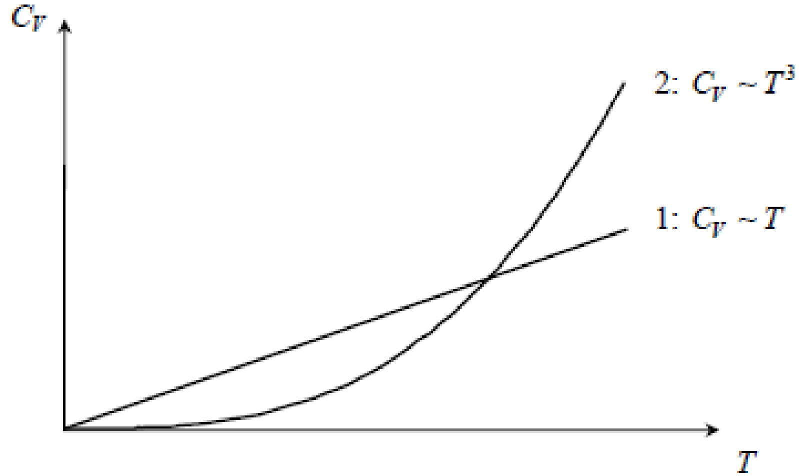


Рис. 102.1. Температурна поведінка електронної (крива 1) та ґраткової (крива 2) частин теплоємності металу.