МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

СТАТИСТИЧНА ФІЗИКА
ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Мікро- та наноелектроніка»
спеціальності 153 «Мікро- та наносистемна техніка»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

Статистична фізика: Практикум [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 153 «Мікро- та наносистемна техніка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: В. М. Коваль. – Електронні текстові данні (1 файл: 1,88 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 82 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 8 від 24.06.2021)
за поданням Вченої ради факультету електроніки (протокол № 05/2021 від 31.05.2021)

Електронне мережне навчальне видання

СТАТИСТИЧНА ФІЗИКА
ПРАКТИКУМ

Укладачі: *Коваль Вікторія Михайлівна,* канд. техн. наук, доц.

Відповідальний редактор *Орлов А. Т.,* канд. техн. наук., доц.

Рецензенти: *Гармаш О.В.,* канд. техн. наук, доц., доц., КПІ ім. Ігоря Сікорського

Метою навчального посібнику є ознайомлення на практиці студентів з різними способами статистичного опису систем багатьох частинок – газів, рідин та твердих тіл. Студентам пропонується ознайомитись з короткими теоретичними відомостями на початку кожного розділу. В навчальному посібнику наводяться розв'язки основних задач курсу з наступних тем: Випадкові величини та закони їх розподілу, Фазовий простір та його властивості, Мікроканонічний та канонічний ансамбль Гіббса, Розподіл Максвелла-Больцмана, Розрахунок ідеальних та реальних газів, Розрахунок теплоємності твердого тіла. Також в посібнику наприкінці кожного розділу наведені задачі для самостійного розв'язку та відповіді до них.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Статистична фізика та термодинаміка вивчає макроскопічні параметри систем, що складаються з великої кількості частинок (молекул, атомів, електронів тощо). Статистична фізика ставить перед собою завдання визначити макропараметри системи на основі знання законів руху частинок, з яких складається система. Оскільки в статистичній фізиці не розраховується детально рух кожної окремої частинки в системі, а вивчаються деякі усереднені ефекти, то використовуються статистичні методи, а математичним апаратом є теорія ймовірності. Таким чином, статистична фізика – це наука про зв'язки макрохарактеристик класичних і квантових систем багатьох частинок з властивостями і законами руху окремих мікрочастинок, яка використовує методи теорії ймовірності.

Метою курсу «Статистична фізика» є формування у студентів здатностей:

– розраховувати макростан різних видів систем багатьох частинок (замкнених, напівзамкнених та відкритих), що рухаються за законами класичної чи квантової механіки, на основі статистичного розгляду сукупності їх мікростанів, використовуючи мікроканонічний, канонічний та великий канонічний ансамбль Гіббса;
– здійснювати статистичний аналіз фізичних властивостей газів, рідин та твердих тіл як систем багатьох частинок (класичних чи квантових) і на основі цього розраховувати їх основні термодинамічні параметри (тиск, температура, об'єм, теплоємність, відносна діелектрична проникність, відносна магнітна проникність, питома електропровідність тощо).

Вивчення даного курсу забезпечить студентові наступні компетентності: будувати теоретичні моделі, що описують електро-фізичні властивості сучасних матеріалів електроніки.

Після засвоєння навчального модуля «Статистична фізика» студенти мають продемонструвати такі результати навчання:

знання: різних способів статистичного опису систем багатьох частинок (замкнених, напівзамкнених та відкритих), що рухаються за законами класичної чи квантової механіки; функції розподілу мікроканонічного, канонічного та великого канонічного ансамбля Гіббса; сукупності термодинамічних параметрів та основних співвідношень між ними для газів, рідин та твердих тіл.

уміння: розраховувати основні термодинамічні параметри газів, рідин та твердих тіл (тиск, температура, об'єм, теплоємність, відносна діелектрична проникність, відносна магнітна проникність, питома електропровідність тощо) та використовувати теоретичні знання для розробки нових матеріалів електроніки.

досвід: практичного використання вивчених функцій розподілу мікроканонічного, канонічного та великого канонічного ансамбля Гіббса для розрахунку основних термодинамічних параметрів газів, рідин та твердих тіл (тиску, температури, об'єму, теплоємності, відносної діелектричної проникності, відносної магнітної проникності, питомої електропровідності тощо).

Майбутньому фахівцю в галузі електронної інженерії та мікроелектроніки варто вивчати дану дисципліну, оскільки вона дає фундаментальні фізичні знання зі статистичного та квантово-механічного опису електро-фізичних властивостей сучасних матеріалів, які використовуються в мікро- та наносистемній техніці. В навчальному посібнику на практиці вивчаються різні способи статистичного опису систем багатьох частинок – газів, рідин та твердих тіл.

1. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЗАКОНИ ЇХ РОЗПОДІЛУ

1.1. Короткі теоретичні відомості

Випадковою величиною називається така змінна величина, яка внаслідок випробовування набуває з деякою ймовірністю певного значення із множини можливих значень. Наприклад, кількість студентів на лекції, час очікування громадського транспорту на зупинці, температура навколишнього середовища, кількість сонячних днів у році і т.д. Випадкові величини можуть бути дискретні і неперервні. Наприклад, цифра, що випадає при киданні ігрового кубика 1, 2, 3, 4, 5, 6 – дискретна випадкова величина, а швидкість снаряду, випущеного з гармати, є неперервною випадковою величиною.

Під ймовірністю W розуміють границю відношення кількості сприятливих випробувань n до загальної кількості випробувань N за умови, що кількість випробувань наближається до нескінченості:

$$W = \lim_{N \to \infty} \frac{n}{N} \tag{1.1}$$

На практиці не завжди можна провести нескінчену кількість випробувань, тому під ймовірністю якогось випадку розуміють відношення сприятливих випробувань до загальної кількості випробувань $\frac{n}{N}$. Зрозуміло, що чим більшою буде загальна кількість випробувань, тим точніше буде визначена ймовірність. Ймовірність може приймати значення від нуля до одиниці. При W=1 подія називається достовірною, при W=0 подія називається неможливою.

Для того, щоб задати випадкову величину, використовують закон розподілу. Закон розподілу випадкової величини – це співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними ймовірностями. Існують різні форми задання закону розподілу випадкової величини. Дискретні випадкові величини задають таблично, графічно та аналітично, а неперервні випадкові величини – лише аналітично. Табличне задання випадкової величини здійснюється шляхом побудови таблиці, в якій кожному можливому значення випадкової величини ставиться у відповідність ймовірність того, що величина прийме саме таке значення. Графічний спосіб задання випадкової величини полягає у графічному представленні таблиці, тобто побудові ламаної лінії. Однак найбільш універсальним способом подання будь-якої випадкової величини є аналітичний спосіб через функцію розподілу.

Функцією розподілу випадкової величини X називається функція F(X), яка при кожному значенні свого аргументу x чисельно дорівнює ймовірності того, що випадкова величина X набуває значень, менших, аніж значення аргументу x. Нехай X – час очікування громадського транспорту на зупинці, тоді F(X) – це ймовірність того, що час очікування транспорту становитиме, менше, аніж заданий час x. Таким чином, функція розподілу характеризує розподіл ймовірності в діапазоні значень неперервної випадкової величини і має своїм недоліком те, що вона приховує розподіл значень ймовірності по окремим значенням цієї величини.

Очевидно, становить інтерес функція, що здатна характеризувати ймовірність кожного значення випадкової величини. Така функція називається диференціальною функцією розподілу, на відміну від описаної вище інтегральної функції розподілу, або інша більш прийнята її назва густина ймовірності розподілу. Ця функція являє собою відношення ймовірності влучення неперервної випадкової величини в малий діапазон в околі точки x (x, x+Δx) до величини цього діапазону Δx. Розраховується диференціальна функція розподілу як похідна від інтегральної функції розподілу:

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\frac{dW(x)}{dx} \tag{1.2}$$

Якщо випадкова величина задана густиною розподілу, то функцію розподілу можна знайти інтегруванням:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{1.3}$$

Геометрично це означає, що треба знайти площу під кривою густини ймовірності, обмежену заданим інтервалом. Площа під кривою функції розподілу в межах від -∞ до +∞ дорівнює 1:

$$W=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 \tag{1.4}$$

Цей вираз називається умовою нормування і означає, що поява будь-якого можливого випадку із повної системи випадків при випробуваннях являється достовірною подією.

Досить часто по ймовірностям окремих подій необхідно знайти ймовірність більш складної події. Для цього користуються теоремою додавання ймовірностей і теоремою множення ймовірностей.

Теорема додавання ймовірностей. Нехай деяка складана подія полягає в тому, що відбудеться випадок А або випадок В, які є несумісними подіями, тоді ймовірність складної події дорівнює сумі ймовірностей окремих подій А і В:

$$W\left(A\ або\ B\right)=W\left(A\right)+W\left(B\right)=\frac{n_A}{N}+\frac{n_B}{N} \tag{1.5}$$

Теорема множення ймовірностей. Нехай деяка складна подія полягає в тому, що дві незалежні події А та В відбудуться одночасно або подія А відбудеться за умови, що відбудеться подія В, тоді ймовірність складної події дорівнює добутку ймовірностей окремих подій А та В:

$$W\left(A\ i\ B\right)=W\left(A\right)\cdot W\left(B\right)=\frac{n_A}{N}\cdot\frac{n_B}{N} \tag{1.6}$$

Часто на практиці користуються певними характеристиками розподілу випадкових величин – середнє значення випадкової величини (або математичне очікування), середнє значення квадрата цієї величини (або середнє квадратичне значення) та середньоквадратичне відхилення випадкової величини (або дисперсія).

Середнє значення випадкової величини дорівнює сумі добутків випадкової величини на ймовірність появи випадкової величини. Для дискретної випадкової величини маємо рівність, яка носить назву закону великих чисел або теореми Чебишева:

$$\overline{x} = x_1 W\left(x_1\right) + x_2 W\left(x_2\right) + \ldots + x_n W\left(x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i W\left(x_i\right) \tag{1.7}$$

Якщо випадкова величина змінюється неперервно, то її середнє значення знаходиться шляхом інтегрування:

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x dW\left(x\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f\left(x\right) dx \tag{1.8}$$

Середнє значення квадрата дискретної та неперервної випадкової величини розраховується по наведеним ниже формулам відповідно:

$$\overline{x^2} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 W\left(x_i\right) \tag{1.9}$$

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f\left(x\right) dx \tag{1.10}$$

Відхилення значення випадкової величини від її середнього значення називається флуктуацією і визначається виразом:

$$\Delta x = x - \overline{x} \tag{1.11}$$

Середнє значення квадрату відхилення випадкової величини, яке ще називають дисперсією, є більш вживаною характеристикою і визначається за наступними співвідношеннями для дискретної та неперервної випадкової величини відповідно:

$$\overline{(\Delta x)^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x_i}\right)^2 \cdot W(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i^2 - \left(\overline{x_i}\right)^2\right] \cdot W(x_i) \tag{1.12}$$

$$\overline{(\Delta x)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \overline{x}\right)^2 \cdot dW(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x^2 - \left(\overline{x}\right)^2\right] \cdot f(x) dx \tag{1.13}$$

Провівши незначні перетворення, отримаємо загально прийнятну формулу для розрахунку дисперсії:

$$\overline{(\Delta x)^2} = \sigma(x) = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2 \tag{1.14}$$

Квадратний корінь із дисперсії випадкової величини називається середньо квадратичним відхиленням випадкової величини:

$$\sqrt{\sigma(x)} = \sqrt{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2} \tag{1.15}$$

В фізиці важливим параметром є значення відносної флуктуації випадкової величини, яка знаходиться наступним чином:

$$\delta(x) = \frac{\sqrt{\sigma(x)}}{\overline{x}} = \frac{\sqrt{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2}}{\overline{x}} \tag{1.16}$$

Однією із основних задач статистичної фізики є встановлення законів розподілу фізичних випадкових величин в різноманітних фізичних системах. До основних законів розподілу неперервної випадкової величини слід віднести наступні: рівномірний розподіл, експоненціальний розподіл та нормальний (або гауссівський) розподіл.

Найпростішою функцією розподілу є рівномірний розподіл значень випадкової величини в деякому інтервалі значень від a до b. Рівномірний розподіл зустрічається при розгляді, наприклад, густини, енергії, напрямків тощо.

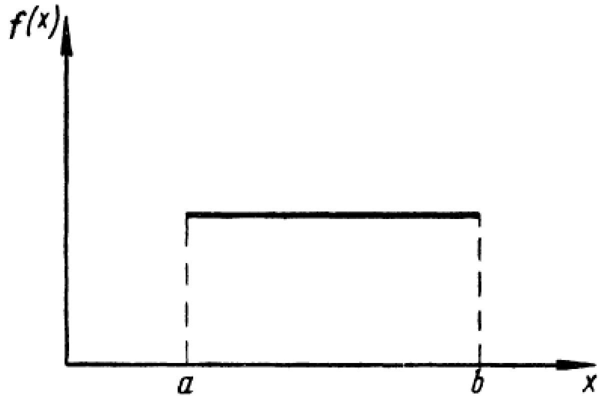


Рисунок 1.1 – Графік рівномірної функції розподілу

Графічне зображення рівномірного розподілу випадкової величини наведено на рис.1.1, а аналітичний запис цієї функції має наступний вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & при\ a \le x \le b \\ 0, & при\ x < a, x > b \end{cases} \tag{1.17}$$

Експоненціальний розподіл випадкової величини має місце при розгляді релаксаційних явищ, радіоактивного розпаду тощо. Графічне зображення експоненціального розподілу випадкової величини наведено на рис.1.2, а аналітичний запис цієї функції має наступний вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}\alpha\cdot e^{-\alpha x}, & при \ \ 0\le x<+\infty \\ 0, & при \ \ -\infty<x<0\end{cases} \tag{1.18}$$

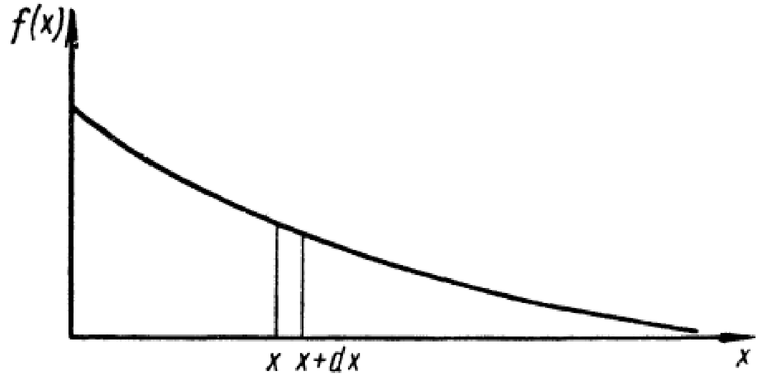


Рисунок 1.2 – Графік експоненціальної функції розподілу

В теорії помилок, при розгляді броунівського руху чи проекцій швидкостей частинок в газі використовується нормальний закон розподілу випадкової величини, графічне зображення якого наведено на рис.1.3.

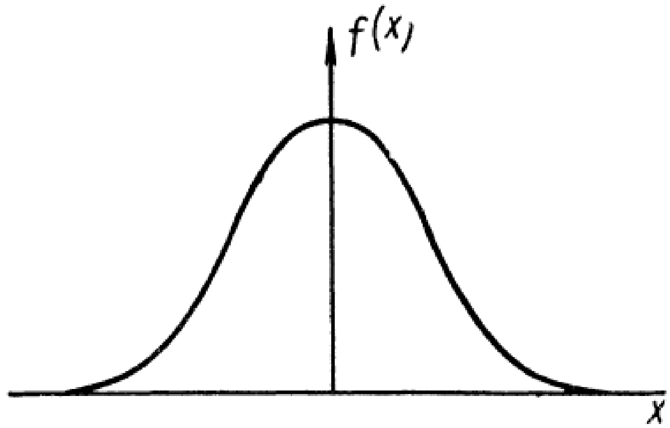


Рисунок 1.3 – Графік гауссівської функції розподілу

Аналітичний запис цієї функції має наступний вигляд:

$$f(x)=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{-\alpha x^2}, \quad при \ \ -\infty<x<+\infty \tag{1.19}$$

1.2. Приклади розв'язку задач

Задача 1.1. В скриньці знаходиться 4 білих, 6 чорних і 5 червоних куль. З неї навмання витягають одну за одною дві кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі одного кольору.

Розв'язок. Нехай складна подія, яка полягає в тому, що витягнуто дві кулі одного кольору, позначається як С. Розглянемо всі можливі в даному випадку сприятливі випробування, ввівши наступні позначення:

C_1 – витягнуто 2 білі кулі;

C_2 – витягнуто 2 чорні кулі;

C_3 – витягнуто 2 червоні кулі.

