11 ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ ТА РЕЧОВИНІ

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

Електричне поле у вакуумі

11.1 Закон Кулона

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2},$$

де F – сила взаємодії двох точкових зарядів q_1 та q_2; r - відстань між зарядами; ε - діелектрична проникність середовища; ε_0 - електрична стала

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}\,Ф/м = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,Ф/м.$$

11.2 Закон збереження заряду

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = const,$$

де $\sum_{i=1}^{n} q_i$ – алгебраїчна сума зарядів, що входять до ізольованої системи; n - кількість зарядів.

11.3 Напруженість електричного поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q},$$

де $\vec{F}$ – сила, що діє на точковий заряд q, який поміщений у дану точку поля.

Сила, що діє на точковий заряд q, розміщений в електричному полі, дорівнює

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

11.4 Принцип суперпозиції (накладання) електричних полів: напруженість $\vec{E}$ результуючого поля, створеного двома (і більше) точковими зарядами, дорівнює векторній (геометричній) сумі напруженостей полів, створених у даній точці окремими зарядами:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n.$$

У випадку двох електричних полів з напруженостями $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$ абсолютне значення вектора напруженості дорівнює

$$E = \sqrt{E_1^{\,2} + E_2^{\,2} + 2E_1E_2\cos\alpha},$$

де α – кут між векторами $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$.

11.5 Потік вектора напруженості $\vec{E}$ електричного поля:

а) через довільну поверхню S, яка поміщена в неоднорідне поле:

$$\Phi_E = \int_S E\cos\alpha\, dS, \text{ або } \Phi_E = \int_S E_n\, dS,$$

де α – кут між вектором напруженості $\vec{E}$ і нормаллю $\vec{n}$ до елемента поверхні; *dS* – площа елемента поверхні; E_n – проекція вектора напруженості на нормаль;

б) через плоску поверхню, яка поміщена в однорідне електричне поле:

$$\Phi_E = E \cdot S \cos\alpha .$$

Потік вектора напруженості $\vec{E}$ через замкнену поверхню *S*

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS ,$$

де інтегрування ведеться по всій поверхні.

11.6 Теорема Гауса в інтегральній формі. Потік вектора напруженості електричного поля $\vec{E}$ через будь-яку замкнену поверхню дорівнює алгебраїчній сумі зарядів, що обмежуються цією поверхнею, поділеній на ε_0:

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i ,$$

де $\sum_{i=1}^{n} q_i$ - алгебраїчна сума зарядів, що містяться всередині цієї замкненої поверхні; *n* – кількість зарядів.

Теорема Гауса у диференціальній формі

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho ,$$

де $\rho = \dfrac{dq}{dV}$ - об'ємна густина заряду у даній точці простору; q, V – відповідно заряд та об'єм цієї ділянки.

11.7 Напруженість електричного поля точкового заряду q на відстані *r* від заряду

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r^2}.$$

11.8 Напруженість електричного поля металевої сфери радіусом *R*, що має заряд q, на відстані *r* від центра сфери:

- всередині сфери ($r < R$) $E = 0$;
- на поверхні сфери ($r = R$) $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{\varepsilon R^2}$;
- поза сферою ($r > R$) $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{\varepsilon r^2}$.

11.9 Напруженість поля, створеного нескінченно довгою рівномірно зарядженою ниткою (або циліндром) на відстані *r* від її осі:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\tau}{\varepsilon r},$$

де τ – лінійна густина заряду.

У випадку циліндра радіусом R формула справедлива при $r \geq R$. При $r < R$ - $E = 0$.

Лінійна густина заряду

$$\tau = \frac{dq}{dl}.$$

11.10 Напруженість поля, яке створює нескінченна рівномірно заряджена площина:

$$E = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon},$$

де σ – поверхнева густина заряду.

Поверхнева густина заряду

$$\sigma = \frac{dq}{dS}.$$

11.11 Напруженість поля, що створюється двома паралельними нескінченними рівномірно і різнойменно зарядженими площинами з однаковою за абсолютним значенням поверхневою густиною σ заряду (поле плоского конденсатора):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

11.12 Циркуляція вектора напруженості електростатичного поля

$$\oint_L E_l dl = 0.$$

11.13 Потенціал електричного поля

$$\varphi = W_n / q,$$

або

$$\varphi = \frac{A}{q}.$$

11.14 Потенціал електричного поля точкового заряду q на відстані r від заряду

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}.$$

11.15 Потенціал електричного поля металевої сфери радіуса R**,** яка несе заряд q, на відстані r від центра сфери:

- в середині сфери $(r < R)$ $\qquad \varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$;

- на поверхні сфери $(r = R)$ $\qquad \varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$;

- поза сферою $(r > R)$ $\qquad \varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$.

11.16 Потенціал електричного поля, створеного системою *n* точкових зарядів, у даній точці за принципом суперпозиції електричних полів дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, створених окремими точковими зарядами $q_1, q_2, \ldots, q_n$:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i .$$

11.17 Енергія W **взаємодії системи точкових зарядів** $q_1, q_2, \ldots, q_n$

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i ,$$

де φ_i – потенціал поля, яке створюється усіма $n-1$ зарядами (за винятком i-го) у точці, де розміщений заряд q_i.

11.18 Зв'язок потенціалу з напруженістю електричного поля у загальному випадку

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi \quad -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right).$$

Для електричного поля із сферичною симетрією цей зв’язок має вигляд

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dr}\frac{\vec{r}}{r},$$

або, у скалярній формі,

$$E = \frac{d\varphi}{dr}.$$

У випадку однорідного поля

$$E = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{d},$$

де φ_1 і φ_2 – потенціали точок двох еквіпотенціальних поверхонь; d – відстань між цими поверхнями вздовж електричної силової лінії.

11.19 Робота електричного поля з переміщення точкового заряду q із точки поля з потенціалом φ_1 в точку з потенціалом φ_2

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2)\text{, або } A = q\int_L E_l dl\,,$$

де E_l – проекція вектора напруженості $\vec{E}$ на напрямок переміщення; dl – переміщення.

Для **однорідного поля** $\left(\vec{E} = const\right)$

$$A = qEl\cos\alpha\,,$$

де $\vec{l}$ – переміщення; α – кут між напрямами вектора $\vec{E}$ і переміщення $\vec{l}$.

Провідники в електричному полі

11.20 Електроємність ізольованого провідника або конденсатора

$$C = \frac{dq}{d\varphi},$$

де dq – заряд, наданий провіднику (конденсатору); $d\varphi$ – зміна потенціалу, яка викликана цим зарядом.

11.21 Електроємність ізольованої провідникової сфери радіусом *R*, яка поміщена у нескінченне середовище з діелектричною проникністю *ε:*

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R\,.$$

11.22 Електроємність плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}\,,$$

де S – площа кожної з пластин; d – відстань між ними; ε – діелектрична проникність діелектрика, який заповнює простір між пластинами.

Електроємність плоского конденсатора, що заповнений n шарами діелектрика товщиною d_i кожний, діелектричні проникності яких ε_i (шаруватий конденсатор):

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2 + \ldots + d_n/\varepsilon_n}.$$

11.23 Електроємність сферичного конденсатора (дві концентричні сфери радіусами R_1 і R_2, простір між якими заповнено діелектриком з діелектричною проникністю ε):

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2/(R_2 - R_1).$$

11.24 Електроємність послідовно з'єднаних конденсаторів:

- у загальному випадку $\dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \ldots + \dfrac{1}{C_n}$,

де n – кількість конденсаторів;

- у випадку двох конденсаторів $C = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$;

- у випадку n однакових конденсаторів з електроємністю C_1 кожний $C = \dfrac{C_1}{n}$.

11.25 Електроємність паралельно з'єднаних конденсаторів:

- у загальному випадку $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$,

де n – кількість конденсаторів;

- у випадку двох конденсаторів $C = C_1 + C_2$;
- у випадку *n* однакових конденсаторів з електроємністю C_1 кожний $C = nC_1$.

Енергія електричного поля

11.26 Енергія зарядженого провідника

$$W = \frac{1}{2}C\varphi^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}q\varphi .$$

11.27 Енергія зарядженого конденсатора

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}qU ,$$

де C – електроємність конденсатора; U – різниця потенціалів на його пластинах.

11.28 Об'ємна густина енергії (енергія електричного поля, що припадає на одиницю об'єму):

$$\omega = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}ED ,$$

де $\vec{E}$ – напруженість електричного поля в середовищі з діелектричною проникністю *ε*; $\vec{D}$ – електричне зміщення.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 11.1 Три точкові заряди $q_1 = q_2 = q_3 = 1нКл$ розташовані у вершинах рівностороннього трикутника (рис.1). Який заряд q_4 потрібно помістити в центрі трикутника, щоб система зарядів була в рівновазі?

Розв'язання

$q_4 - ?$
$q_1 = q_2 = q_3 = 1нКл = 10^{-9} Кл.$

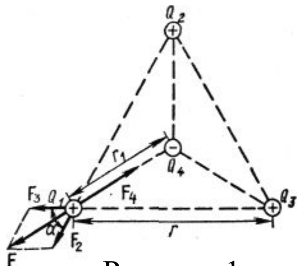


Рисунок 1

Усі три заряди, розташовані у вершинах трикутника, перебувають в однакових умовах. Тому достатньо розглянути умову рівноваги будь-якого з трьох зарядів, наприклад q_1. Заряд q_1 буде в рівновазі, якщо векторна сума сил, що діють на нього, дорівнює нулю (рис.1):

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F} + \vec{F}_4 = 0, \tag{1}$$

де F_2, F_3, F_4 - сили, з якими відповідно діють на заряд q_1 заряди q_2, q_3, q_4; $\vec{F}$ - рівнодійна сил $\vec{F}_2$ і $\vec{F}_3$.