Оскільки події C_1, C_2 та C_3 є несумісними подіями, кожна з яких призведе до появи події С (АБО подія C_1, АБО подія C_2, АБО подія C_3), то скориставшись теоремою додавання ймовірностей (формула 1.5), можна записати наступне співвідношення:

$$W(C) = W(C_1)+W(C_2)+W(C_3). \tag{1}$$

Однак кожна з подій C_1, C_2 та C_3 є в свою чергу складними подіями. Розглянемо всі прості події (сприятливі випробування), які в даному випадку можуть мати місце:

A_1 – першою витягнуто білу кулю;

B_1 – другою витягнуто білу кулю;

A_2 – першою витягнуто чорну кулю;

B_2 – другою витягнуто чорну кулю;

A_3 – першою витягнуто червону кулю;

B_3 – другою витягнуто червону кулю;

Складна подія C_1 полягає в тому, що і перша, і друга куля, витягнуті зі скриньки, виявляться білого кольору (прості події A_1 та B_1 відповідно). Оскільки обидві події A_1 та B_1 мають відбутись, щоб мала місце подіє C_1 (І подія A_1, І подія B_1), то скориставшись теоремою множення ймовірностей (формула 1.6) можна записати наступне співвідношення:

$$W(C_1) = W(A_1) \cdot W(B_1). \tag{2}$$

Аналогічно запишемо вирази для ймовірності подій C_2 та C_3:

$$W(C_2) = W(A_2) \cdot W(B_2). \tag{3}$$

$$W(C_3) = W(A_3) \cdot W(B_3). \tag{4}$$

Підставимо одержані в задачі рівності (2 – 4) в рівність (1) і одержимо формулу для розрахунку шуканої ймовірності події С:

$$W(C) = W(A_1) \cdot W(B_1) + W(A_2) \cdot W(B_2) + W(A_3) \cdot W(B_3). \tag{5}$$

Щоб розрахувати кількісно ймовірності окремих подій, слід скористатись класичним визначенням ймовірності (рівність 1.1), а також врахувати, що події B_1, B_2 та B_3 є залежними від відповідних подій A_1, A_2 та A_3, а саме: при розрахунку повної кількості випробувань для подій групи В треба врахувати, що одна кулька вже витягнута після того, як відбулась одна з подій групи А. Звідси запишемо кількісний вираз для знаходження ймовірності того, що обидві кулі, витягнуті зі скриньки, будуть одного кольору:

$$W(C) = \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14} + \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} + \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \approx 0.3 \tag{6}$$

Відповідь. Ймовірність того, що обидві витягнуті кулі виявляться одного кольору, становить 30%.

Задача 1.2. Знайти середнє значення випадкової величини $\bar{x}$, середнє значення квадрату випадкової величини $\overline{x^2}$, дисперсію $\overline{\Delta x^2}$ для рівномірного розподілу випадкової величини в деякому інтервалі значень від a до b.

Розв’язок. Знайдемо середнє значення випадкової величини за формулою 1.8, підставивши в неї аналітичний запис функції рівномірного розподілу (1.17):

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{a}^{b} x \cdot \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{a}^{b} = \frac{b+a}{2} \qquad (1)$$

Знайдемо середнє значення квадрату випадкової величини за формулою 1.10, підставивши в неї аналітичний запис функції рівномірного розподілу (1.17):

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_{a}^{b} x^2 \cdot \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{a}^{b} = \frac{b^2+ab+a^2}{3} \qquad (2)$$

Знайдемо дисперсію для рівномірного розподілу за формулою 1.14, скориставшись результатами, одержаними в даній задачі (рівності 1 та 2). Для цього спершу виведемо формулу (1.14) з рівності (1.13):

$$\overline{(\Delta x)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x^2 - (\bar{x})^2\right] \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{x})^2 \cdot f(x)dx = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 \qquad (3)$$

$$\overline{(\Delta x)^2} = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(b+a)}{4} = \frac{(b-a)^2}{12} \qquad (4)$$

Відповідь. $\bar{x} = \frac{b+a}{2}$; $\overline{x^2} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$; $\overline{(\Delta x)^2} = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Задача 1.3. Знайти середнє значення випадкової величини $\bar{x}$, середнє значення квадрату випадкової величини $\overline{x^2}$, дисперсію $\overline{\Delta x^2}$ для експоненціального розподілу випадкової величини.

Розв'язок. Знайдемо середнє значення випадкової величини за формулою 1.8, підставивши в неї аналітичний запис функції експоненціального розподілу (1.18):

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha x}dx \qquad (1)$$

Використовуючи у виразі (1) метод інтегрування частинами (див.Додаток 1), для середнього значення випадкової величини одержимо такий вираз:

$$\bar{x} = \alpha \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x} dx = \left| \begin{aligned} & U = x \\ & dU = dx \\ & dV = e^{-\alpha x} dx \\ & V = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \end{aligned} \right| = \alpha \left[-\frac{1}{\alpha} x e^{-\alpha x} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx \right] = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha} \qquad (2)$$

Знайдемо середнє значення квадрату випадкової величини за формулою 1.10, підставивши в неї аналітичний запис функції експоненціального розподілу (1.18):

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha x} dx \qquad (3)$$

Використовуючи у виразі (3) метод інтегрування частинами двічі підряд (див.Додаток 1), для середнього значення квадрату випадкової величини одержимо такий вираз:

$$\overline{x^2} = \alpha \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x} dx = \left| \begin{aligned} & U = x^2 \\ & dU = 2x dx \\ & dV = e^{-\alpha x} dx \\ & V = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \end{aligned} \right| = \alpha \left[-\frac{1}{\alpha} x^2 e^{-\alpha x} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} 2x e^{-\alpha x} dx \right] = 2 \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x} dx = \left| \begin{aligned} & U = x \\ & dU = dx \\ & dV = e^{-\alpha x} dx \\ & V = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \end{aligned} \right| =$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{\alpha} x e^{-\alpha x} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx \right] = -\frac{2}{\alpha^2} e^{-\alpha x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\alpha^2}. \qquad (4)$$

Знайдемо дисперсію за формулою 1.14, скориставшись результатами, одержаними в даній задачі (рівності 2 та 4):

$$\overline{(\Delta x)^2} = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} \qquad (5)$$

Відповідь. $\bar{x} = \frac{1}{\alpha}$, $\overline{x^2} = \frac{2}{\alpha^2}$, $\overline{(\Delta x)^2} = \frac{1}{\alpha^2}$.

Задача 1.4. Знайти функцію розподілу ймовірності знаходження осциллятора, який рухається вздовж осі Х під дією сили пружності. Побудувати функцію розподілу графічно та проаналізувати її фізичний зміст.

Розв'язок. Запишемо вираз для ймовірності того, що осцилятор можна виявити у проміжку часу Δt за період його руху T:

$$W = \frac{\Delta t}{T} \tag{1}$$

Оскільки за період руху осцилятор двічі проходить через один і той самий стан, то період у виразі (1) слід поділити навпіл. З виразу (1) запишемо вираз для густини ймовірності з врахуванням вище згаданого зауваження:

$$dW = \frac{dt}{T/2} \tag{2}$$

З іншого боку густина ймовірності, згідно означення (рівність 1.2), записується через функцію розподілу, тому ці дві рівності можна прирівняти:

$$dW = f(x)dx = \frac{dt}{T/2} \tag{3}$$

Для того, щоб отримати вираз для функції розподілу, скористаємось рівнянням руху гармонічного осцилятора (див. ДОДАТОК 1):

$$x = A\sin(\omega \cdot t) \tag{4}$$

Продиференціюємо праву і ліву частину рівності (4) і виразимо з рівності (5) dt:

$$dx = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)dt \tag{5}$$

$$dt = \frac{dx}{A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)} \tag{6}$$

Підставимо у вираз (3) співвідношення (6):

$$dW = f(x)dx = \frac{2 \cdot dx}{A \cdot \omega \cdot T \cdot \cos(\omega \cdot t)} \tag{7}$$

Зі співвідношення (7) випишемо функцію розподілу:

$$f(x) = \frac{2}{A \cdot \omega \cdot T \cdot \cos(\omega \cdot t)} \tag{8}$$

Провівши нескладні тригонометричні та алгебраїчні перетворення у знаменнику рівності (8), одержимо функцію розподілу у вигляді, зручному для графічної побудови:

$$f(x) = \frac{2}{A \cdot \omega \cdot T \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}} \tag{9}$$

Аналіз виразу (9) показав, що графіком функції розподілу буде парабола, що зсунута вверх вздовж осі X на $\frac{2}{A \cdot \omega \cdot T}$ одиниць, обидві гілки якої прямують до $+\infty$ при наближенні до точок з координатами $\pm A$ (рис.1.4).

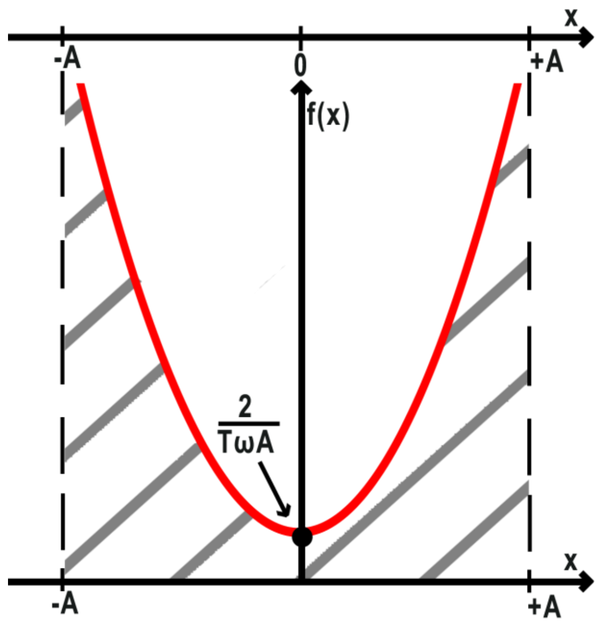


Рисунок 1.4 – Графік функції розподілу ймовірності знаходження осцилятора, що рухається вздовж осі X

Фізичний зміст кривої на рис.1.4 пов'язаний з ймовірністю виявити осциллятор вздовж осі X. Так, в точці з координатами нуль ймовірність знайти осциллятор мінімальна, що зрозуміло, оскільки в цій точці його швидкість (кінетична енергія) максимальна. В точках з координатами $\pm A$ швидкість (кінетична енергія) мінімальна, тому ймовірність виявити осциллятор максимальна.

Відповідь. $f(x) = \dfrac{2}{A \cdot \omega \cdot T \cdot \sqrt{1 - \left(\dfrac{x}{A}\right)^2}}$.

1.3. Задачі для самостійного розв'язку

Задача 1.5. В скриньці знаходиться 2 зелених, 4 синіх і 4 жовтих кулі. З неї навмання витягають одну за одною дві кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі одного кольору.

Задача 1.6. В скриньці знаходиться 25 однакових куль, пронумерованих числами від 1 до 25. Зі скриньки навмання беруть одну кулю. Знайти ймовірність того, що номер кулі виявиться: а) менше 10, б) кратним 3, в) кратним 2 і 3, г) кратним 2 або 3.

Задача 1.7. В скриньці знаходиться 25 однакових куль, пронумерованих числами від 1 до 25. Зі скриньки навмання беруть одну кулю. Знайти ймовірність того, що номер кулі виявиться: а) більше 10, б) кратним 5, в) кратним 4 і 5, г) кратним 4 або 5.

Задача 1.8. Знайти середньоквадратичне відхилення ($\sqrt{\sigma(x)}$) та відносну флуктуацію випадкової величини (δ(x)) для рівномірного розподілу випадкової величини в деякому інтервалі значень від a до b.

Задача 1.9. Знайти середньоквадратичне відхилення ($\sqrt{\sigma(x)}$) та відносну флуктуацію випадкової величини (δ(x)) для експоненціального розподілу випадкової величини.

Задача 1.10. Знайти середнє значення випадкової величини $\bar{x}$, середнє значення квадрату випадкової величини $\overline{x^2}$, дисперсію $\overline{\Delta x^2}$ для нормального розподілу випадкової величини.

Задача 1.11. Знайти середньоквадратичне відхилення ($\sqrt{\sigma(x)}$) та відносну флуктуацію випадкової величини (δ(x)) для нормального розподілу випадкової величини.

2. ФАЗОВИЙ ПРОСТІР ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

2.1. Короткі теоретичні відомості

Будь-якому стану системи, що описується певними макропараметрами, відповідає велика кількість мікростанів з різними значеннями координат та імпульсів частинок, що утворюють дану систему. Відомо, що речовина (газ, рідина чи тверде тіло) складається з окремих частинок, що здійснюють безперервний рух – поступальний, коливальний, обертальний тощо. Будь-який рух частинки описується її координатою та імпульсом в задані моменти часу. Якщо система складається із великої кількості частинок, які постійно рухаються, то кажуть, що система характеризується набором мікростанів, кожному з яких відповідає певний набір координат та імпульсів усіх частинок системи в даний момент часу.

Розглянемо для прикладу деяку систему, що характеризується одним макропараметром – температурою і для визначенності нехай вона дорівнює 20ºC. Оскільки частинки системи здійснюють постійний рух, змінюючи координату та імпульс, то, очевидно, такому макростану системи відповідає не один, а велика кількість мікростанів. При цьому частинки рухаються неабияк і приймають значення координат та імпульсів не будь-які, а лише такі, що забезпечують системі одну і ту ж температуру 20 ºC.

Сукупність різних мікростанів, що відповідають одному і тому ж макростану системи, називається статистичним ансамблем. Різні макростани реалізуються через різну кількість мікростанів. Вважається, що найбільш стійким буде той макростан, який реалізується через найбільшу кількість мікростанів. При цьому кількість мікростанів, через яку реалізується даний макростан, називається термодинамічною ймовірністю. Зрозуміло, що на відміну від звичайної ймовірності, термодинамічна ймовірність виражається числом, більшим за одиницю.

Для статистичного опису системи, що складається з N частинок, необхідно знати координати та імпульси всіх частинок системи в початковий момент часу та закон їх зміни з часом. Позначимо координати та імпульси всіх частинок системи в початковий момент часу наступним чином:

$$x_1^0,\ y_1^0,\ z_1^0,\ x_2^0,\ y_2^0,\ z_2^0\ \ldots\ x_N^0,\ y_N^0,\ z_N^0$$

$$p_{x1}^0, p_{y_1}^0, p_{z1}^0, p_{x2}^0, p_{y_2}^0, p_{z2}^0 \ldots p_{xN}^0, p_{y_N}^0, p_{zN}^0$$

В статистичній фізиці замість декартових координат та проекцій імпульсів використовують так звані узагальнені координати та узагальнені імпульси, які використовуються для спрощення запису виразу, що описує параметри системи з багатьох частинок, а саме:

$$q_1^0, q_2^0, q_3^0, q_4^0, q_5^0, q_6^0 \ldots q_{3N}^0$$

$$p_1^0, p_2^0, p_3^0, p_4^0, p_5^0, p_6^0 \ldots p_{3N}^0$$

Для того, щоб знайти координати та імпульси всіх частинок системи в наступний момент часу, необхідно записати та розв’язати систему з 6N канонічних рівнянь Гамільтона, які мають наступний вигляд:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k},\ \ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k},\ \ k = 1,\ 2,\ \ldots 3N \tag{2.1}$$

де q_k – узагальнені координати, p_k – узагальнені імпульси, $\dot{q}_k$, $\dot{p}_k$ – їх похідні в часі, $H(q,\ p)$ – функція Гамільтона, яка являє собою суму кінетичної $E_к(p)$ і потенціальної $E_п(q)$ енергії:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial q_k}{\partial t},\ \ \dot{p}_k = \frac{\partial p_k}{\partial t},\ \ H(q,\ p) = E_к(p) + E_п(q)$$

Отже, для того щоб описати стан системи з багатьох частинок, необхідно для кожної координати та проекції імпульсу всіх частинок записати рівняння Гамільтона, а тоді розв’язати одержану систему 6n рівнянь. Слід при цьому зауважити, що розв’язком цієї системи є 6n функцій, записаних для кожної координати та проекції імпульсу всіх частинок, які залежать від початкових значень координат та проекцій імпульсів всіх частинок, а також часу:

$$
\begin{aligned}
&q_1\left(q_1^0, q_2^0, ..., q_{3N,}^0 p_1^0, p_2^0, ..., p_{3N,}^0 t\right) = 0 \\
&\vdots \\
&q_{3N}\left(q_1^0, q_2^0, ..., q_{3N,}^0 p_1^0, p_2^0, ..., p_{3N,}^0 t\right) = 0 \\
&p_1\left(q_1^0, q_2^0, ..., q_{3N,}^0 p_1^0, p_2^0, ..., p_{3N,}^0 t\right) = 0 \\
&\vdots \\
&p_{3N}\left(q_1^0, q_2^0, ..., q_{3N,}^0 p_1^0, p_2^0, ..., p_{3N,}^0 t\right) = 0
\end{aligned}
$$

де $q_1^0, q_2^0, ..., q_{3N,}^0 p_1^0, p_2^0, ..., p_{3N}^0$ – значення 3N узагальнених координат і 3N узагальнених імпульсів частинок системи в початковий момент часу.

В силу громіздкості аналітичний розв’язок цієї системи рівнянь є надто складною задачею. Якщо ж подати ці 6n рівнянь як рівняння руху системи в так званому фазовому просторі, то можна зобразити розв’язки цих рівнянь графічно.

Під фазовим простором розуміють абстрактний, уявний, ортогональний 6n-вимірний простір усіх узагальнених координат і узагальнених імпульсів системи. В такому просторі по координатним осям відкладаються всі узагальнені координати і узагальнені імпульси. При цьому вважається, що осі цього простору перпендикулярні, тобто система координат є прямокутною. Фазовий простір не має нічого спільного з реальним простором і являється чисто умовним поняттям, в якому зручно розв’язувати задачі руху систем, які складаються з великої кількості частинок.

Реальна система в даний момент часу з фіксованими значеннями координат та імпульсів зображується в такому просторі точкою, координатами якої є узагальнені координати та узагальнені імпульси всіх частинок системи в даний момент часу. Точка, положення якої в фазовому просторі характеризує стан системи в визначений момент часу, називається фазовою точкою. Отже, кожній точці фазового простору відповідає визначений стан системи (мікростан або фаза, звідси і назва – фазовий простір).