Оскільки сили $\vec{F}$ і $\vec{F}_4$ направлені за однією прямою у протилежні боки, векторну рівність (1) можна замінити скалярною:

F- F_4 = 0, звідки F_4=F. Виразимо в останньому співвідношенні F через F_2 і F_3. Враховуючи, що $F_3 = F_2$, отримаємо

$$F_4 = F_2\sqrt{2(1+\cos\alpha)}.$$

За законом Кулона, врахувавши, що $q_2 = q_3 = q_1$, знайдемо

$$\frac{q_1 q_4}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = \frac{q_1^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sqrt{2\left(1+\cos\alpha\right)},$$

звідси

$$q_4 = \frac{q_1 r_1^2}{r^2}\sqrt{2\left(1+\cos\alpha\right)}. \qquad (2)$$

Геометричні побудови у рівносторонньому трикутнику показують, що

$$r_1 = \frac{r/2}{cos\left(\alpha/2\right)} = \frac{r}{2\cos 30^0} = \frac{r}{\sqrt{3}}, \quad \cos\alpha = \cos 60^0 = \frac{1}{2}.$$

Відповідно формула (2) набуде вигляду

$$q_4 = \frac{q_1}{\sqrt{3}}.$$

Проведемо обчислення:

$$q_4 = \frac{10^{-9}}{\sqrt{3}} = 5,77\cdot10^{-10} = 57,7\left(\text{íÊë}\right).$$

Слід зазначити, що рівновага системи зарядів буде нестійкою.

Відповідь: $q_4 = 57,7\ \text{íÊë}$.

Приклад 11.2 По тонкому кільцю рівномірно розподілений заряд $q = 40\,нКл$ з лінійною густиною $\tau = 50\,\text{íÊë}/\text{ì}$. Визначити напруженість E електричного поля, що створюється цим зарядом в точці А, яка лежить на осі кільця і віддалена від його центра на відстань, що дорівнює половині радіуса (рис.2).

Розв'язання

Сумістимо координатну площину *xOy* з площиною кільця,

$E - ?$

$q = 40\,\text{íÊë}\quad 4\cdot10^{-8}\,\text{Êë},$

$\tau = 50\,\text{íÊë}/\text{ì}\quad 5\cdot10^{-8}\,\text{Êë}/\text{ì}\ ,$

$a = \dfrac{R}{2}.$

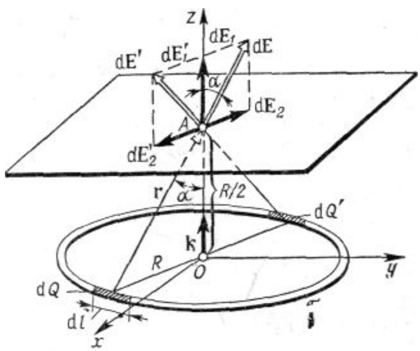


Рисунок 2

а вісь *z* - з віссю кільця (рис.2). На кільці виділимо малу ділянку довжиною *dl*. Оскільки заряд $dq = \tau dl$, який міститься на цій ділянці, можна вважати точковим, то напруженість *dE* електричного поля, що створюється цим зарядом, може бути записана у вигляді

$$d\vec{E} = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \qquad (1)$$

де $\vec{r}$ - радіус-вектор, напрямлений від елемента *dl* до точки А.

Розкладемо вектор $d\vec{E}$ на дві складові: $d\vec{E}_1$, перпендикулярну до площини кільця (співнапрямлену з віссю *z*), і $d\vec{E}_2$, паралельну площині кільця (площини *xOy*), тобто

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2.$$

Напруженість $\vec{E}$ електричного поля в точці А знайдемо інтегруванням:

$$\vec{E} = \int_L \vec{E}_1 + \int_L \vec{E}_2,$$

де інтегрування ведеться по всіх елементах зарядженого кільця. Для кожної пари зарядів dq і dq' $\left(dq = dq'\right)$, розташованих симетрично відносно центра кільця, вектори $d\vec{E}_2$ і $d\vec{E}_2'$ в точці А дорівнюють за модулем і протилежні за напрямом: $d\vec{E}_2 = -d\vec{E}_2'$. Тому векторна сума (інтеграл) $\int_L d\vec{E}_2 = 0$. Складові $d\vec{E}_1$ для всіх елементів кільця співнапрямлені з віссю z (одиничним вектором $\vec{k}$), тобто $d\vec{E}_1 = \vec{k}\ dE_1$. Тоді

$$\vec{E} = \vec{k}\int_L dE_1.$$

Візьмемо до уваги, що

$$dE = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad r = \sqrt{R^2 + \left(R/2\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}R,$$

$$\cos\alpha = \left(R/2\right)/r = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Підставимо ці вирази в (1) та отримаємо