В реальній системі відбувається рух складових її частинок, в результаті чого неперервно змінюються координати та імпульси частинок, тобто мікростани системи. Зі зміною координат та імпульсів частинок системи буде змінюватись положення фазової точки у фазовому просторі. Таким чином, фазова точка з часом буде рухатись у фазовому просторі. Зміна мікростанів системи з часом зобразиться у фазовому просторі деякою лінією, яка називається фазовою траєкторією. Фазова точка неперервно рухається у фазовому просторі, оскільки неперервно змінюються координати та імпульси частинок у реальній системі. Якщо з плином часу можна спостерігати за всіма можливими мікростанами системи, тоді реальна система у фазовому просторі зобразиться деяким фазовим об’ємом, що заповнений фазовими точками. Фазовий об’єм, який займає система, можна уявити собі у вигляді гіпер-кубика, кожна грань якого представляє собою 1 мікростан (1 фазову точку) з фіксованими значеннями координати та імпульсу.

Звідси статистичний ансамбль зобразиться у фазовому просторі фазовим ансамблем, що являє собою деякий об’єм, який заповнений фазовими точками, кожна з яких відповідає 1 мікростану.

В статистичній фізиці фазовий простір прийнято позначати буквою Г. Як і для декартового 3N вимірного простору, для фазового простору можна ввести елемент об’єму. Нижче наведено вирази для елементів об’єму в декартовому та фазовому просторах відповідно:

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz \tag{2.2}$$

$$d\Gamma = dq_1 \cdot dq_2 \cdot \ldots \cdot dq_{3n} \cdot dp_1 \cdot dp_2 \cdot \ldots \cdot dp_{3n} = (dq)^{3n} \cdot (dp)^{3n} \tag{2.3}$$

Об’єм в декартовому просторі – величина аддитивна, тобто об’єм дорівнює сумі підоб’ємів (V_1 та V_2), на які він розбитий:

$$V=V_1+V_2. \tag{2.4}$$

Фазовий об’єм величина мультиплікативна, тобто якщо ми розіб’ємо об’єм Γ на два підоб’єми Γ_1 і Γ_2, то загальний об’єм Γ буде дорівнювати добутку цих об’ємів:

$$\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \,. \tag{2.5}$$

2.2. Приклади розв’язку задач

Задача 2.1. В ящику з дзеркальним відбиванням, шириною а, рухається частинка з постійною швидкістю вздовж осі X. Визначити та накреслити фазову траєкторію такої частинки.

Розв’язок. Загальний алгоритм розв’язку задач на побудову фазової траєкторії наступний:

- зобразити умову задачі графічно,
- визначити розмірність координатного і фазового простору,
- зобразити осі в фазовому просторі і початкове положення частинки,
- визначити рівняння фазової траєкторії,
- зобразити графічно фазову траєкторію в фазовому просторі.

Умову задачі графічно зображено на рис.2.1, а. Оскільки в задачі розглядається одновимірний випадок, то фазовий простір буде двовимірний, в якому крім осі X, буде перпендикулярна до неї вісь p_x. Зображення двох осей та початкового положення частинки у фазовому просторі, а також фазової траєкторії наведено на рис.2.1, б. Рівняння фазової траєкторії в даній задачі визначити досить легко, оскільки за умовою частинка рухалась з постійною швидкістю:

$$p_x(x) = mv_x(x) = mv_{x0} = const \tag{1}$$

а)

б)

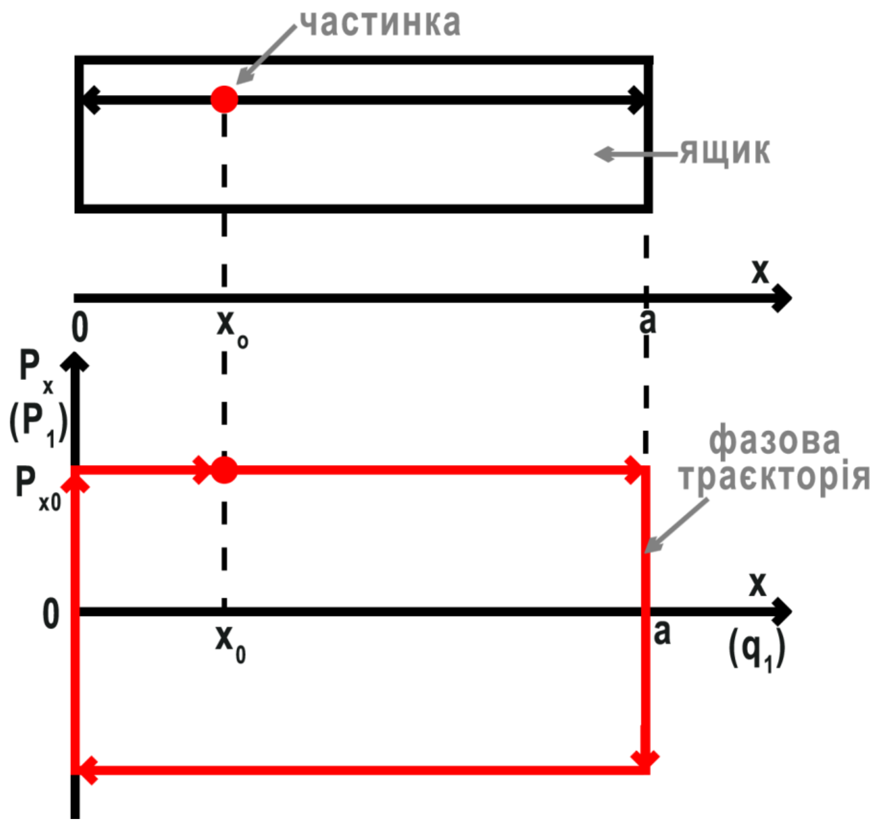


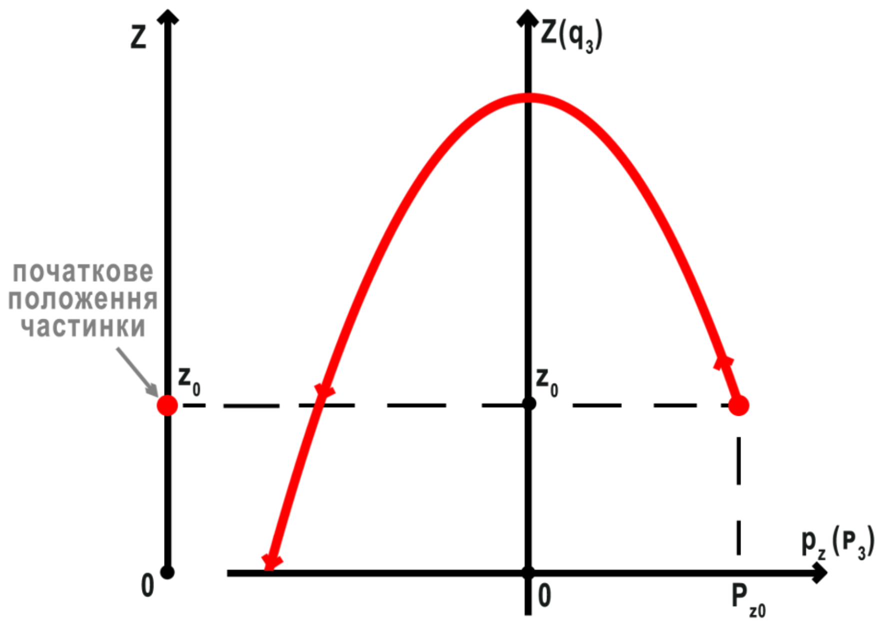
Рисунок 2.1 – Зображення умови задачі (а) та фазової траєкторії частинки (б)

Враховуючи, що для частинки мало місце дзеркальне відбивання від стінки ящика, форма фазової траєкторії – прямокутник. Стрілками на фазовій траєкторії вказують зміну напрямку руху частинки.

Відповідь. Форма фазової траєкторії – прямокутник.

Задача 2.2. Визначити та накреслити фазову траєкторію частинки масою m, що рухається вертикально в верх в потенциальному полі Землі, якщо в початковий момент часу координата частинки була z, а швидкість v_0.

Розв’язок. Умову задачі графічно зображено на рис.2.2, а. Оскільки в задачі розглядається одновимірний випадок, то фазовий простір буде двовимірний, в якому крім осі Z, буде перпендикулярна до неї вісь p_z. Зображення двох осей та початкового положення частинки у фазовому просторі, а також фазової траєкторії наведено на рис.2.2, б.



а) б)

Рисунок 2.2 – Зображення умови задачі (а) та фазової траєкторії частинки (б)

Рівняння фазової траєкторії в даній задачі визначається на основі закону збереження енергії – сума кінетичної E_k та потенціальної U енергії в початковий момент часу t_0 дорівнює сумі кінетичної та потенціальної енергії в наступний момент часу t:

$$E_k(t_0)+U(t_0)=E_k(t)+U(t) \tag{1}$$

Враховуючи, що частинка рухається в потенціальному полі Землі, вираз (1) можна записати у такому вигляді:

$$\frac{mv_{z0}^2}{2} + mgz_0 = \frac{mv_z^2}{2} + mgz \tag{2}$$

Перейдемо у виразі від швидкостей до імпульсів, оскільки рівняння фазової траєкторії в координатах, заданих на рис.2.2, б, має бути виду $Z(p_z)$.

$$\frac{p_{z0}^2}{2m} + mgz_0 = \frac{p_z^2}{2m} + mgz \tag{3}$$

Далі слід здійснити незначні алгебраїчні перетворення, щоб одержати рівняння фазової траєкторії:

$$z = \frac{1}{2m^2 g}\left(p_{z0}^2 - p_z^2\right) + z_0 \tag{4}$$

Звідси випливає, що форма фазової траєкторії – перевернута парабола. Стрілками на фазовій траєкторії вказують зміну напрямку руху частинки.

Відповідь. Форма фазової траєкторії – перевернута парабола.

Задача 2.3. Визначити та накреслити фазову траєкторію осцилятора з тертям (тобто затухаючого осцилятора), що має в початковий момент координату x_0, а швидкість V_0. В задачі врахувати, що $\nu << \omega$.

Розв'язок. Умову задачі графічно зображено на рис.2.3, а. Оскільки в задачі розглядається одновимірний випадок, то фазовий простір буде двовимірний, в якому крім осі X, буде перпендикулярна до неї вісь p_x. Зображення двох осей та початкового положення частинки у фазовому просторі, а також фазової траєкторії наведено на рис.2.3, б.

Оскільки рівняння фазової траєкторії в координатах, заданих на рис.2.3, б, має бути виду $p_x(x)$, то скористаємось відомими виразами для імпульсу та швидкості через координату:

$$p_x = mv_x = m\frac{\partial x}{\partial t} \tag{1}$$

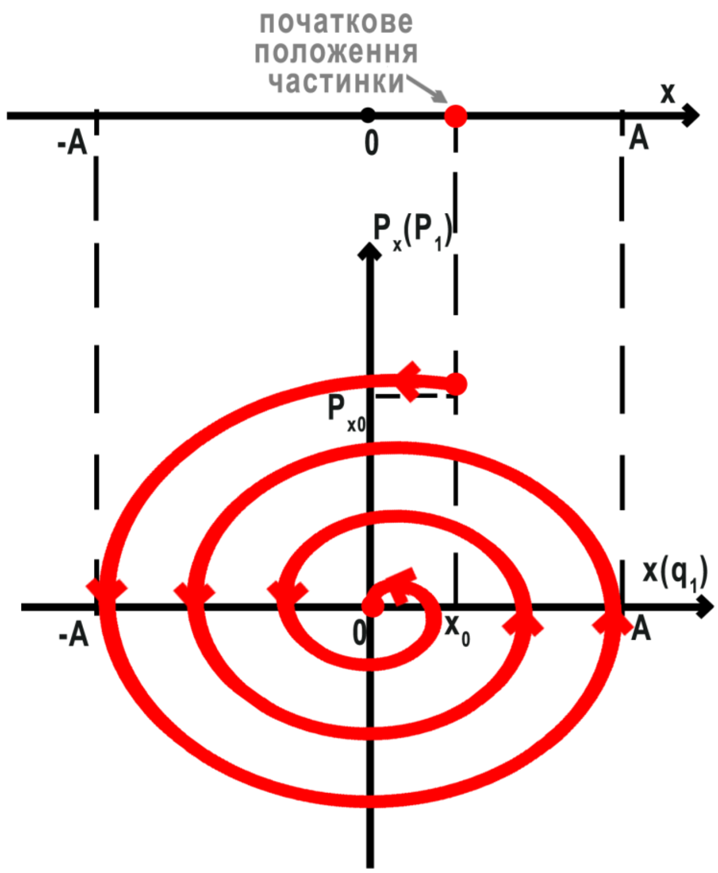


Рисунок 2.3 – Зображення умови задачі (а) та фазової траєкторії частинки (б)

Скориставшись розв'язком рівнянням руху гармонічного осцилятора із затуханням, що наведений у Додатку 1, перепишемо вираз (1) у вигляді:

$$p_x = m\left(-\frac{\nu}{2}e^{-\frac{\nu t}{2}}\left[x_0\cos\omega t + \frac{V_0}{\omega}\sin\omega t\right] + e^{-\frac{\nu t}{2}}\left[-x_0\omega\sin\omega t + \frac{V_0\omega}{\omega}\cos\omega t\right]\right) \quad (2)$$

Прийнявши до уваги умову $\nu << \omega$, задану в умові задачі, вираз (2) можна значно спростити, знехтувавши першим доданком:

$$p_x = m\omega e^{-\frac{\nu t}{2}}\left[-x_0\sin\omega t + \frac{V_0}{\omega}\cos\omega t\right] \quad (3)$$

Однак рівність (3) не може бути рівнянням фазової траєкторії, бо імпульс у виразі залежить не від координати, а від часу. В результаті маємо 2 вирази, що залежать від часу – вираз для імпульсу (3) та вираз для координати (розв'язок рівняння руху гармонічного осцилятора із затуханням, що наведений у Додатку 1). Для виводу даного рівняння скористаємось математичним методом синтезу, а саме: піднесемо до квадрату кожну з рівностей та додамо почленно їх ліві та праві частини. Перед цим рівність (3) доцільно розділити на константу, що стоїть перед експонентою. В результаті одержимо наступний вираз:

$$x^2 + \frac{p_x^2}{m^2\omega^2} = e^{-\gamma t}\left[\left(x_0\cos\omega t + \frac{V_0}{\omega}\sin\omega t\right)^2 + \left(-x_0\sin\omega t + \frac{V_0}{\omega}\cos\omega t\right)^2\right] \quad (4)$$

Здійснивши алгебраїчні та тригонометричні перетворення у правій частині рівності (4), одержимо наступне співвідношення:

$$x^2 + \frac{p_x^2}{m^2\omega^2} = e^{-\gamma t}\left[x_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega^2}\right] \quad (5)$$

Оскільки в дужках в правій частині рівності (5) знаходяться лише константи – початкові координата та швидкість, а також циклічна частота, то можна позначити дужку однією літерою і розділити на неї ліву і праву частину рівності (5). В результаті одержимо рівняння фазової траєкторії у такому вигляді:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{p_x^2}{m^2\omega^2 a^2} = e^{-\gamma t} \quad (6)$$

Якби осцилятор не зазнавав затухання, тобто постійна затухання була б рівна нулю, то графічно рівність (6) являла б собою еліпс. Оскільки має місце затухання, то з часом розмір еліпса зменшуватиметься, допоки осцилятор не зупиниться повністю. Звідси випливає, що форма фазової траєкторії – закручена спіраль. Стрілками на фазовій траєкторії вказують зміну напрямку руху частинки.

Відповідь. Форма фазової траєкторії – закручена спіраль.

Задача 2.4. Довести, що гамма-функція Ейлера має таку властивість Γ(z+1)= z Γ(z).

Розв'язок. Застосуємо до інтегральної функції Γ(z+1) інтегрування по частинам:

$$\Gamma(z+1)=\int_0^{+\infty} x^z e^{-x}dx=\left|\begin{array}{l} U=x^z \\ dU=zx^{z-1}dx \\ dV=e^{-x}dx \\ V=-e^{-x} \end{array}\right|=-x^z e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} zx^{z-1}e^{-x}dx=z\int_0^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}dx=z\Gamma(z) \quad (1)$$

Отже, Γ(z+1)= z Γ(z), що і потрібно було довести.

Задача 2.5. Знайти гамма-функцію Ейлера від будь-якого цілого числа.

Розв'язок. Знайдемо гамма-функцію Ейлера від декількох перших цілих чисел – 1, 2, 3, 4 та 5, скориставшись основною властивістю гамма-функції Ейлера, доведеною у попередній задачі:

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1 \quad (1)$$

$$\Gamma(2)=\Gamma(1+1)=1\cdot\Gamma(1)=1 \quad (2)$$

$$\Gamma(3)=\Gamma(2+1)=2\cdot\Gamma(2)=2\cdot 1=2! \quad (3)$$

$$\Gamma(4)=\Gamma(3+1)=3\cdot\Gamma(3)=3\cdot 2\cdot 1=3! \quad (4)$$

$$\Gamma(5)=\Gamma(4+1)=4\cdot\Gamma(4)=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=4! \quad (5)$$

На основі одержаних рівностей (1 – 5) запишемо загальну формулу для обчислення гамми-функції Ейлера від будь-якого цілого числа:

$$\Gamma(n)=\Gamma(n-1+1)=(n-1)\cdot\Gamma(n-1)=(n-1)! \quad (6)$$

Відповідь. Формула для обчислення гамми-функції Ейлера від будь-якого цілого числа $\Gamma(n)=(n-1)!$.

Задача 2.6. Визначити розподіл об'єму в одновимірній, двовимірній і тривимірній сферах.