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\tau}{5R^2\sqrt{5}}dl = \frac{\tau dl}{5\sqrt{5}\pi\varepsilon_0 R^2}. \qquad (2)$$

Після інтегрування знайдемо

$$\vec{E} = \vec{k}\int_0^{2\pi R}\frac{\tau dl}{5\sqrt{5}\pi\varepsilon_0 R^2} = \vec{k}\frac{2\tau}{5\sqrt{5}\varepsilon_0 R}.$$

Із співвідношення $q = 2\pi R\tau$ визначимо радіус кільця $R = \dfrac{q}{2\pi\tau}$. Тоді остаточно отримаємо

$$\vec{E} = \vec{k}\frac{2\tau \cdot 2\pi\tau}{5\sqrt{5}\varepsilon_0 \cdot q} = \vec{k}\frac{4\cdot\pi\tau^2}{5\sqrt{5}\cdot\varepsilon_0 q}.$$

Звідси модуль напруженості дорівнює

$$\left|E\right| = \frac{4\cdot\pi\tau^2}{5\sqrt{5}\cdot\varepsilon_0 q}. \tag{3}$$

Виразимо фізичні величини, що входять у формулу (3), в одиницях СІ і проведемо обчислення

$$E = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot\left(5\cdot 10^{-8}\right)^2}{5\sqrt{5}\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 4\cdot 10^{-8}}\,\text{Â / ì} = 7{,}92\left(\text{êÂ / ì}\right).$$

Перевіримо розмірність:

$$\frac{\left[\tau^2\right]}{\left[\varepsilon_0\right]\left[Q\right]} = \frac{\left(1\ Кл/м\right)^2}{1\ Ф/м\cdot 1\ Кл} = \frac{1\ Кл}{1\ Ф\cdot 1\ м} = 1\ В/м.$$

Відповідь: $E = 7{,}92\ кВ/м.$

Приклад 11.3 На тонкому стрижні довжиною l рівномірно розподілений заряд з лінійною густиною $\tau = 10\,\text{í Êë/ì}$. Знайти потенціал φ, що створюється розподіленим зарядом в точці А, розташованій на осі стрижня і віддаленій від його найближчого кінця на відстань l.

Розв’язання

$\varphi - ?$

$\tau = 10\, í\,Êë/ì \; = 10^{-8}\, Êë/ì$.

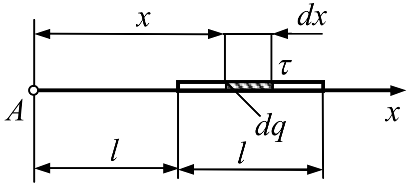


Рисунок 3

У задачі розглядається поле, що створюється розподіленим зарядом. Виділимо на стрижні нескінченно малу ділянку довжиною *dx*. Тоді на цій ділянці буде зосереджений заряд $dq = \tau dx$, який можна вважати точковим. Потенціал $d\varphi$, що створюється цим точковим зарядом в точці А (рис.3), можна визначити за формулою

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 x} = \frac{\tau dx}{4\pi\varepsilon_0 x}. \qquad (1)$$

За принципом суперпозиції електричних полів потенціал електричного поля, що створюється зарядженим стрижнем в точці А, знайдемо інтегруванням виразу (1):

$$\varphi = \int_l^{2l} \frac{\tau dx}{4\pi\varepsilon_0 x}.$$

Після інтегрування одержимо

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln x \Big|_l^{2l} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln 2. \qquad (2)$$

Підставимо числові значення фізичних величин в СІ у співвідношення (2) і проведемо обчислення:

$$\varphi = 9 \cdot 10^{9} \cdot 10 \cdot 10^{-9} \cdot 0,693\, B = 62,4\left(B\right).$$

Відповідь: $\varphi = 62{,}4$ В**.**

Приклад 11.4 Дві концентричні провідні сфери радіусами $R_1 = 6\,см$ і $R_2 = 10\,см$ несуть відповідно заряди $q_1 = 1\,нКл$ $q_2 = -0,5\,нКл$. Знайти напруженість E поля в точках, віддалених від центра сфер на відстані $r_1 = 5\,см$, $r_2 = 9\,см$, $r_3 = 15\,см$ (рис.4). Побудувати графік $E(r)$.

Розв’язання

$E - ?$
$q_1 = 1\,\text{íÊë} = 10^{-9}\,\text{Êë}$,
$q_2 = -0,5\,\text{íÊë} \quad -0,5 \cdot 10^{-9}\,\text{Êë}$,
$R_1 = 6\,\text{ñì} = 0,06\,\text{ì}$,
$R_2 = 10\,\text{ñì} = 0,1\,\text{ì}$,
$r_1 = 5\,\text{ñì} = 0,05\,\text{ì}$,
$r_2 = 9\,\text{ñì} = 0,09\,\text{ì}$,
$r_3 = 15\,\text{ñì} = 0,15\,\text{ì}$.

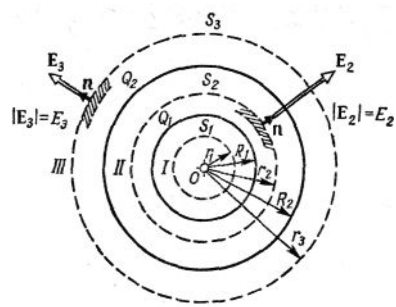


Рисунок 4

Зазначимо, що точки, в яких треба знайти напруженості електричного поля, лежать в трьох різних областях (рис.4): області 1 ($r_1 < R_1$), області 2 ($R_1 < r_2 < R_2$) та області 3 ($r_3 > R_2$).

1 Для визначення напруженості E_1 в області ***I*** проведемо гаусову поверхню S_1 радіусом r_1 і скористаємося теоремою Гауса. Оскільки сумарний заряд, що міститься усередині гаусової поверхні, дорівнює нулю, одержимо

$$\oint_{S_1} E_n dS = 0 .$$

З міркувань симетрії $E_n = E_1 = const$. Отже, $E_1 \oint_{S_1} dS = 0$ і E_1 (напруженість поля в області 1) у всіх точках, що задовольняють умову $r_1 < R_1$, буде дорівнювати нулю.

2 В області ***II*** гаусову поверхню проведемо радіусом r_2. У цьому випадку діелектричну проникність середовища ε будемо вважати такою, що дорівнює одиниці (вакуум). Тоді оскільки усередині гаусової поверхні міститься тільки заряд q_1, запишемо:

$$\int_{S_2} E_n dS = q_1 / \varepsilon_0 .$$

Оскільки $E_n = E_1 = const$, то E можна винести за знак інтеграла:

$$E \int_{S_2} dS = q_1 / \varepsilon_0 \text{, або } ES_2 = q_1 / \varepsilon_0 .$$

Позначивши напруженість E для області ***II*** через E_2, отримаємо

$$E_2 = \frac{q_1}{\varepsilon_0 S_2},$$

де $S_2 = 4\pi\, r_2^2$ - площа гаусової поверхні.

Тоді остаточно одержимо

$$E_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}. \qquad (1)$$

3 В області ***III*** гаусова поверхня проводиться радіусом r_3. Позначимо напруженість *E* області 3 через E_3 і врахуємо, що в цьому випадку гаусова поверхня охоплює обидві сфери і, отже, сумарний заряд буде дорівнювати $q_1 + q_2$. Тоді $E_3 = \dfrac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2}$.

Врахувавши, що $q_2 < 0$, цей вираз можна переписати у вигляді

$$E_3 = \frac{q_1 - |q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2}. \qquad (2)$$

Переконаємося в тому, що права частина співвідношень (1) та (2) дає одиницю напруженості:

$$\frac{[q]}{[\varepsilon_0][r^2]} = \frac{1\,Кл}{1\ \ Ф/м \cdot 1\,м^2} = \frac{1\,Кл}{1\,Ф \cdot 1\,м} = 1\,В/м.$$

Визначимо всі величини в одиницях СІ і проведемо обчислення:

$$E_1=0,$$

$$\mathring{A}_2 = 9\cdot 10^9 \frac{10^9}{\left(0,09\right)^2}\, \hat{A}/\grave{\imath} \; = 1,11\left(\hat{e}\hat{A}/\grave{\imath}\;\right),$$

$$\mathring{A}_3 = 9\cdot 10^9 \frac{\left(1-0,5\right)\cdot 10^{-9}}{\left(0,15\right)^2}\hat{A}/\grave{\imath} \; = 200\left(\hat{A}/\grave{\imath}\;\right).$$

Побудуємо графік $E\left(r\right)$. В області $\boldsymbol{I}$ $\left(r<R_1\right)$ $E=0$.

В області $\boldsymbol{II}$ $\left(R_1 \le r < R_2\right)$

$$E_2\left(r\right)=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

У точці $r=R_1$ напруженість $E_2\left(R_1\right)=\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}=2,5\left(\hat{e}\hat{A}/\grave{\imath}\;\right).$

В точці $r=R_2$ (r прямує до R_2 зліва)

$$E_2\left(R_2\right)=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}=0,9\left(\hat{e}\hat{A}/\grave{\imath}\;\right)$$

.

В області $\boldsymbol{III}$ $\left(r>R_2\right)$

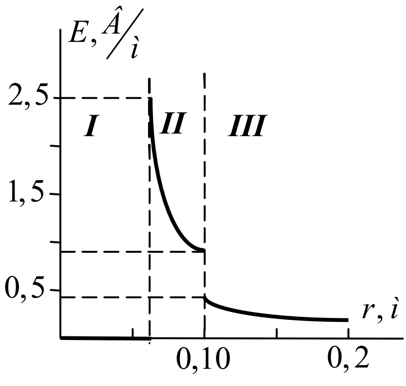


Рисунок 5

$$E_3 = \frac{q_1 - |q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

В точці $r = R_2$ (r прямує до R_2 справа) $E_3\left(R_2\right) = \dfrac{q_1 - |q_2|}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} = 0,45\left(\hat{e}\hat{A}/\grave{\imath}\right)$. Таким чином, функція $E(r)$ в точках $r = R_1$ і $r = R_2$ зазнає розриву.