Розв'язок. Подамо розв'язок задачі у вигляді наступної таблиці (табл..2.1). Зобразимо графічно одно-, двох- та трьохвимірну сферу, що являють собою відрізок, коло та сферу відповідно, і заповнимо таким чином першу колонку табл..2.1.

Таблиця 2.1 – Об'єм та рівняння одно-, двох-, трьохвимірної та гіпер-сфери

Вид сфери	Повний об'єм та об'єм на половині радіусу	Повний об'єм (загальна формула)	Рівняння сфери в декартовому просторі
Одновимірна сфера	$V_1(R)=2R$ $V_1\left(\frac{R}{2}\right)=R$	$V_1=C_1\cdot R$	$x^2=R^2$
Двохвимірна сфера	$V_2(R)=\pi R^2$ $V_2\left(\frac{R}{2}\right)=\frac{\pi R^2}{4}$	$V_2=C_2\cdot R^2$	$x^2+y^2=R^2$
Трьохвимірна сфера	$V_3(R)=\frac{4}{3}\pi R^3$ $V_3\left(\frac{R}{2}\right)=\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$	$V_3=C_3\cdot R^3$	$x^2+y^2+z^2=R^2$
Гіпер-сфера (n-вимірна сфера)	–	$V_n=C_n\cdot R^n$	$q_1^2+q_2^2+...+q_n^2=R^2$

Запишемо формули для розрахунку повного об'єму та об'єму на половині радіусу відповідної фігури (друга колонка табл..2.1). З наведених формул видно, що для одновимірної сфери об'єм розподілений вздовж радіусу рівномірно, а для сфер більшої вимірності – нерівномірно.Так, у двовимірній сфері на половині радіусу зосереджено ¼ об'єму, а у тривірній сфері – лише 1/8 об'єму.

Таким чином, при зростанні вимірності сфери об'єм розподіляється вздовж радіуса все більш нерівномірно, притискаюсичь ближче до стінок сфери.

В третій колонці табл..2.1 слід навести формули для розрахунку повного об'єму одно-, двох- та трьохвимірної сфери в загальному вигляді, замінивши числовий коефіцієнт на константи C_1, C_2 та C_3 відповідно. Четверту колонку табл..2.1 заповнюємо рівняннями відповідних фігур в декартовому просторі.

Далі введемо в таблицю рядок для гіпер-сфери, тобто n-вимірної сфери, і заповнимо для неї колонки табл.2.1. по аналогії. Очевидно, що об'єм n-вимірної сфери зосереджений в тонкому шарі поблизу поверхні, а всередині об'єму немає. Якби можна було визначити коефіцієнти C_n, то можна було б розрахувати об'єм сфери будь-якої вимірності за формулою, наведеною в третій колонці табл.2.1.

Відповідь. Розподіл об'єму в одновимірній сфері – рівномірний, а в двох- та трьохвимірній – нерівномірний вздовж радіусу.

Задача 2.7. Довести, що об'єм n-вимірної сфери зосереджений в тонкому шарі товщиною ΔR поблизу поверхні, а всередині об'єму немає

Розв'язок. Для розв'язку задачі скористаємось виразом для знаходження об'єму гіпер-сфери (табл.2.1):

$$V_n = C_n \cdot R^n \tag{1}$$

В задачі треба показати, що об'єм тонкого приповерхневого шару ΔV_n гіпер-сфери прямує до об'єму V_n, таким чином довівши, що весь об'єм такої сфери зосереджений поблизу поверхні:

$$\Delta V_n = V_n \tag{2}$$

Запишемо вираз для розрахунку ΔV_n із загальних геометричних міркувань, а саме: об'єм приповерхневого шару сфери дорівнює різниці об'ємів сфер радіусу R та (R-ΔR):

$$\Delta V_n = C_n \cdot R^n - C_n \cdot (R - \Delta R)^n = C_n \cdot R^n \left(1 - \left(1 - \frac{\Delta R}{R} \right)^n \right) \tag{3}$$

Якщо у цьому виразі ми покажемо, що внутрішня дужка прямує до нуля, доведемо рівність (2). Скористаємось другою важливою границею:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\Delta R}{R}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n}{n}\cdot\frac{\Delta R}{R}\right)^n=e^{\frac{-n\Delta R}{R}}=0 \tag{4}$$

Тобто дійсно, для гіпер-сфери об'єм ніби "відтісняється" зсередини до поверхні, що і потрібно було довести.

Відповідь. Об'єм n-вимірної сфери зосереджений в тонкому шарі товщиною ΔR поблизу поверхні, а всередині об'єму немає.

Задача 2.8. Знайти формулу для розрахунку об'єму гіпер-сфери, тобто сфери будь-якої вимірності.

Розв'язок. Для знаходження об'єму гіпер-сфери скористаємось загальною формулою, наведеною у третій колонці табл. 2.1. Метою даної задачі є встановлення числового виразу для коефіцієнтів C_n. Для цього скористаємось рівнянням гіпер-сфери, наведене у четвертій колонці табл. 2.1:

$$q_1^2+q_2^2+...+q_n^2=R^2 \tag{1}$$

Скористаємось штучним математичним прийомом: піднесемо ліву та праву частину рівності (1) в показник експоненти і проінтегруємо їх по всіх координатах ($q_1, q_2, ...q_n$) та елементарному об'єму (dV_n) відповідно. В результаті отримаємо рівність двох інтегралів:

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}...\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(q_1^2+q_2^2+...+q_n^2\right)}dq_1dq_2\cdot...\cdot dq_n}_{I_1}=\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{R^2}dV_n}_{I_2} \tag{2}$$

Інтеграл I_1 являє собою n-кратний інтеграл від складеної експоненціальної функції, яку можна подати як добуток n експонент, що дасть змогу багатократний інтеграл замінити добутком однократних інтегралів. Звідси I_1 можна замінити виразом:

$$I_1 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^n \qquad (3)$$

Інтеграл у дужках являє собою інтеграл Пуассона I роду, тому звідси I_1 дорівнює:

$$I_1 = \left(\sqrt{\pi}\right)^n = \pi^{\frac{n}{2}} \qquad (4)$$

Для того, щоб взяти інтеграл I_2, слід знайти вираз для елементу dV_n. Скористаємось загальним виразом для розрахунку об’єму гіпер-сфери:

$$V_n = C_n R^n \qquad (5)$$

Візьмемо похідну від виразу (5):

$$dV_n = n \cdot C_n \cdot R^{n-1} dR \qquad (6)$$

Звідси вираз для інтегралу I_2 можна записати наступним чином:

$$I_2 = \int_0^{\infty} e^{-R^2} \cdot C_n \cdot n \cdot R^{n-1} dR = C_n \cdot n \int_0^{\infty} e^{-R^2} \cdot R^{n-1} dR \qquad (7)$$

Для того, щоб взяти інтеграл I_2, введемо заміну змінних:

$$I_2 = \left| \begin{array}{l} t = R^z \\ R = t^{\frac{1}{2}} \\ dR = \frac{1}{2} t^{\frac{-1}{2}} dt \end{array} \right| = C_n \cdot n \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{\frac{1}{2}\cdot(n-1)} t^{\frac{-1}{2}} dt = \frac{C_n \cdot n}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{\frac{n}{2}-1} dt \qquad (8)$$

Співставимо одержаний інтеграл з гамма-функцією Ейлера:

$$I_2 = C_n \cdot \frac{n}{2} \int_0^{\infty} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} \cdot dt = C_n \frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \qquad (9)$$

Скористаємось основною властивістю гамма-функції Ейлера:

$$I_2 = C_n \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \qquad (10)$$

Прирівняємо обидва інтеграли – рівності (4) та (10):

$$I_1 = I_2 \tag{11}$$

$$\pi^{\frac{n}{2}} = C_n \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \tag{12}$$

Звідси шукані коефіцієнти C_n, а отже й об’єм гіпер-сфери будуть виражатись наступним чином:

$$C_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \tag{13}$$

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cdot R^n \tag{14}$$

Відповідь. Формула для розрахунку об’єму гіпер-сфери $V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cdot R^n$

2.3. Задачі для самостійного розв’язку

Задача 2.9. В ящику з пружніми стінками, шириною а, рухається частинка з постійною швидкістю вздовж осі X. Визначити та накреслити фазову траєкторію такої частинки.

Задача 2.10. Визначити та накреслити фазову траєкторію частинки масою m, що рухається вертикально в верх в потенциальному полі Землі, якщо в початковий момент часу координата частинки була z=0, а швидкість v_0.

Задача 2.11. Визначити та накреслити фазову траєкторію частинки масою m, що рухається вертикально в верх в потенциальному полі Землі, якщо в початковий момент часу координата частинки була $z=0$, а швидкість $v_0=0$.

Задача 2.12. Визначити та накреслити фазову траєкторію частинки масою m та зарядом -q, що рухається до нерухомого центру +3 q, якщо в початковий момент часу відстань між ними була r_0 і швидкість $v_0 = 0$.

Задача 2.13. Визначити та накреслити фазову траєкторію частинки масою m та зарядом -2q, що рухається до нерухомого центру +4q, якщо в початковий момент часу відстань між ними була r_0 і швидкість $v_0 = 0$.

Задача 2.14. Знайти гамма-функцію Ейлера від будь-якого напівцілого числа.

Задача 2.15. Знайти об'єм 6-ти та 7-вимірної сфери за формулою розрахунку об'єму гіпер-сфери.

Задача 2.16. Знайти об'єм 8-ти та 9-вимірної сфери за формулою розрахунку об'єму гіпер-сфери.

Задача 2.17. Знайти об'єм 10-ти та 11-вимірної сфери за формулою розрахунку об'єму гіпер-сфери.

Задача 2.18. Знайти об'єм 50-ти та 51-вимірної сфери за формулою розрахунку об'єму гіпер-сфери.

Задача 2.19. Знайти об'єм 100-ти та 101-вимірної сфери за формулою розрахунку об'єму гіпер-сфери.

3. МІКРОКАНОНІЧНИЙ ТА КАНОНІЧНИЙ АНСАМБЛЬ ГІББСА

3.1. Короткі теоретичні відомості

Всі рівноважні системи поділяють на три класи: замкнені, напівзамкнені та відкриті системи. Замкнені системи не обмінюються із зовнішнім середовищем ні частинками, ні енергією і описуються мікроканонічним ансамблем Гібса. Напівзамкнені системи обмінюються із зовнішнім середовищем енергією, але кількість частинок у них залишається постійною, і описуються канонічним ансамблем Гібса. Відкриті системи здійснюють обмін із зовнішнім середовищем як енергією, так і частинками, описуються великим канонічним ансамблем Гібса.

Мікроканонічний ансамбль Гіббса – це статистичний ансамбль усіх можливих станів ізольованої термодинамічної системи із певним значенням енергії. Оскільки система замкнена, то обміну енергією з навколишнім середовищем немає, а тому систему можна охарактеризувати певним постійним значенням енергії E_0. Частинки системи знаходяться у постійному русі, змінюючи свої координати та імпульси. Тому стан такої системи у фазовому просторі описується фазовим об’ємом, заповненим фазовими точками. Згідно теореми Ліувілля, фазовий об’єм, який займає система у фазовому просторі залишається незмінним за величиною, але його форма може довільним чином змінюватись. Тому матимуть місце певні флуктуації енергії, тобто відхилення миттєвого значення енергії від якогось постійного рівня E_0. Відносна флуктуація енергії в такій системі дорівнює:

$$\delta(E) = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta E)^2}}}{\overline{E}} \approx \frac{\sqrt{n\overline{(\Delta \varepsilon_i)^2}}}{n\overline{\varepsilon_i}} \sim \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad (3.1)$$

Згідно рівності (3.1), відносна флуктуація енергії системи зменшується зі збільшенням кількості підсистем (частинок). Чим більшою буде кількість частинок системи, тим меншою буде флуктуація енергії такої системи. Таким чином, енергія замкненої системи, що складається з великої кількості частинок, зосереджена у вузькому інтервалі значень енергії навколо середнього значення E_0. Тому функцію розподілу ймовірностей мікростанів таких систем по енергіям можна задати за допомогою дельта функції Дірака (рис.3.1):

$$f(E) = C \cdot \delta(E - E_0) \tag{3.2}$$

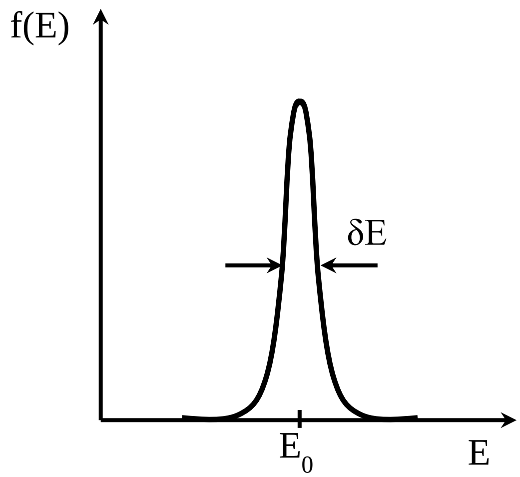


Рисунок 3.1 – Графік функції розподілу ймовірностей мікростанів замкненої системи

Якщо за даних умов систему можна вважати замкненою, то її стан може бути описаний за допомогою функції густини ймовірності, що використовується для опису мікроканонічного ансамблю Гіббсу, і будь-який макропараметр такої системи може бути знайдений як середній по фазовому об’єму за формулою:

$$A_{макр} = \overline{A_Г} = \int\limits_Г AC\delta(E - E_0)dГ \tag{3.3}$$

Це перший спосіб знаходження макроскопічних величин замкненої системи, який називається обчислення через функцію розподілу.

Константу нормування C знаходять з умови нормування функції розподілу:

$$\int_{\Gamma} f(E)d\Gamma = 1 \tag{3.4}$$

Знайдемо вираз для константи нормування C, а також нормувального дільника для мікроканонічного ансамблю Гібса:

$$\int_{\Gamma} C\delta(E-E_0)d\Gamma = C\int_{\Gamma} \delta(E-E_0)\frac{\partial \Gamma}{\partial E}dE = 1 \tag{3.5}$$

Скористаємось фільтруючою властивістю δ-функції:

$$\int F(x)\delta(x-x_0)dx = F(x_0) \tag{3.6}$$

В результаті вираз (3.5) набуде такого вигляду:

$$C\int_{\Gamma} \delta(E-E_0)\frac{\partial \Gamma}{\partial E}dE = C\frac{\partial \Gamma}{\partial E}\Big|_{E_0} = 1 \tag{3.7}$$

Звідси запишемо вираз для константи нормування C (рівність 3.8), а також нормувального дільника (рівність 3.9) для мікроканонічного ансамблю Гібса:

$$C = \frac{1}{\frac{\partial \Gamma}{\partial E}\Big|_{E_0}} \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial E}\Big|_{E_0} \tag{3.9}$$

Фундаментальною величиною, яка дозволяє встановити зв'язок між статистичною фізикою і термодинамікою, являється ентропія. Нехай дана замкнена система, що описується мікроканонічним ансамблем, займає в фазовому просторі об'єм Г. Тоді величина

$$\sigma(E) = \ln \Gamma(E) \tag{3.10}$$

називається статистичною ентропією, яка має такі ж властивості, що й термодинамічна ентропія:

1. Статистична ентропія – величина адитивна ($\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$);

2. Для статистичної ентропії виконується закон зростання (dσ >= 0);

3.Зміна статистичної ентропії не залежить від системи одиниць, в якій відбуваються вимірювання.

Чим більшим є фазовий об'єм, який займає мікроканонічний ансамбль, тим більшим є спектр можливих значень енергії системи і тим більшою є невизначеність відносно значення енергії в даний момент часу. Тому ентропія – це міра невизначеності наших знань про систему або міра хаотичності (невпорядкованості) системи. зв'язок між статистичною і термодинамічною ентропією:

$$S = k\sigma \tag{3.11}$$

Будь-яку макроскопічну величну замкненої системи можна розрахувати другим способом – через статистичну ентропію:

1. Знайти фазовий об'єм системи

$$\Gamma = \int dq_1 ... dq_{3N} \int dp_1 ... dp_{3N} \tag{3.12}$$

2. Знайти ентропію системи

$$\sigma = \ln \Gamma \tag{3.13}$$

3. Будь-яку макроскопічну величину $A_{макр}$ знаходимо по формулі

$$A_{макр} = \tau \frac{\partial \sigma}{\partial a} \tag{3.14}$$

де a –відповідна узагальнена координата.

Реальні системи, як правило, обмінюються енергією із зовнішнім середовищем і знаходяться в тепловій рівновазі з ним, тому називаються ізотермічними і описуються канонічним розподілом Гібса. Розглянемо ізотермічну систему з постійною кількістю частинок. Функція розподілу канонічного ансамблю Гібса має вигляд:

$$f(E) = e^{\frac{\psi - E}{\tau}} = e^{\frac{\psi}{\tau}} \cdot e^{\frac{-E}{\tau}} = C \cdot e^{\frac{-E}{kT}} \tag{3.15}$$

Макроскопічні (термодинамічні) величини ізотермічної системи можна знаходити двома способами: за допомогою функції розподілу канонічного ансамблю Гібса або за допомогою статистичного інтегралу. Будь-який макропараметр ізотермічної системи може бути знайдений як середній по фазовому об’єму за формулою (І спосіб – через функцію розподілу):

$$A_{макр} = \overline{A}_{\Gamma} = \int_{\Gamma} A \cdot e^{\frac{\psi - E}{\tau}} d\Gamma \tag{3.16}$$

Будь-який макропараметр ізотермічної системи може бути знайдений за допомогою статистичного інтегралу (ІІ спосіб – через статистичний інтеграл):

1. Знайти статистичний інтеграл:

$$Z = \int_{\Gamma} e^{-\frac{E}{\tau}} d\Gamma \tag{3.17}$$

2. Знайти термодинамічний потенціал вільної енергії:

$$\psi \equiv F = -\tau \ln Z \tag{3.18}$$

3. Знайти будь-який термодинамічний параметр системи за формулою:

$$A_{макр} = -\frac{\partial \psi}{\partial a} \tag{3.19}$$

де А – це узагальнена сила, а – узагальнена координата.