Графік залежності E від r наведений на рис.5.

Приклад 11.5 Електричне поле створюється двома зарядами $q_1 = 4\,мкКл$ і $q_2 = -2\,мкКл$, що розміщені на відстані $\grave{a} = 0,1\,\grave{\imath}$ один від одного. Визначити роботу $A_{1,2}$ сил поля з переміщення заряду $q = 50\,нКл$ з точки 1 в точку 2 (рис.6).

Розв'язання

$\grave{A}_{1,2} - ?$

$q_1 = 4\grave{\imath}\,\hat{e}\hat{E}\ddot{e} = 4\cdot10^{-6}\,\hat{E}\ddot{e},$

$q_2 = -2\grave{\imath}\,\hat{e}\hat{E}\ddot{e} = -2\cdot10^{-6}\,\hat{E}\ddot{e},$

$\grave{a} = 0,1\,\grave{\imath}\,,$

$q = 50\acute{\imath}\,\hat{E}\ddot{e} = 5\cdot10^{-8}\,\hat{E}\ddot{e}.$

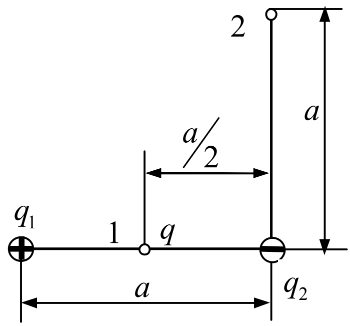


Рисунок 6

Для визначення роботи $A_{1,2}$ сил поля скористаємося співвідношенням

$$\grave{A}_{1,2} = q\left(\varphi_1 - \varphi_2\right). \qquad (1)$$

Застосовуючи принцип суперпозиції електричних полів, визначимо потенціали φ_1 і φ_2 точок 1 і 2 поля:

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a/2} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 a/2} = \frac{2\left(q_1 + q_2\right)}{4\pi\varepsilon_0 a}, \qquad (2)$$

$$\varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{q_1/\sqrt{2} + q_2}{4\pi\varepsilon_0 a}. \qquad (3)$$

Тоді, підставивши вирази (2) і (3) в (1), одержимо

$$A_{1,2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[2\left(q_1 + q_2\right) - \left(q_1/\sqrt{2} + q_2\right)\right],$$

або

$$A_{1,2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[q_1\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + q_2\right].$$

Підставимо числові значення фізичних величин в СІ і проведемо обчислення:

$$A_{1,2} = \frac{50\cdot 10^{-9}\cdot 9\cdot 10^{9}}{0{,}1}\left[4\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2\right]\cdot 10^{-6}\ \text{Äæ} = 14{,}3\left(\text{ì êÄæ}\right).$$

Перевіримо розмірність:

$$\frac{[q][q_1]}{[\varepsilon_0][a]} = \frac{1\,Кл \cdot 1\,Кл}{1\,Ф/м \cdot 1\,м} = 1\,Кл \cdot 1\,В = 1\,Дж\,.$$

Відповідь: $A_{1,2} = 14{,}3\ мкДж$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

11.1 Точкові заряди $q_1 = 20\,мкКл$, $q_2 = -10\,мкКл$ містяться на відстані $d = 5$ ñì один від одного. Визначити напруженість E поля в точці, що віддалена на $r_1 = 3\,см$ від першого заряду і на $r_2 = 4\,см$ від другого. Визначити також силу F, що діє в цій точці на точковий заряд $q = 1\,мкКл$.

Відповідь: E=1,52·10^9 В/м; F =1,52 10^3 Н.

11.2 Два позитивні точкові заряди q і $9q$ закріплені на відстані $d = 100\,см$ один від одного. Визначити, у якій точці на прямій, що проходить через заряди, треба розмістити третій заряд так, щоб він був у рівновазі. Який знак повинен мати цей заряд для того, щоб рівновага була стійкою, якщо переміщення зарядів можливе тільки уздовж прямої, що проходить через закріплені заряди?

Відповідь: На відстані r=0,25 м від заряду q. Заряд повинен бути позитивним.

11.3 Дві однаково заряджені кульки підвішені в одній точці на нитках однакової довжини. При цьому нитки розійшлися на кут α. Кульки занурюють в олію. Яка густина ρ олії, якщо кут розходження ниток при зануренні в олію залишається незмінним? Густина матеріалу кульок $\rho_0 = 1{,}5 \cdot 10^3\ кг/м^3$, діелектрична проникність олії $\varepsilon = 2{,}2$.