Наприклад, вираз для середньої енергії ізотермічної системи можна знайти за виразом:

$$\overline{E} = \tau^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial \tau} \tag{3.20}$$

3.2. Приклади розв’язку задач

Задача 3.1. Знайти фазовий об'єм і нормувальний дільник ідеального газу, що містить N частинок та займає об'єм V.

Розв'язок. Запишемо елемент фазового об'єму для системи, що складається з N-частинок:

$$d\Gamma = dq_1 \cdot dq_2 ... dq_{3N} \cdot dp_1 \cdot dp_2 ... dp_{3N} \tag{1}$$

Для того, щоб знайти величину фазового об'єму, який займає дана система, слід провести інтегрування:

$$\Gamma = \int_q dq_1 \cdot dq_2 ... dq_{3N} \int_p dp_1 \cdot dp_2 ... dp_{3N} \tag{2}$$

В згорнутому вигляді вираз (2) можна записати наступним чином:

$$\Gamma = \Gamma(q) \cdot \Gamma(p) \tag{3}$$

Приймемо до уваги, що дана система – ідеальний газ, тобто газ, в якому немає взаємодії між частинками і немає місце впливу зовнішніх полів, а тому потенціальна енергія в такій системі дорівнює нулю, а повна енергія системи дорівнює лише кінетичній енергії:

$$H = E_k + E_n = E_k + 0 = E_k \tag{4}$$

Отже, імпульсний підпростір фазового простору – є енергетичним, а координатний підпростір не вносить свій вклад в енергію системи. Тому випишемо окремо вираз для координатного підпростору і проінтегруємо по всіх координатах:

$$\Gamma(q) = \int_q dq_1 \cdot dq_2 ... dq_{3N} = \int dx_1 \cdot dy_1 \cdot dz_1 \cdot \int dx_2 \cdot dy_2 \cdot dz_2 \cdot ... \cdot \int dx_n \cdot dy_n \cdot dz_n = V \cdot V \cdot ... \cdot V = V^N \tag{5}$$

Кожний з цих інтегралів являє собою об'єм, що його обійде кожна з N частинок з плином часу, а цей об'єм дорівнює об'єму V, що його займає ідеальний газ.

Знайдемо об'єм імпульсного підпростору, що його займає дана система Г(p). Оскільки імпульсний підпростір – енергетичний, то він являє собою гіпер-сферу, кожна точка якої являє собою фазову точку з певним значенням енергії. Запишемо вираз для знаходження об'єму гіпер-сфери:

$$\Gamma(p) = \int_p dp_1 \cdot dp_2 ... dp_{3N} = C_{3N} R^{3N} = \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma(\frac{3N}{2}+1)} R^{3N} \tag{6}$$

Знайдемо вираз для радіусу гіпер-сфери через енергію системи. Для цього запишемо вираз для кінетичної енергії системи, що складається з N частинок:

$$E_k(p) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + ... + \frac{p_{3N}^2}{2m} \tag{7}$$

Домножимо ліву і праву частину рівності на 2m:

$$2mE_k(p) = p_1^2 + p_2^2 + ... + p_{3N}^2 = R^2 \tag{8}$$

Права частина рівності по суті являє собою рівняння гіпер-сфери. Звідси можна записати:

$$2mE_k(p) = R^2 \tag{9}$$

Виразимо радіус гіпер-сфери через енергію системи:

$$R = \sqrt{2mE_k(p)} \tag{10}$$

Тепер запишемо, чому дорівнює фазовий об’єм імпульсного підпростору Γ(p):

$$\Gamma(p) = \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma(\frac{3N}{2}+1)} (2mE_k(p))^{\frac{3N}{2}} \tag{11}$$

Звідси повний фазовий об’єм, що його займає ідеальний газ, дорівнює:

$$\Gamma = \Gamma(q) \cdot \Gamma(p) = V^N \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma(\frac{3N}{2}+1)} (2mE_k(p))^{\frac{3N}{2}} \tag{12}$$

Знайдемо нормувальний дільник:

$$\left.\frac{d\Gamma}{dE}\right|_{E_0} = V^N \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma(\frac{3N}{2}+1)}(2m)^{\frac{3N}{2}} E_{k0}^{\frac{3N}{2}-1}(p)\cdot\frac{3N}{2} \qquad (13)$$

Відповідь: фазовий об'єм і нормувальний дільник ідеального газу дорівнює:

$$\Gamma = V^N \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma(\frac{3N}{2}+1)}(2mE_k(p))^{\frac{3N}{2}}$$

$$\left.\frac{d\Gamma}{dE}\right|_{E_0} = V^N \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma(\frac{3N}{2}+1)}(2m)^{\frac{3N}{2}} E_{k0}^{\frac{3N}{2}-1}(p)\cdot\frac{3N}{2}$$

Задача 3.2. Довести, що на кожний квадратичний доданок, що входить у вираз для енергії системи, припадає в середньому енергія kT/2, скориставшись розподілом Гіббса.

Розв'язок. Дана задача може бути розв'язана двома способами – через функцію розподілу та через статистичний інтеграл. Розглянемо обидва способи.

І спосіб: Розв'язок через функцію розподілу

Нехай енергія системи описується рівністю:

$$E = Bp^2 \qquad (1)$$

де B – константа, p – імпульс, що змінюється в межах (-∞;+∞).

Покажемо, що середнє значення енергії такої системи дорівнює $\frac{kT}{2}$

Відомо, що будь-яка мікроскопічна величина може бути розрахована як середня по фазовому об'єму:

$$A_{макр} = \overline{A}_\Gamma = \int_\Gamma A\cdot f(E)d\Gamma \qquad (2)$$

Функція розподілу канонічного ансамблю Гібса в загальному випадку (в ненормованому вигляді) дорівнює:

$$f(E) = C\cdot e^{-\frac{E}{\tau}} \qquad (3)$$

Знайдемо константу нормування С з умови нормування:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(E)d\Gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} C\cdot e^{-\frac{E}{\tau}}d\Gamma = C\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{Bp^2}{\tau}}dp = C\frac{\sqrt{\Pi}}{\sqrt{\frac{B}{\tau}}} = C\sqrt{\frac{\Pi\tau}{B}} = 1 \quad (4)$$

Звідси:

$$C = \frac{1}{\sqrt{\frac{\Pi\tau}{B}}} = \sqrt{\frac{B}{\Pi\tau}} \quad (5)$$

Функція розподілу канонічного ансамблю Гібса в нормованому вигляді для даної системи може бути записана у вигляді:

$$f(E) = \sqrt{\frac{B}{\Pi\tau}}\cdot e^{-\frac{Bp^2}{\tau}} \quad (6)$$

Макроскопічною величиною в даній задачі є середнє значення енергії системи:

$$A_{макр} = \overline{E} = \overline{A}_{\Gamma} = \int_{\Gamma} A\cdot f(E)d\Gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} Bp^2\cdot(\frac{B}{\Pi\tau})^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{Bp^2}{\tau}}dp = \frac{B^{\frac{3}{2}}}{(\Pi\tau)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} p^2 e^{-\frac{Bp^2}{\tau}}dp \quad (7)$$

Скористаємося інтегралом Пуассона II роду:

$$\overline{E} = \frac{B^{\frac{3}{2}}}{(\Pi\tau)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\Pi^{\frac{1}{2}}}{(\frac{B}{\tau})^{\frac{3}{2}}} = \frac{\tau}{2} = \frac{kT}{2} \quad (8)$$

Відповідь: Дійсно, на кожний квадратичний доданок, що входить у вираз для енергії системи, припадає в середньому енергія kT/2.

І І спосіб: Розв'язок через статистичний інтеграл

1. Знайдемо статистичний інтеграл:

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{Bp^2}{\tau}}dp = \frac{\sqrt{\Pi}\cdot\tau^{\frac{1}{2}}}{B^{\frac{1}{2}}} = (\frac{\Pi\tau}{B})^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

2. Знайдемо Ψ, що дорівнює вільній енергії системи:

$$\Psi = \tau \ln Z = \tau \ln\left(\left(\frac{\Pi\tau}{B}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \tag{10}$$

3. Знайдемо середнє значення енергії системи:

$$\overline{E} = \tau^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial \tau} = \tau^2 \frac{\partial}{\partial \tau}(\ln(\frac{\Pi\tau}{B})^{\frac{1}{2}}) = \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial}{\partial \tau}(\ln\tau + \ln\frac{\Pi}{B}) = \frac{\tau^2}{2}\cdot\frac{1}{\tau} = \frac{\tau}{2} = \frac{kT}{2} \tag{11}$$

Відповідь: Дійсно, на кожний квадратичний доданок, що входить у вираз для енергії системи, припадає в середньому енергія kT/2

3.3. Задачі для самостійного розв’язку

Задача 3.3. Записати повну енергію N невзаємодіючих класичних осциляторів. Показати, що на кожну ступінь свободи коливального руху припадає в середньому енергія kT.

Задача 3.4. Записати повну енергію N ідеального газу, що містить N частинок. Показати, що на кожну ступінь свободи поступального руху припадає в середньому енергія kT/2.

Задача 3.5. Знайти фазовий об'єм і нормувальний дільник N класичних невзаємодіючих X осциляторів.

Задача 3.6. Знайти фазовий об'єм і константу нормування N класичних невзаємодіючих Y осциляторів.

Задача 3.7. Знайти фазовий об'єм і нормувальний дільник N класичних невзаємодіючих XY осциляторів.

Задача 3.8. Знайти фазовий об'єм і константу нормування N класичних невзаємодіючих XYZ осциляторів.

4. РОЗПОДІЛ МАКСВЕЛЛА-БОЛЬЦМАНА

4.1. Короткі теоретичні відомості

Розподіл Максвелла-Больцмана – це частковий випадок канонічного розподілу Гіббса, який описує системи, що складаються з великої кількості невзаємодіючих частинок, що рухаються за законами класичної механіки. Вигляд функції розподілу Максвелла-Больцмана наступний:

$$f_{М-Б}(E) = Ae^{-\frac{E_к(p)+E_п(q)}{\tau}} \tag{4.1}$$

Розподіл Максвелла-Больцмана можна подати у вигляді добутку двох незалежних розподілів – розподілу по швидкостям (або імпульсам, розподіл Максвела) (рівність 4.2) та розподілу по координатам (розподіл Больцмана) (рівність 4.3):

$$f_М(p) = A_1 e^{-\frac{p^2}{2mkT}} \tag{4.2}$$

$$f_Б(q) = A_2 e^{-\frac{En(q)}{kT}} \tag{4.3}$$

4.2. Приклади розв’язку задач

Задача 4.1. Використовуючи розподіл Гіббса отримати різні форми розподілу Максвелла, а саме:

а) знайти ймовірність того, що імпульс будь-якої частинки заданої системи лежить в інтервалі [px, px + dpx], [py, py + dpy], [pz, pz + dpz], тобто знайти розподіл Максвелла для імпульсів в прямокутній системі координат, б) знайти ймовірність того, що абсолютна величина імпульсу будь-якої частинки заданої системи лежить в інтервалі [p, p + dp], тобто знайти розподіл Максвелла для імпульсів в сферичній системі координат,

в) знайти ймовірність того, що кінетична енергія будь-якої частинки заданої системи лежить в інтервалі [E, E + d E], тобто знайти розподіл Максвелла для енергії в сферичній системі координат.

Розв'язок 4.1, а). Запишемо ймовірність того, що імпульс будь-якої частинки заданої системи лежить в інтервалі [p_x, p_x+dp_x], [p_y, p_y+dp_y], [p_z, p_z+dp_z], тобто знаходиться в деякому елементі об'єму $dp_xdp_ydp_z$. Згідно означення запишемо вираз для густини ймовірності:

$$dW(p_x, p_y, p_z) = f(p_x, p_y, p_z)dp_xdp_ydp_z \tag{1}$$

Звідси функція $f(p_x,p_y,p_z)$ і є шукана функція розподілу Максвелла для імпульсу в прямокутній системі координат. Знайдемо аналітичний запис та графічне представлення цієї функції. З канонічного розподілу Гіббса відомо, що функція розподілу Максвелла має наступний вигляд:

$$f_M(E) = Be^{-\frac{E_{кін}}{\tau}} \tag{2}$$

Запишемо цю функцію через імпульси, врахувавши, що в задачі розглядається 1 частинка:

$$f_M(p_x, p_y, p_z) = Be^{-\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m\tau}} \tag{3}$$

Знайдемо константу B із умови нормування:

$$\int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int f_M(p_x, p_y, p_z)dp_xdp_ydp_z = 1 \tag{4}$$

$$\int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int Be^{-\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m\tau}}dp_xdp_ydp_z = 1 \tag{5}$$

$$B\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{p_x^2}{2m\tau}}dp_x\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{p_y^2}{2m\tau}}dp_y\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{p_z^2}{2m\tau}}dp_z=1 \tag{6}$$

Кожний із наведених інтегралів є інтегралом Пуассона I роду, тому можна записати в наступному вигляді:

$$B\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{p^2}{2m\tau}}dp\right)^3=1 \tag{7}$$

$$B\cdot\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\left(\frac{1}{2m\tau}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^3=1 \tag{8}$$

$$B\cdot(2\pi m\tau)^{\frac{3}{2}}=1 \tag{9}$$

$$B=\frac{1}{(2\pi m\tau)^{\frac{3}{2}}} \tag{10}$$

Запишемо функцію Максвелла в нормованому вигляді:

$$f_M(p_x,p_y,p_z)=\frac{1}{(2\pi m\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m\tau}} \tag{11}$$

Побудуємо функцію розподілу Максвелла графічно, розглянувши одновимірний випадок:

$$f_M(p_x)=\frac{1}{(2\pi m\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{p_x^2}{2m\tau}} \tag{12}$$

Дана функція (12) являє собою криву Гаусса, графік якої наведено на рис.4.1.

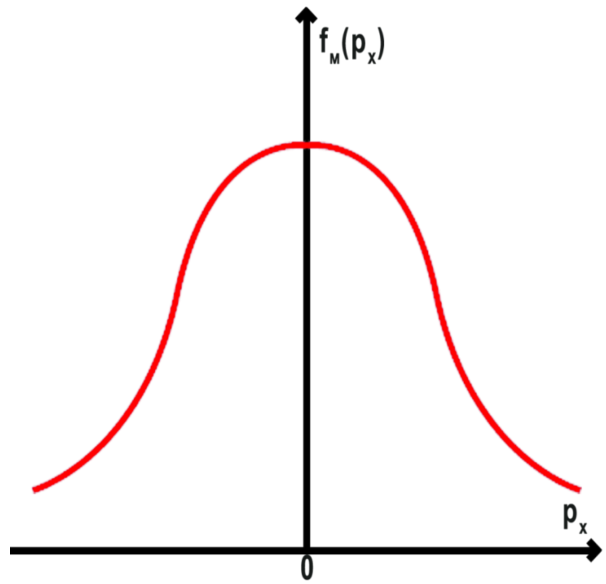


Рисунок 4.1 – Графік функцію розподілу Максвелла для імпульсів в прямокутній системі координат (одновимірний випадок)

Відповідь до 4.1,а): функція розподілу Максвелла для імпульсів в прямокутній системі координат має наступний вигляд:

$$f_M(p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{(2\pi m\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m\tau}}$$

Розв'язок 4.1, б). Запишемо ймовірність того, що або величина імпульсу будь-якої частинки заданої системи лежить в інтервалі [p, p+dp], тобто знаходиться в деякому елементі об'єму dV, що являє собою об'єм шару кулі і дорівнює:

$$dV = 4\pi p^2 dp \tag{13}$$

Цей вираз записаний з відомого математичного виразу елементарного об'єму в сферичній системі координат:

$$dV = 4\pi r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi \tag{14}$$

В даній задачі радіус-вектором є імпульс, що знаходиться в інтервалі [p, p+dp] незалежно від його напрямку, тобто в об'ємі кульового шару. Звідси густина ймовірності має наступний вигляд:

$$dW = f(p)dV = Ae^{-\frac{p^2}{2m\tau}} 4\pi p^2 dp = f_{сф}(p)dp \tag{15}$$

Звідси функція $f_{сф}(p)$ і є шукана функція розподілу Максвелла для імпульсу в сферичній системі координат. Знайдемо аналітичний запис та графічне зображення цієї функції:

$$f_{сф}(p) = A4\pi p^2 e^{-\frac{p^2}{2m\tau}} \tag{16}$$

Знайдемо константу A з умови нормування:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{сф}(p)d\Gamma = 1 \tag{17}$$

$$4\pi A\int_{0}^{\infty} p^2 e^{-\frac{p^2}{2m\tau}} dp = 1 \tag{18}$$

Даний інтеграл являє собою інтеграл Пуассона ІІ роду, однак межі інтегрування в задачі є іншими (нижня межа починається з «0» а не з «-∞»), тому результат інтегрування треба зменшити вдвічі:

$$A \cdot 4 \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot 2(\frac{1}{2m\tau})^{\frac{3}{2}}} = 1 \tag{19}$$

$$A \cdot (2m\pi\tau)^{\frac{3}{2}} = 1 \tag{20}$$

$$A = \frac{1}{(2m\pi\tau)^{\frac{3}{2}}} \tag{21}$$

Запишемо функцію Максвелла в нормованому вигляді:

$$f_{сф}(p) = (2m\pi\tau)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4\pi \cdot p^2 e^{-\frac{p^2}{2m\tau}} \tag{22}$$

Зобразимо функцію Максвелла (22) графічно (рис. 4.2):

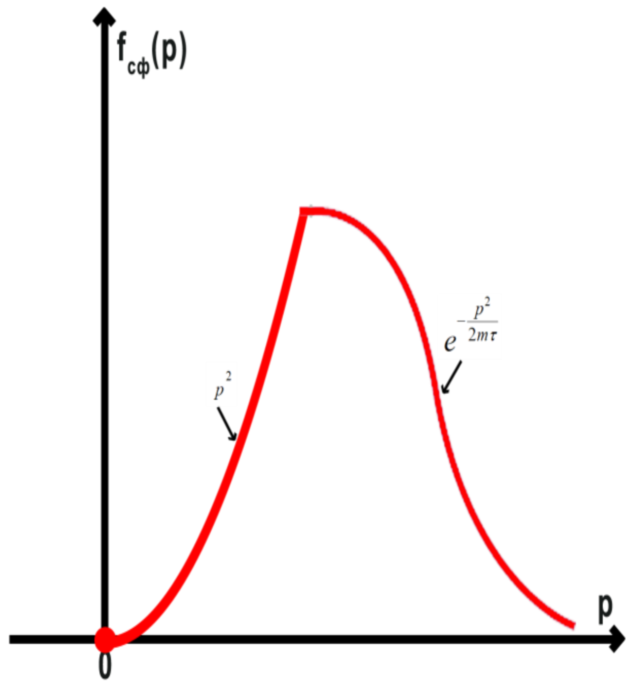


Рисунок 4.2 – Графік функцію розподілу Максвелла для імпульсів в сферичній системі координат

За малих значень імпульсу більш сильною функцією буде степенева (p^2), а за більших значень імпульсу – гауссіана $e^{-\frac{p^2}{2m\tau}}$ Тому графік шуканої функції $f_{сф}(p)$ буде складатися з двох частин – гілки-параболи і напівгауссіани.

Відповідь 4.1,б): функція розподілу Максвелла для імпульсів в сферичній системі координат має наступний вигляд:

$$f_{сф}(p) = (2m\pi\tau)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4\pi \cdot p^2 e^{-\frac{p^2}{2m\tau}}$$

Розв’язок 4.1, в). Скористаємось розв’язком попередньої задачі ($f_{сф}(p)$ та $dW(p)$) для того, щоб знайти $f_{сф}(E)$ та $dW(E)$:

$$dW(p) = f_{сф}(p)dp = 4\pi(2\pi m\tau)^{-\frac{3}{2}} \cdot p^2 \cdot e^{-\frac{p^2}{2m\tau}} dp$$

В даному виразі здійснюємо перехід від імпульсу до кінетичної енергії по відомій формулі:

$$E_K = \frac{p^2}{2m} \tag{23}$$

$$p = (2mE_K)^{\frac{1}{2}} \tag{24}$$

Звідси:

$$dp = \frac{1}{2}(2m)^{\frac{1}{2}} E_K^{-\frac{1}{2}} dE_K \tag{25}$$

Запишемо ймовірність того, що кінетична енергія будь-якої частинки заданої системи лежить в інтервалі [E, E+dE]:

$$dW(E_K) = 4\pi(2\pi m\tau)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2mE_K \cdot e^{-\frac{E_K}{\tau}} \cdot \frac{1}{2}(2m)^{\frac{1}{2}} \cdot E_K^{-\frac{1}{2}} dE_K =$$

$$= 2^2 \cdot 2^{-\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot \pi^{-\frac{1}{2}} \cdot \tau^{-\frac{3}{2}} \cdot E_K^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{E_K}{\tau}} dE_K = 2\sqrt{\frac{E_K}{\pi\tau^3}} e^{-\frac{E_K}{\tau}} dE_K \tag{26}$$

Звідси випишемо функцію розподілу Максвелла для енергії в сферичній системі одиниць:

$$f_{сф}(E_K) = 2\sqrt{\frac{E_K}{\pi\tau^3}} e^{-\frac{E_K}{\tau}} \tag{27}$$

Відповідь 4.1,в): функція розподілу Максвелла для енергії в сферичній системі координат має наступний вигляд:

$$f_{сф}(E_K) = 2\sqrt{\frac{E_K}{\pi\tau^3}} e^{-\frac{E_K}{\tau}}$$

Задача 4.2. Знайти центр ваги стовпа ідеального газу нескінченної висоти, що знаходиться в полі тяжіння Землі, якщо маса частинок газу m при температурі T.

Розв'язок. Центр тяжіння стовпа – це середнє значення по вертикальній координаті (по висоті). Середнє значення випадкової величини знаходиться по відомій формулі:

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \tag{1}$$

Аналогічно виразу (1) запишемо вираз для висоти:

$$\overline{h} = \int_{-\infty}^{+\infty} h \cdot f(h) dh \tag{2}$$

Оскільки функція розподілу залежить від координати, то слід застосовувати функцію розподілу Больцмана:

$$f_Б(x, y, z) = Be^{-\frac{U(x,y,z)}{\tau}} \tag{3}$$

В даній задачі використано розподіл лише по одній координаті, по висоті, тому вираз (3) дещо спрощується:

$$f_Б(h) = Be^{-\frac{U(h)}{\tau}} \tag{4}$$

Оскільки стовп газу знаходиться в потенціальному полі Землі, то потенціальна енергія у виразі (4) дорівнює:

$$U(h) = mgh \tag{5}$$

Звідси вираз (4) можна записати у вигляді:

$$f_Б(h) = Be^{-\frac{mgh}{\tau}} \tag{6}$$

Знайдемо константу B з умови нормування:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Be^{-\frac{mgh}{\tau}} dh = 1 \tag{7}$$

$$B \cdot e^{-\frac{mgh}{\tau}} \Big|_0^{\infty} \cdot (-\frac{\tau}{mg}) = 1 \tag{8}$$

$$B = \frac{mg}{\tau} \tag{9}$$

Запишемо функцію Больцмана в нормованому вигляді:

$$f_Б(h) = \frac{mg}{\tau} e^{-\frac{mgh}{\tau}} \tag{10}$$

Звідси для знаходження центра ваги стовпа ідеального газу можна записати:

$$\overline{h} = \int_{-\infty}^{+\infty} h \cdot \frac{mg}{\tau} \cdot e^{-\frac{mgh}{\tau}} dh = \frac{mg}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} h \cdot e^{-\frac{mgh}{\tau}} dh \tag{11}$$

Застосуємо метод інтегрування частинами:

$$\overline{h} = \left| \begin{array}{l} U = h \\ dU = dh \\ dV = e^{-\frac{mgh}{\tau}} dh \\ V = -\frac{\tau}{mg} e^{-\frac{mgh}{\tau}} \end{array} \right| = \frac{mg}{\tau} \left[-h \cdot \frac{\tau}{mg} \cdot e^{-\frac{mgh}{\tau}} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{\tau}{mg} \cdot e^{-\frac{mgh}{\tau}} dh \right] = \frac{mg}{\tau} \frac{\tau}{mg} e^{-\frac{mgh}{\tau}} (-\frac{\tau}{mg}) \Big|_0^{\infty} = \frac{\tau}{mg}$$

(12)

Відповідь: центр ваги стовпа ідеального газу нескінченної висоти, що знаходиться в полі тяжіння Землі: $\overline{h} = \frac{\tau}{mg}$

4.3. Задачі для самостійного розв'язку

Задача 4.3. Знайти середнє значення імпульсу, користуючись розподілом Максвелла для імпульсів в сферичній системі координат.

Задача 4.4. Знайти середнє значення квадрату імпульсу, користуючись розподілом Максвелла для імпульсів в сферичній системі координат.

Задача 4.5. Використовуючи розподіл Гіббса отримати різні форми розподілу Максвелла, а саме:

а) знайти ймовірність того, що швидкість будь-якої частинки заданої системи лежить в інтервалі [v_x, $v_x + dv_x$], [v_y, $v_y + dv_y$], [v_z, $v_z + dv_z$], тобто знайти розподіл Максвелла для швидкості в прямокутній системі координат,

б) знайти ймовірність того, що абсолютна величина швидкості будь-якої частинки заданої системи лежить в інтервалі [v, v + dv], тобто знайти розподіл Максвелла для швидкості в сферичній системі координат,

в) знайти ймовірність того, що кінетична енергія будь-якої частинки заданої системи лежить в інтервалі [E, E + dE], тобто знайти розподіл Максвелла для енергії в сферичній системі координат.

Задача 4.6.Знайти середнє значення швидкості, користуючись розподілом Максвелла для швидкості в сферичній системі координат.

Задача 4.7. Знайти середнє значення квадрату швидкості, користуючись розподілом Максвелла для швидкості в сферичній системі координат.

Задача 4.8. Знайти центр ваги стовпа ідеального газу висотою h_0, що знаходиться в полі тяжіння Землі, якщо маса частинок газу m при температурі T.

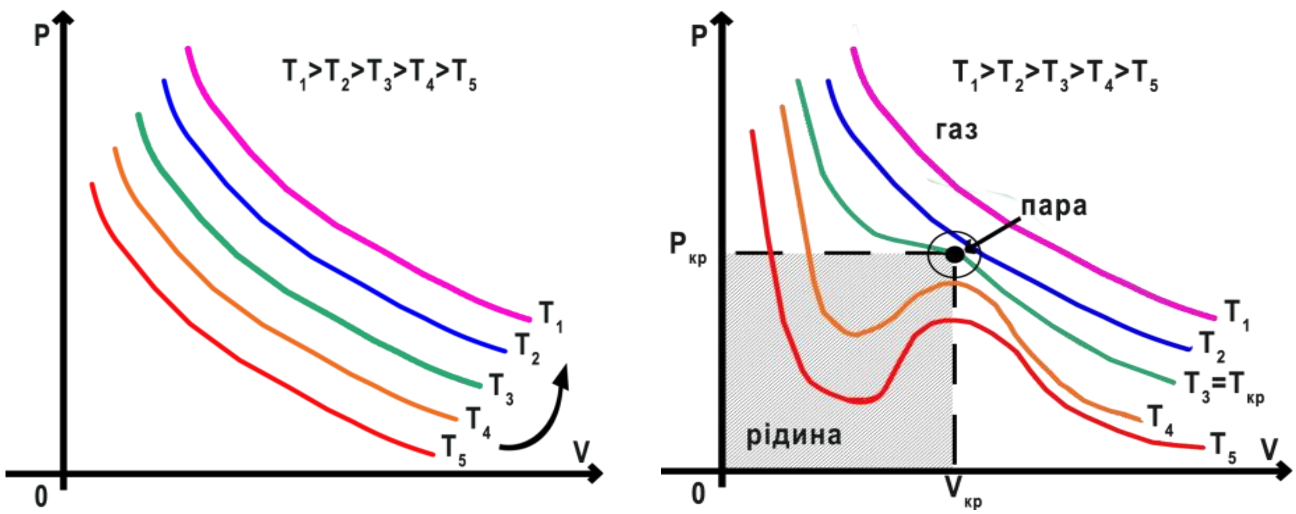
5. РОЗРАХУНОК ІДЕАЛЬНИХ ТА РЕАЛЬНИХ ГАЗІВ

5.1. Короткі теоретичні відомості

Ідеальний газ – це газ частинок, що не взаємодіють між собою і геометричними розмірами яких можна знехтувати. В реальному газі взаємодію молекул та їх розміри слід враховувати. Розглянемо рівняння ідеального (5.1) та реального (5.2) газу та їх графічну побудову (рис.5.1):

$$PV = NkT \tag{5.1}$$

$$(P - \frac{a}{V^2})(V - b) = NkT \tag{5.2}$$



а) б)

Рисунок 5.1 – Графічні залежності стану ідеального (а) та реального (б) газу

За високих температур рівняння реального газу співпадає з рівнянням ідеального газу (вплив поправочних коефіцієнтів a та b мінімальний). За низьких температур через наявність поправочних коефіцієнтів з'являється точка перегину, вище якої речовина знаходиться в газоподібному стані, нижче – в рідкому стані, а в самій точці перетину речовина співіснує в двох формах – рідкій і газоподібній (пара). Координати точки перегину та ізотерма, на якій вперше з'являється точка перегину, отримали назву критичних. Фізичний зміст поправочних коефіцієнтів: b – 4 об'єми однієї молекули, a – усереднений по об'єму потенціал взаємодії молекул газу між собою.

Взаємодія між молекулами реального газу має складний характер, однак її описують рядом відомих функцій. Однією з найпоширеніших функцій є потенціал Сазерленда. Розглянемо взаємодію двох частинок.

а)

б)

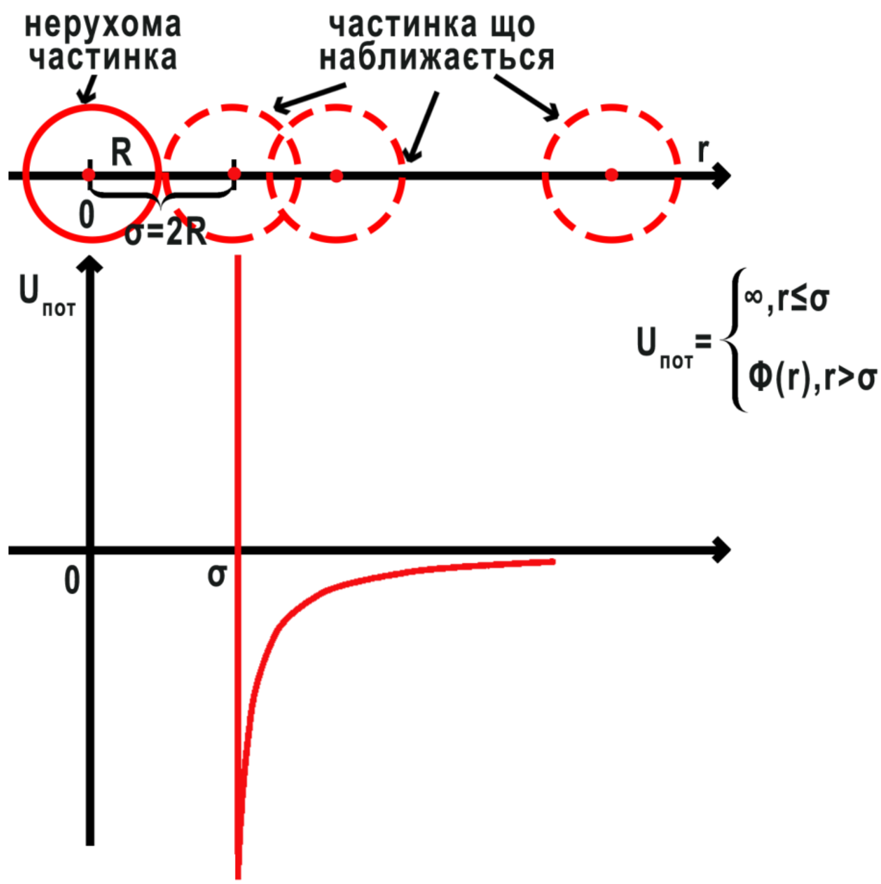


Рисунок 5.2 – Схематичне зображення двох частинок, що взаємодіють (а), та графічна залежність потенціалу Сазерленда (б), який описує дану взаємодію

Нехай одна з них буде нерухомою і помістимо її в початок координат, а інша буде поступово наближатись до першої частинки. По мірі наближення між частинками будуть виникати сили притягання Ван-дер-Ваальса. При цьому потенціальна енергія буде обернено пропорційна відстані між ними. В точці σ=2R починають діяти сили відштовхування і $U_{пот} \to \infty$

Аналітичний запис потенціалу Сазерленда:

$$U(r) = \begin{cases} \infty, r < D \\ -\dfrac{a}{r^n}, r > D \end{cases}$$

Потенціал Сазерленда описує модель твердих непроникних куль, які притягуються по степеневому закону. При n=6 потенціал Сазерленда описує Ван-дер-Ваальсівську взаємодію, тобто взаємодію двох індукованих диполів.