Відповідь: $\rho = 820\,\textit{êã}/\textit{ì}^{3}$.

11.4 Точкові заряди $q_1 = 30\,мкКл$ і $q_2 = -20\,мкКл$ містяться на відстані $d = 20\,см$ один від одного. Визначити напруженість електричного поля E в точці, що віддалена від першого заряду на відстань $r_1 = 30\,см$, а від другого на $r_2 = 15\,см$.

Відповідь: E =5,86 *МВ/м*.

11.5 Тонкий стрижень довжиною $l = 20\,см$ несе рівномірно розподілений заряд $\tau = 0{,}1\,\textit{ì êÊë}/\textit{ì}$. Визначити напруженість E електричного поля, створеного розподіленим зарядом у точці A, що лежить на осі стрижня на відстані $a = 20\,см$ від його кінця.

Відповідь: $E = 11{,}2\,\textit{êÂ}/\textit{ì}$.

11.6 По тонкому півкільцю радіусом $R = 10\,см$ рівномірно розподілений заряд з лінійною густиною $\tau = 1\,\textit{ì êÊë}/\textit{ì}$. Визначити напруженість E електричного поля, що створене розподіленим зарядом у точці O, яка збігається з центром кільця.

Відповідь: $E = 180\,\textit{êÂ}/\textit{ì}$.

11.7 Тонкий нескінченний стрижень, обмежений з одного боку, несе рівномірно розподілений заряд з лінійною густиною $\tau = 0{,}5\,\textit{ì êÊë}/\textit{ì}$. Визначити напруженість E електричного поля, створеного розподіленим зарядом у точці A, яка лежить на осі стрижня на відстані $a = 20\,\textit{ñì}$ від його початку.

Відповідь: $E = 22{,}5\,\textit{êÂ}/\textit{ì}$.

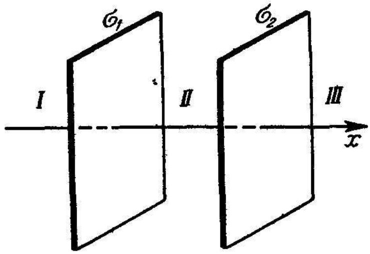
11.8 Знайти потенціал і напруженість електричного поля в центрі сфери радіусом R, зарядженої з поверхневою густиною σ.

Відповідь: $\varphi = \dfrac{R\sigma}{\varepsilon_0}$, $\vec{E} = 0$.

11.9 Заряд $q = 2\,\textit{ì êÊë}$ розподілений рівномірно по об'єму кулі радіусом $R = 40\,\textit{ì ì}$. Знайти потенціал і напруженість електричного поля в центрі кулі.

Відповідь: $\varphi = 6{,}8 \cdot 10^5\ B,\quad \vec{E} = 0$.

11.10 На двох нескінченних паралельних площинах рівномірно розподілені заряди з поверхневими густинами σ_1 і σ_2. Необхідно: а) використовуючи теорему Гауса та принцип суперпозиції електричних полів, знайти вирази для напруженості $E(x)$ електричного поля на трьох ділянках I, II і III, прийняти $\sigma_1 = 2\sigma$ і $\sigma_2 = \sigma$; б) визначити напруженість поля в точці, розміщеній ліворуч від площин і вказати напрямок вектора $\vec{E}$, прийняти $\sigma = 8{,}85\,í\,Êë$; в) побудувати графік $E(x)$.



Відповідь: а) $E_I = -\dfrac{3\sigma}{2\varepsilon_0}$, $E_{II} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, $E_{III} = \dfrac{3\sigma}{2\varepsilon_0}$;

б) $E_I = -8{,}85\,\hat{A}/ì$.

11.11 Два точкових заряди $q_1 = 6\,í\,Êë$ і $q_2 = 3\,í\,Êë$ розміщені на відстані $d = 60\,\tilde{n}ì$ один від одного. Яку роботу необхідно виконати зовнішнім силам, щоб зменшити відстань між зарядами вдвічі?

Відповідь: A=2,7·10^{-7} *Дж.*

11.12 Дві паралельні заряджені площини, поверхнева густина заряду яких складає $\sigma_1 = 2$ мкКл/м^2 і $\sigma_2 =$ -0,8 мкКл/м^2, розміщені на відстані $d = 0{,}6\,\tilde{n}ì$ одна від одної. Визначити різницю потенціалів U між площинами.

Відповідь: $U = 950\,B$.

11.13 Чотири однакові краплі ртуті, заряджені до потенціалу $\varphi = 10\,\hat{A}$, зливаються в одну. Який потенціал φ_1 краплі, що утворилася?

Відповідь: $\varphi = 25,2\,\hat{A}$.

11.14 Тонкий стрижень зігнутий у кільце радіусом $R = 10$ см. Він рівномірно заряджений з лінійною густиною $\tau = 800\,\text{í}\hat{\text{Ê}}\text{ë}/\text{ì}$. Визначити потенціал у точці, що розміщена на осі кільця на відстані $h = 10\,\text{ñì}$ від його центра.