5.2. Приклади розв'язку задач

Задача 5.1. Довести, що для всіх газів рівняння Ван-дер-Ваальса може бути подано у вигляді:

$$\left(\pi + \frac{3}{w^2}\right)(3w-1) = 8\tau$$

це так зване зведене рівняння Ван-дер-Ваальса або закон відповідних станів, де

$$\pi = \frac{P}{P_{кр}} \qquad \tau = \frac{T}{T_{кр}} \qquad \mathrm{w} = \frac{V}{V_{кр}}.$$

Розв'язок. $P_{кр}$, $T_{кр}$ та $V_{кр}$ – це критичні параметри, за яких газ переходить в рідину і навпаки, тобто це координати точки перетину кривої, для якої справедлива рівність нулю першої та другої похідних. З рівняння Ван-дер-

Ваальса для реального газу (5.2) виразимо p=f(V), а також запишемо першу та другу похідну від тиску по об'єму:

$$(P-\frac{a}{V^2})(V-b)=NkT \tag{1}$$

$$\frac{dp}{dV}=0 \tag{2}$$

$$\frac{d^2p}{dV^2}=0 \tag{3}$$

Розв'яжемо утворену систему рівнянь (4):

$$\begin{cases} P=\dfrac{NkT}{V-b}+\dfrac{a}{V^2} \\ \dfrac{dp}{dV}=-\dfrac{NkT}{(V-b)^2}-\dfrac{2a}{V^3}=0 \\ \dfrac{d^2p}{dV^2}=\dfrac{2NkT}{(V-b)^3}+\dfrac{6a}{V^4}=0 \end{cases} \tag{4}$$

Випишемо окремо два рівняння з системи (4):

$$\begin{cases} \dfrac{NkT}{(V-b)^2}=-\dfrac{2a}{V^3} \\ \dfrac{2NkT}{(V-b)^3}=-\dfrac{6a}{V^4} \end{cases} \tag{5}$$

Розділимо почленно перше рівняння на друге в системі (5):

$$\frac{(V-b)}{2}=\frac{V}{3} \tag{6}$$

$$3V-3b=2V \tag{7}$$

$$V=3b \tag{8}$$

Це значення є критичним, бо виводилось із рівності «0» похідних, тому:

$$V_{кр} = 3b \tag{9}$$

Підставимо вираз (9) в перше рівняння системи (5), щоб одержати вираз для $T_{кр}$:

$$\frac{NkT_{кр}}{(3b-b)^2} = -\frac{2a}{(3b)^3} \tag{10}$$

$$\frac{NkT_{кр}}{4b^2} = -\frac{2a}{27b^3} \tag{11}$$

$$NkT_{кр} = -\frac{8b^2a}{27b^3} = -\frac{8a}{27b} \tag{12}$$

$$T_{кр} = -\frac{8a}{27bNk} \tag{13}$$

Підставимо одержані вирази (9) та (13) для $T_{кр}$ та $V_{кр}$ у I рівняння системи (4) і знайдемо вираз для $P_{кр}$:

$$P_{кр} = -\frac{Nk8a}{27bNk(3b-b)} + \frac{a}{9b^2} = -\frac{8a}{54b^2} + \frac{a}{9b^2} = \frac{-8a+6a}{54b^2} = \frac{-2a}{54b^2} = -\frac{a}{27b^2} \tag{14}$$

$$P_{кр} = -\frac{a}{27b^2} \tag{15}$$

Згідно позначень в умові задачі маємо:

$$P = \pi P_{кр} \qquad T = \tau T_{кр} \qquad V = \omega V_{кр} \tag{16}$$

Підставимо вирази (16) у I рівняння системи (4):

$$(\pi P_{кр} - \frac{a}{\omega^2 V_{кр}^2})(\omega V_{кр} - b) = Nk\tau T_{кр} \tag{17}$$

Замість критичних параметрів у вираз (17) підставимо вирази для них, одержані вище (9, 13, 15):

$$(\pi(-\frac{a}{27b^2}) - \frac{a}{\omega^2 9b^2})(\omega 3b - b) = Nk\tau(-\frac{8a}{Nk27b}) \tag{18}$$

$$(-\frac{a}{27b^2})(\pi+\frac{3}{\omega^2})b(3\omega-1)=(-\frac{a}{27b})\tau\cdot 8 \qquad (19)$$

Розділимо ліву і праву частину рівності (19) на $(-\frac{a}{27b})$

Після алгебраїчних перетворень рівність (19) набуває наступного вигляду:

$$(\pi+\frac{3}{\omega^2})(3\omega-1)=8\tau \qquad (20)$$

Що і потрібно було довести.

Відповідь. Для всіх газів рівняння Ван-дер-Ваальса може бути подано у вигляді $(\pi+\frac{3}{\omega^2})(3\omega-1)=8\tau$

Задача 5.2. Статистичне рівняння Ван-дер-Ваальса збігається з реальним рівнянням Ван-дер-Ваальса за умови, що $\beta=\frac{2a}{kT}-2b$. Довести, що при цьому b=4v_0 та $\frac{2a}{kT}=-\overline{U}_{вз}$, тобто встановити фізичний зміст складових у виразі для β.

Розв'язок. Величина β вводилася при розрахунках реальних газів як інтеграл від функції, що враховує взаємодію між частинками газу, в сферичній системі координат, а саме:

$$\beta=4\pi\int_0^\infty f(r)r^2dr \qquad (1)$$

де $f(r)=e^{-\frac{U_{вз}}{\tau}}-1$

Нехай потенціал взаємодії між частинками описується потенціалом Сазерленда. Підставимо його у вираз (1):

$$\beta=4\pi\int_0^\infty (e^{-\frac{U_{вз}}{\tau}}-1)r^2dr=4\pi\int_0^\sigma (e^{-\frac{\infty}{\tau}}-1)r^2dr+4\pi\int_\sigma^\infty (e^{-\frac{\Phi(r)}{\tau}}-1)r^2dr=$$

$$=-4\pi\frac{r^3}{3}\bigg|_0^\sigma+4\pi\int_\sigma^\infty (e^{-\frac{\Phi(r)}{\tau}}-1)r^2dr \qquad (2)$$

Оскільки за кімнатної температури $\frac{\Phi(r)}{\tau} << 1$, то експоненту можна розкласти в ряд:

$$e^{-\frac{\Phi(r)}{\tau}} = 1 - \frac{\Phi(r)}{\tau} + ... \tag{3}$$

Обмежимся першим членом розкладу у виразі (3), знехтувавши іншими членами ряду в силу їх малості.

Звідси вираз для β має наступний вигляд (врахуємо при цьому, що σ=2R):

$$\beta = -\frac{4\pi\sigma^3}{3} + 4\pi\int_\sigma^\infty (1 - \frac{\Phi(r)}{\tau} - 1) r^2 dr = -8 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 - 4\pi\int_\sigma^\infty \frac{\Phi(r)}{\tau} r^2 dr =$$

$$= -8 \cdot V_0 - \int_\sigma^\infty \frac{\Phi(r)}{\tau} \ 4\pi r^2 dr = = -8 \cdot V_0 - \frac{V}{\tau} \cdot \frac{1}{V}\int_\sigma^\infty \Phi(r) dV = -8V_0 - \frac{V}{\tau}\overline{U}_{взаєм} = \frac{2a}{\tau} - 2b$$

(4)

Співставимо почленно одержаний в задачі вираз для β (4) із виразом для β, заданим умовою задачі:

$$-8V_0 = -2b \tag{5}$$

$$b = 4V_0 \tag{6}$$

$$-\frac{V}{\tau}\overline{U}_{взаєм} = \frac{2a}{\tau} \tag{7}$$

$$\frac{2a}{V} = -\overline{U}_{взаєм} \tag{8}$$

Відповідь. Фізичний зміст параметру b – дорівнює чотирьом об'ємам молекули газу, параметр a – дорівнює усередненому по об'єму потенціалу взаємодії молекул газу між собою.

5.3. Задачі для самостійного розв'язку

Задача 5.3. Ідеальний газ розташований в посудині, яка закрита рухомим поршнем, навантаженим масою М. Визначити рівняння стану такого газу.

Задача 5.4. Вивести закон Дальтона для суміші n ідеальних газів $p = \sum_{i=1}^{n} p_i$ де p_i – парціальний тиск.

6. РОЗРАХУНОК ТЕПЛОЄМНОСТІ ТВЕРДОГО ТІЛА

6.1. Короткі теоретичні відомості

Теплоємність – це фізична величина, яка визначає кількість теплоти, яку треба надати твердому тілу для зміни його температури на один градус:

$$C_v = (\frac{\partial \overline{E}}{\partial T})_V \tag{6.1}$$

Нехай кристал складається із N елементарних комірок, тобто найменших структурних одиниць, які повторюючись у просторі, повністю відтворюють структуру кристалу. В кожній комірці знаходиться по одному атому. Коливання кожного атома можна розглядати як результат коливання трьох взаємно перпендикулярних осциляторів (рух атома в декартовій системі координат розкладається на три взаємно перпендикулярних рухи – вздовж осі X, Y, Z). В результаті взаємодії атомів потенціальне поле кристалу являє собою сукупність потенціальних ям поблизу кожного атома. Іншими словами, кожний атом рухаються в потенціальній ямі, яка створена сусідніми атомами. Тому атоми можна вважати невзаємодіючими осциляторами. Конфігурації ям для всіх атомів, крім поверхових, одинакові. Звідси випливає, що в стані рівноваги всі атоми повинні коливатися з однаковим частотним спектром.

Оскільки на кожний ступінь свободи коливального руху припадає в середньому енергія kT, а ступенів свободи 3N, то внутрішня енергія кристалу в класичному наближенні буде дорівнювати 3NkT, а теплоємність відповідно:

$$C_v = \frac{\partial U}{\partial T} = 3Nk \tag{6.2}$$

Рівність (6.2) виражає емпіричний закон Дюлонга-Пті .

Але такий підхід виявився справедливим тільки в області високих температур. В області ж низьких температур теплоємність знижується і наближається до нуля. Розходження теорії з експериментом, як показав А. Ейнштейн, обумовлено в першу чергу знехтуванням квантування коливальної енергії. А. Ейнштейн в своїй теорії розглядав тверде тіло як систему 3N невзаємодіючих гармонічних осциляторів, які коливаються з однаковою частотою, але не класичних, а квантових. Енергія одномірного квантового осцилятора дорівнює:

$$E_i = h\nu\left(i + \frac{1}{2}\right) \tag{6.3}$$

де ν – частота коливань, h – постійна Планка, i – квантове число осцилятора, що дорівнює 0, 1, 2, 3,…

Розрахунок показав, що теорія теплоємності Ейнштейна в області високих температур співпадає з емпіричним законом Дюлонга-Пті. В області високих температур теплоємність описується наступним співвідношенням:

$$C_v = 3N\frac{(h\nu)^2}{kT^2}\frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}}\right)^2} = 3N\frac{(h\nu)^2}{kT^2}e^{-\frac{h\nu}{kT}} \tag{6.4}$$

У виразі (6.4) є добуток степеневої та експоненціальної функцій. В області малих значень температури більш сильною є експоненціальна функція. Звідси видно, що при прямуванні температури до нуля, теплоємність також прямує до нуля, причому по експоненціальному закону.

Загальний хід температурної залежності теплоємності по Ейнштейну якісно узгоджується з експериментом. Однак, точне вимірювання показало, що в області низьких температур теплоємність зростає не по експоненціальному закону, а пропорційно T^3. Виявилось, що основним недоліком теорії А.Ейнштейна було припущення, що всі атоми коливаються з однаковою частотою. Більш точна теорія теплоємності була запропонована нідерландським вченим П. Дебаєм.

Згідно теорії Дебая, в твердому тілі існують акустичні і оптичні коливання. За акустичних коливань елементарна комірка зміщується як єдине ціле, тобто як суцільне середовище без деформацій. Таких коливань елементарної комірки може бути три: одне повздовжнє і два поперечних.

За оптичних коливань мають місце відносні коливання атомів в елементарній комірці при цьому центр мас комірки залишається нерухомим. Кількість оптичних коливань в комірці дорівнює 3n-3. Це випливає з того, що всього в комірці, що містить n атомів, можливими є 3n коливань, з них 3 акустичні, а всі інші – оптичні коливання. Однак оптичні коливання збуджуються при достатньо високих температурах, тому теплові властивості твердого в області низьких температур в основному визначаються акустичними коливаннями.

Розглянемо тверде тіло, в елементарну комірку якого входить один атом. Тверде тіло утворюється за рахунок сильної потенціальної взаємодії між атомами і тому якщо якийсь атом (а отже, елементарна комірка, що містить даний атом) під дією теплового збудження починає зміщуватися в певному напрямку, то в силу електростатичного зв'язку він зміщує сусідній атом (комірку), що зміщує сусідній і т.д. Збудження буде передаватися від одного атома до іншого і по кристалу будуть розповсюджуватися акустичні хвилі. В результаті відбиття цих пружних хвиль від гранів кристала в останньому установиться система стоячих хвиль.

В результаті тверде тіло являє собою складну систему (сукупність) зв'язаних коливань, середню енергію яких потрібно знайти, щоб розрахувати теплоємність. Однак цю задачу прямим чином розв'язати практично неможливо, тому в математиці вдаються до наближених методів, за допомогою яких система зв'язаних коливань заміняється на систему незалежних осциляторів, як і в теорії Ейнштейна. Однак відмінність полягає в тому, що являє собою осцилятор в цих двох теоріях.

В теорії Ейнштейна осцилятор – це реальний атом, що здійснює коливання. В теорії Дебая осцилятор – це група атомів, що коливаються з однаковою частотою і масою, рівною масі 1 атома. Такі коливання називаються нормальними коливаннями. Виявляється, що будь-яке коливання фізичної системи можна подати у вигляді суперпозиції різних нормальних коливань. Таким чином, зв'язані коливання атомів в кристалі математично можна подати у вигляді набору 3N незалежних квантових лінійних осциляторів із відповідними частотами ν_k і масою, що дорівнює масі одного атому.

Розрахунок показав, що теорія теплоємності Дебая в області високих температур співпадає з емпіричним законом Дюлонга-Пті та теорією Ейнштейна. В області високих температур теплоємність описується наступним співвідношенням:

$$C_v = \frac{\partial \overline{E}(T)}{\partial T} = \frac{12}{5}\pi^4 Nk\frac{T^3}{T_D} \tag{6.5}$$

Це відповідає експериментальній залежності теплоємності твердого тіла в області низьких температур. На практиці розмежування області високих та низьких температур здійснюється по температурі Дебая: область високих температур $T>T_D$, область низьких температур $T<T_D/10$.

6.2. Приклади розв'язку задач

Задача 6.1. Знайти теплоємність N квантових невзаємодіючих двовимірних осциляторів. Покласти, що система ізотермічна (завдання на теорію теплоємності Ейнштейна).

Розв'язок. Знайдемо статистичну суму 1 осцилятора (k-ого):

$$Z_k = \sum_i e^{-\frac{E_i}{kT}} = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\frac{h\nu(i+\frac{1}{2})}{kT}} = e^{-\frac{h\nu}{2kT}} \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\frac{h\nu i}{kT}} \tag{1}$$

Використаємо формулу для суми нескінченної геометричної прогресії:

$$S = \frac{a_1}{1-q} \tag{2}$$

де a_1 – перший член геометричної прогресії, а q – знаменник прогресії.

$$Z_k = \frac{e^{-\frac{h\nu}{2kT}}}{1-e^{-\frac{h\nu}{kT}}} \tag{3}$$

Знайдемо середню енергію 1 осцилятора:

$$\overline{E}_k = \tau^2 \frac{\partial \ln Z_k}{\partial \tau} = \tau^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \ln\left(e^{-\frac{h\nu}{2\tau}} \frac{1}{1-e^{-\frac{h\nu}{\tau}}} \right) = \tau^2 \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\ln\left(e^{-\frac{h\nu}{2\tau}}\right) - \ln\left(1-e^{-\frac{h\nu}{\tau}}\right)\right) =$$

$$= \tau^2 \frac{\partial}{\partial \tau}\left(-\frac{h\nu}{2\tau} - \ln\left(1-e^{-\frac{h\nu}{\tau}}\right)\right) = \tau^2\left(\frac{h\nu}{2\tau^2} + \frac{1}{1-e^{-\frac{h\nu}{\tau}}} e^{-\frac{h\nu}{\tau}} \frac{h\nu}{\tau^2}\right) =$$

$$= \frac{h\nu}{2} + \frac{h\nu}{1-e^{-\frac{h\nu}{\tau}}} e^{-\frac{h\nu}{\tau}} = \frac{h\nu}{2} + \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{\tau}}-1} = E_k(0) + E_k(T) \tag{4}$$

Перший доданок у виразі (4) дорівнює енергії квантового осцилятора при температурі абсолютного нуля, тобто, виявляється, що навіть за температури абсолютного нуля квантовий осцилятор, на відміну від класичного, буде здійснювати коливання і матиме певну середню енергію. Другий доданок у виразі (4) характеризує енергію квантового осцилятора за температури, відмінної від нуля.

Знайдемо середню енергію всієї системи:

$$\overline{E} = 3N\overline{E}_k = \frac{3Nh\nu}{2} + \frac{3Nh\nu}{e^{\frac{h\nu}{\tau}}-1} \tag{5}$$

Знайдемо теплоємність всієї системи:

$$C_{\nu} = \frac{\partial \overline{E}}{\partial T} = 0 + \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{3Nh\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\right) = 3Nh\nu \frac{-1}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^2} e^{\frac{h\nu}{kT}} \frac{-h\nu}{kT^2} = 3N\frac{(h\nu)^2}{kT^2}\frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^2} \quad (6)$$

Проаналізуємо отриманий результат в області низьких та високих температур.

В області високих температур, коли $kT \gg h\nu \rightarrow \frac{h\nu}{kT} \ll 1$ можемо розкласти експоненту у виразі (6) в ряд, обмежившись першим членом розкладу:

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} = 1 + \frac{h\nu}{kT} + \frac{1}{2}\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 + \cdots \approx 1 + \frac{h\nu}{kT} \quad (7)$$

Звідси теплоємність системи у рівності (6) може бути переписана у вигляді (знехтувавши дробом порівняно з 1 у чисельнику):

$$C_{\nu} = 3N\frac{(h\nu)^2}{kT^2}\frac{1+\frac{h\nu}{kT}}{\left(1+\frac{h\nu}{kT}-1\right)^2} = 3N\frac{(h\nu)^2}{kT^2}\left(\frac{kT}{h\nu}\right)^2 = 3Nk \quad (8)$$

Отже, отримано такий самий вираз для теплоємності системи, що і в класичному випадку, тобто теорія теплоємності Ейнштейна в області високих температур співпадає з емпіричним законом Дюлонга-Пті.

В області низьких температур, коли $kT \ll h\nu \rightarrow \frac{h\nu}{kT} \gg 1 \rightarrow e^{\frac{h\nu}{kT}} \gg 1$ теплоємність системи у рівності (6) може бути переписана у вигляді:

$$C_{\nu} = 3N\frac{(h\nu)^2}{kT^2}\frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}}\right)^2} = 3N\frac{(h\nu)^2}{kT^2}e^{-\frac{h\nu}{kT}} \quad (9)$$

В цьому виразі є добуток степеневої та експоненціальної функцій. В області малих значень температури більш сильною є експоненціальна функція.

Звідси видно, що при прямуванні температури до нуля, теплоємність також прямує до нуля, причому по експоненціальному закону.

Відповідь. Теплоємність N квантових невзаємодіючих двовимірних осциляторів описується виразом

$$C_v = 3N\frac{(h\nu)^2}{kT^2}\frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1\right)^2}$$

Задача 6.2. Знайти внутрішню енергію N квантових взаємодіючих тривимірних осциляторів (тверде тіло). Покласти, що система ізотермічна (завдання на теорію теплоємності Дебая).

Розв'язок. Знайдемо статистичну суму одного нормального коливання по аналогії з теорією теплоємності А. Ейнштейна (рівність 3 в задачі 6.1):

$$Z_k = \frac{e^{-\frac{h\nu}{2kT}}}{1-e^{-\frac{h\nu}{kT}}} \tag{1}$$

Статистична сума всього кристалу, враховуючи, що в ньому може мати місце 3N коливань, дорівнює

$$Z = \prod_{k=1}^{3N} Z_k \tag{2}$$

Знайдемо середню енергію всього кристалу. Для цього спочатку отримаємо вираз для lnZ

$$\ln Z = \ln\prod_{k=1}^{3N} Z_k = \sum_{k=1}^{3N}\ln Z_k = \sum_{k=1}^{3N}\ln\frac{e^{-\frac{h\nu_k}{2kT}}}{1-e^{-\frac{h\nu_k}{kT}}} \tag{3}$$

Для розрахунку цієї суми необхідно знати всі частоти нормальних коливань ν_k. Замінимо суму на інтеграл та проведемо інтегрування по всім нормальним частотам кристалу від 0 до ν_{max}.

$$\ln Z = \int_0^{\nu_{\max}} \ln\frac{e^{\frac{h\nu}{2kT}}}{1-e^{-\frac{h\nu}{kT}}}\,dZ(\nu)$$

(4)

$dZ(\nu)$ – кількість коливань в інтервалі частот від ν до ν+dν.

Скориставшись умовою створення стоячих хвиль у трьохвимірному випадку, отримаємо такий вираз для $dZ(\nu)$

$$dZ(\nu) = \frac{9N}{\nu_{\max}^3}\nu^2 d\nu \tag{5}$$

$$\nu_{\max}^3 = \frac{3NC^3}{4\pi V} \tag{6}$$

де C – швидкість акустичної хвилі, V – об'єм тіла.

Підставимо одержаний вираз (5) в інтеграл (4):

$$\ln Z = \int_0^{\nu_{\max}} \ln\frac{e^{-\frac{h\nu}{2kT}}}{1-e^{-\frac{h\nu}{kT}}}\frac{9N}{\nu_{\max}^3}\nu^2 d\nu = \frac{9N}{\nu_{\max}^3}\left(\int_0^{\nu_{\max}} \ln e^{-\frac{h\nu}{2kT}}\nu^2 d\nu - \int_0^{\nu_{\max}}\ln(1-e^{-\frac{h\nu}{kT}})\nu^2 d\nu\right) =$$

$$= \frac{9N}{\nu_{\max}^3}\left(\int_0^{\nu_{\max}} (-\frac{h\nu}{2kT})\ \nu^2 d\nu - \int_0^{\nu_{\max}}\ln(1-e^{-\frac{h\nu}{kT}})\nu^2 d\nu\right) = \frac{9N}{\nu_{\max}^3}\left(\int_0^{\nu_{\max}} (\frac{-h\nu^3}{2kT}) d\nu - \int_0^{\nu_{\max}}\ln(1-e^{-\frac{h\nu}{kT}})\nu^2 d\nu\right) =$$

$$= \frac{9N}{\nu_{\max}^3}\left(\frac{-h\nu_{\max}^4}{8kT} - \int_0^{\nu_{\max}}\ln(1-e^{-\frac{h\nu}{kT}})\nu^2 d\nu\right) = \frac{-9Nh\nu_{\max}}{8kT} - \frac{9N}{\nu_{\max}^3}\int_0^{\nu_{\max}}\ln(1-e^{-\frac{h\nu}{kT}})\nu^2 d\nu \tag{7}$$

Підставимо одержаний вираз (7) у вираз для внутрішньої енергії системи, замінивши у ньому кТ на τ:

$$\overline{E} = \tau^2\frac{\partial \ln Z}{\partial\tau} = \tau^2\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{-9Nh\nu_{\max}}{8\tau} - \frac{9N}{\nu_{\max}^3}\int_0^{\nu_{\max}}\ln(1-e^{-\frac{h\nu}{\tau}})\nu^2 d\nu\right) =$$

$$= \tau^2\left(\frac{-9Nh\nu_{\max}}{-8\tau^2} - \frac{9N}{\nu_{\max}^3}\int_0^{\nu_{\max}}\frac{\nu^2 d\nu}{1-e^{-\frac{h\nu}{\tau}}}\left(-e^{-\frac{h\nu}{\tau}}\right)\left(-\frac{h\nu}{-\tau^2}\right)\right) = \frac{9Nh\nu_{\max}}{8} + \frac{9N}{\nu_{\max}^3}\int_0^{\nu_{\max}}\frac{h\nu^3 e^{-\frac{h\nu}{\tau}}}{1-e^{-\frac{h\nu}{\tau}}}d\nu =$$

(8)

$$= \frac{9Nh\nu_{\max}}{8} + \frac{9N}{\nu_{\max}^3} \int_0^{\nu_{\max}} \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{\tau}} - 1} d\nu = E(0) + E(T)$$

Отже, як і в теорії А. Ейнштейна маємо температурно незалежну і залежну частину внутрішньої енергії такої системи.

Відповідь. Вираз для внутрішньої енергії N квантових взаємодіючих тривимірних осциляторів:

$$\overline{E} = \frac{9Nh\nu_{\max}}{8} + \frac{9N}{\nu_{\max}^3} \int_0^{\nu_{\max}} \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{\tau}} - 1} d\nu = E(0) + E(T)$$

6.3. Задачі для самостійного розв’язку

Задача 6.3. Знайти середню енергію системи, енергія якої змінюється за законом $E=l*E_i$, l=0, 1, 2, 3…. Покласти, що система ізотермічна.

Задача 6.4. Знайти вираз для теплоємності твердого тіла в теорії П.Дебая за низьких та високих температур.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ

До Розділу 1

Задача 1.5: 29%. ***Задача 1.6:*** а) $\frac{9}{25}$; б) $\frac{8}{25}$; в) $\frac{4}{25}$; г) $\frac{12}{25}$. ***Задача 1.7:*** а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{1}{5}$; в) $\frac{1}{25}$; г) $\frac{2}{5}$. ***Задача 1.8:*** $\sqrt{\sigma(x)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$; $\delta(x) = \frac{b-a}{\sqrt{3}(b+a)}$. ***Задача 1.9:*** $\sqrt{\sigma(x)} = \frac{1}{\alpha}$; $\delta(x) = 1$. ***Задача 1.10:*** $\bar{x} = 0$; $\overline{x^2} = \frac{1}{2\alpha}$; $\overline{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2\alpha}$. ***Задача 1.11:*** $\sqrt{\sigma(x)} = \sqrt{\frac{1}{2\alpha}}$; $\delta(x) = \infty$.

До Розділу 2

Задача 2.9: Вказівка – врахувати дію сили пружності. Відповідь – прямокутник з вигнутими бічними стінками. ***Задача 2.10:*** Вказівка – скористатись законом збереження енергії. Відповідь – перевернута парабола з початковою точкою на осі p_z. ***Задача 2.11:*** Вказівка – скористатись законом збереження енергії. Відповідь – перевернута парабола з початковою точкою в початку координат. ***Задача 2.12:*** Вказівка – скористатись виразом для роботи сил електростатичного поля по переміщенню заряду з точки 1 в точку 2 та законом збереження енергії. Відповідь – $p = \pm\sqrt{6mq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$. ***Задача 2.13:*** Вказівка – скористатись виразом для роботи сил електростатичного поля по переміщенню заряду з точки 1 в точку 2 та законом збереження енергії. Відповідь – $p = \pm 4\sqrt{mq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$. ***Задача 2.14:*** Вказівка – знайти гамма-функцію Ейлера від ½, провівши заміну змінних та скориставшись інтегралом Пуассона І роду, далі користуючись основною властивістю гамма-функції Ейлера вивести рекурентну формулу. Відповідь – $\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\frac{(2n-1)\,!!}{2^n}\pi^{1/2}$. ***Задача 2.15:*** $V_6=\frac{\pi^3}{3!}R^6$, $V_7=\frac{2^4\cdot\pi^3}{7\;!!}R^7$. ***Задача 2.16:*** $V_8=\frac{\pi^4}{4!}R^8$, $V_9=\frac{2^5\cdot\pi^4}{9\;!!}R^9$. ***Задача 2.17:*** $V_{10}=\frac{\pi^5}{5!}R^{10}$, $V_{11}=\frac{2^6\cdot\pi^5}{11\;!!}R^{11}$.***Задача 2.18:*** $V_{50}=\frac{\pi^{25}}{25!}R^{50}$, $V_{51}=\frac{2^{26}\cdot\pi^{25}}{51\;!!}R^{51}$. ***Задача 2.19:*** $V_{100}=\frac{\pi^{50}}{50!}R^{100}$, $V_{101}=\frac{2^{51}\cdot\pi^{50}}{101\;!!}R^{101}$.

До Розділу 3

Задача 3.3: Вказівка – записати вираз для повної енергії системи та скористатись тим, що на кожний доданок у цьому виразі припадає енергія kT/2. Відповідь – E=3NkT. ***Задача 3.4:*** Вказівка – записати вираз для повної енергії системи та скористатись тим, що на кожний доданок у цьому виразі припадає енергія kT/2. Відповідь – E=3NkT/2. ***Задача 3.5:*** Вказівка – записати вираз для повної енергії системи та ввести нову змінну a=mωx. Відповідь – $\Gamma=\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^N\frac{E^N}{N!}$, $\frac{\partial\Gamma}{\partial E}\Big|_{E_0}=\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^N\frac{E_0^{N-1}}{(N-1)\,!}$. ***Задача 3.6:*** Вказівка – записати вираз для повної енергії системи та ввести нову змінну b=mωy. Відповідь – $\Gamma=\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^N\frac{E^N}{N!}$, $C=\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^N\frac{(N-1)\,!}{E_0^{N-1}}$. ***Задача 3.7:*** Вказівка – записати вираз для повної енергії системи та ввести нові змінні a=mωx та b=mωy. Відповідь – $\Gamma=\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^{2N}\frac{E^{2N}}{(2N)!}$, $\frac{\partial\Gamma}{\partial E}\Big|_{E_0}=\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^{2N}\frac{E_0^{2N-1}}{(2N-1)\,!}$. ***Задача 3.8:*** Вказівка – записати вираз для повної енергії системи та ввести нові змінні a=mωx, b=mωy, c=mωz. Відповідь – $\Gamma=\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^{3N}\frac{E^{3N}}{(3N)!}$, $C=\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{3N}\frac{(3N-1)\,!}{E_0^{3N-1}}$.

До Розділу 4

Задача 4.3: Вказівка – зробити заміну змінних x=p^2 і виділити у виразі гамма-функцію Ейлера. Відповідь – $\overline{p} = \sqrt{\dfrac{8m\tau}{\pi}}$. ***Задача 4.4:*** Вказівка – зробити заміну змінних x=p^2 і виділити у виразі гамма-функцію Ейлера. Відповідь – $\overline{p^2} = 3m\tau$. ***Задача 4.5: а)*** $f_M\left(v_x, v_y, v_z\right) = \left(\dfrac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT}$ ***; б)*** $f_M(v) = 4\pi\left(\dfrac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}$ ***; в)*** $f_M(E) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi(kT)^3}} e^{-E/kT}\sqrt{E}$. ***Задача 4.6:*** $\overline{v} = \sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m}}$. ***Задача 4.7:*** $\overline{v^2} = \sqrt{\dfrac{3kT}{m}}$. ***Задача 4.8:*** $\overline{h} = \dfrac{\tau}{mg} - \dfrac{h_0}{e^{\frac{mgh_0}{\tau}} - 1}$.

До Розділу 5

Задача 5.3: $\overline{V} = \dfrac{N+1}{p}kT$. ***Задача 5.4:*** Вказівка – скористатись адитивністю гамільтоніана.

До Розділу 6

Задача 6.3: Вказівка – скористатись формулою для розрахунку суми нескінченної геометричної прогресії. Відповідь – $\overline{E} = \dfrac{E_i e^{-\frac{E_i}{kT}}}{1 - e^{-\frac{E_i}{kT}}}$. ***Задача 6.4:*** В області високих температур $C_v = 3Nk$, в області низьких температур $C_v = \dfrac{\partial\overline{E}(T)}{\partial T} = \dfrac{12}{5}\pi^4 Nk\dfrac{T^3}{T_D}$.

ДОДАТОК 1. Основні формули та співвідношення

Середнє значення неперервної випадкової величини:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x dW(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Середнє значення квадрату відхилення випадкової величини (дисперсія):

$$\overline{(\Delta x)^2} = \sigma(x) = \overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2$$

Формула для розрахунку інтеграла у методі інтегрування частинами:

$$\int_a^b U dV = UV \Big|_a^b - \int_a^b V dU$$

Розв'язок рівняння руху гармонічного осцилятора без затухання:

$$x = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = A \sin(\omega \cdot t)$$

де x – координата осцилятора вздовж осі X, A – амплітуда коливання, ω – циклічна частота коливання, T – період коливання, t – момент часу.

Розв'язок рівняння руху гармонічного осцилятора із затуханням:

$$x = e^{-\frac{\nu t}{2}} \left[x_0 \cos \omega t + \frac{V_0}{\omega} \sin \omega t \right]$$

де x – координата осцилятора вздовж осі X в довільний момент часу t, ν – постійна затухання, x_0 та V_0 – початкові координата та швидкість осцилятора, ω –циклічна частота коливання, t – момент часу.

Гамма-функція Ейлера:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$$

Основна властивість гамми-функції Ейлера:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

Рекурентна формула для розрахунку гамми-функції Ейлера від будь-якого цілого числа:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Рекурентна формула для розрахунку гамми-функції Ейлера від будь-якого напівцілого числа:

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \pi^{1/2}$$

Формула для розрахунку об'єму n-вимірної сфери:

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cdot R^n$$

Інтеграл Пуассона I роду:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{1/2}}$$

Інтеграл Пуассона II роду:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} x^2 dx = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{3/2}}$$

Формула Стирлінга:

$$N! = \left(\frac{N}{e}\right)^N$$

ПЕРЕЛІК ЛІТЕРАТУРИ

1. Молчанов В.І. Статистична фізика: Підручник. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 192 с.
2. Збірник завдань з термодинаміки та статистичної фізики. Частина 1. Термодинаміка: Навчальний посібник / укл. А.Г. Гах, В.Д. Ходусов, А.С. Наумовець. – Х.: ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2016. – 138 с.
3. Дудик М.В. Термодинаміка і статистична фізика (курс лекцій): Навчальний посібник. – Умань: ПП «Жовтий», 2015. – 132 с.
4. Мартинюк В. В., Жагловська О. М. Статистична фізика: навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2014. – 81 с.
5. Затовський О.В. Статистична фізика і термодинаміка в задачах: Навчальний посібник. – Одеса: Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, 2014. – 244 с.
6. Обуховський В.В., Нетреба А.В. Статистична фізика в задачах: Навчальний посібник. – К.: Вік принт, 2013. – 110 с.
7. Школа О.В. Основи термодинаміки і статистичної фізики: Навчальний посібник. – Донецьк: Юго-Восток, 2009. – 375 с.
8. Казанський В.Б. Статистична фізика та термодинаміка: Навчальний посібник. – Х.: ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2008. – 140 с.
9. Венгер Є.Ф., Грибань В.М., Мельничук О.В. Основи статистичної фізики і термодинаміки: Навчальний посібник. – К: Вища школа, 2004. – 255 с.
10. Королюк С.Л., Мельничук С.В., Валь О.Д. Основи статистичної фізики і термодинаміки: Підручник. – Чернівці: Книги – XXI, 2004. – 348 с.
11. Золотаревская Д.И. Теория вероятностей: задачи с решениями: учебное пособие. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 168 с.

12. Елементи теоретичної фізики. Статистична фізика: Конспект лекцій / укл. М.В. Білоус, О.Ю. Балановська, Н.М. Смірнова. – К.: КПІ, 1996. – 44 с.

13. Гречко Л.Г. Сборник задач по теоретической физике: учебное пособие. – М.: Высшая школа, 1984. – 319 с.

14. Васильев А.М. Введение в статистическую физику. – М.: Высшая школа, 1980. – 271с.

15. Киттель Ч. Статистическая термодинамика. – М.: Наука, 1977. – 335с.

16. Ландау Л.Д. Статистическая физика. – М.: Наука, 1976. – 583с.

17. Ансельм А.И. Основы статистической физики и термодинамики. – М.: Наука, 1973. – 423с.

18. Ноздрев В.Ф., Сенкевич А.А. Курс статистической физики: учебное пособие. – М.: Высшая школа, 1969. – 288 с.