Відповідь: $\varphi = 32,1\,\text{ê}\hat{A}$.

11.15 Тонка квадратна рамка рівномірно заряджена з лінійною густиною заряду $\tau = 200\,\text{ï}\hat{\text{Ê}}\text{ë}/\text{ì}$. Визначити потенціал φ поля в точці перетину діагоналей.

Відповідь: $\varphi = 12,7\,\hat{A}$.

11.16 Електрон, що мав кінетичну енергію $E_k = 10\,\text{å}\hat{A}$, влетів в однорідне електричне поле в напрямку силових ліній поля. Яку швидкість буде мати електрон, пройшовши в цьому полі різницю потенціалів $U = 8\,\hat{A}$?

Відповідь: $\text{v} = 8,4\cdot 10^5\ \text{ì}/\text{ñ}$.

11.17 Електрон з енергією $E_k = 400\,\text{å}\hat{A}$ (у нескінченності) рухається уздовж силової лінії в напрямку до поверхні металевої зарядженої сфери радіусом $R = 10\,\text{ñì}$. Визначити мінімальну відстань a, на яку наблизиться електрон до поверхні сфери, якщо заряд її складає $q = -10\,\text{í}\hat{\text{Ê}}\text{ë}$.

Відповідь: x = 12,5 *см*.

11.18 Електрон рухається уздовж силової лінії однорідного електричного поля. У деякій точці поля з потенціалом $\varphi_1 = 100\,\hat{A}$ електрон мав швидкість $\text{v}_1 = 6\,\grave{I}\ \text{ì}/\text{ñ}$. Визначити потенціал φ_2 точки поля, дійшовши до якої електрон втратить половину своєї швидкості.

Відповідь: $\varphi_2 = 23\,\hat{A}$.

11.19 Конденсатор ємністю $C_1 = 10\,\text{ì}\ \text{ê}\hat{O}$ заряджений до напруги $U = 10\,\hat{A}$. Визначити заряд на обкладинках цього конденсатора після того, як паралельно до нього був підключений інший, незаряджений конденсатор ємністю $C_2 = 20$ ì êÔ .

Відповідь: $q = 33{,}3$ ì êÊë .

11.20 Конденсатори ємністю $C_1 = 2$ ì êÔ , $C_2 = 5$ ì êÔ і $C_3 = 10$ ì êÔ з'єднані послідовно і перебувають під напругою $U = 850$ Â . Визначити напругу і заряд на кожному із конденсаторів.

Відповідь: $q_1 = q_2 = q_3 = 1{,}06$ ì Êë ; $U_1 = 530$ Â ; $U_2 = 212$ Â ; $U_3 = 107$ Â .

11.21 Плоский конденсатор складається з двох круглих пластин радіусом $R = 10\,см$ кожна. Відстань між пластинами $d = 2\,мм$. Конденсатор з’єднаний з джерелом напруги $U = 80\,B$. Визначити заряд q і напруженість E поля конденсатора в двох випадках: а) діелектрик – повітря; б) діелектрик – скло.

Відповідь: E =40 кВ/м; $q_1 = 11$ íÊë ; $q_2 = 77$ íÊë .

11.22 Простір між пластинами плоского конденсатора заповнено діелектриком (фарфор), об’єм якого дорівнює $V = 100$ ñì ^{3}. Поверхнева густина заряду на пластинах конденсатора дорівнює σ=8,85 нКл/м^2. Визначити роботу A, яку потрібно здійснити, щоб видалити діелектрик із конденсатора. Тертям діелектрика і пластин знехтувати.

Відповідь: A=63,5 *нДж.*

11.23 Ізольована металева сфера електроємністю Ñ $= 10$ ïÔ заряджена до потенціалу $\varphi = 3$ êÂ . Визначити енергію W поля, яке розміщене в сферичному шарі, обмеженому сферою і концентричною з нею сферичною поверхнею, радіус якої у три рази більший, ніж радіус сфери.

Відповідь: A=30 *мкДж.*

11.24 Парафінова куля радіусом $R = 10$ ñì заряджена рівномірно по об’єму з об’ємною густиною ρ = 10 нКл/м^3. Визначити енергію W_1 електричного поля, зосередженого у самій кулі, і енергію W_2 поза нею.

Відповідь: $W_1 = 7{,}9\,\text{íÄæ}$; $W_2 = 78{,}8\,\text{íÄæ}$.

11.25 Електричне поле створене зарядженою ($q = 0{,}1\,\text{ì êÊë}$) сферою радіусом $R = 10\,\text{ñì}$. Яка енергія W поля зосереджена в об'ємі, обмеженому сферою і концентричною з нею сферичною поверхнею, радіус якої удвічі більший за радіус сфери?

Відповідь: $W = 0{,}2\,\text{ì êÄæ}$.