



**Сумський
державний
університет**

Закон всесвітнього тяжіння. Основний закон динаміки обертального руху

Практичне заняття №3



- ▶ **Відскануйте QR-код за допомогою смартфона, пройдіть тестування (0,5 б)**

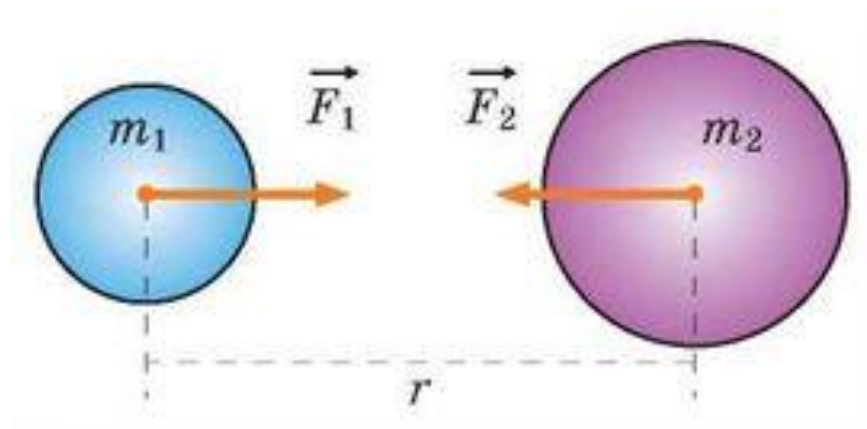


<https://vseosvita.ua/test/start/sfh212>

Закон всесвітнього тяжіння

- Сила притягання між двома тілами (матеріальними точками) прямо пропорційна добутку їхніх мас, і обернено пропорційна квадрату відстані між ними

$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}$$



Основний закон динаміки обертального руху

3.1 Основне рівняння динаміки обертального руху відносно нерухомої осі

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

де \vec{M} - момент сили, що діє на тіло; \vec{L} - момент імпульсу тіла.

Основне рівняння динаміки обертального руху в інтегральній формі (у випадку, коли момент інерції J є константою)

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon},$$

де $\vec{\varepsilon}$ – кутове прискорення.

Основний закон динаміки обертального руху

3.4 Момент інерції матеріальної точки

$$J = mr^2,$$

де m - маса точки; r - відстань до осі обертання.

Момент інерції твердого тіла

$$J = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2,$$

де r_i - відстань елемента маси Δm_i від осі обертання.

Це співвідношення в інтегральній формі має вигляд

$$J = \int r^2 dm.$$

Основний закон динаміки обертального руху

Теорема Штейнера. Момент інерції тіла відносно довільної осі дорівнює

$$J = J_0 + ma^2,$$

де J_0 – момент інерції цього тіла відносно осі, що проходить через його центр тяжіння паралельно заданій осі; a – відстань між осями; m – маса тіла.

Моменти інерції деяких тіл наведені в таблиці

Основний закон динаміки обертального руху

Тіло	Вісь, відносно якої визначається момент інерції	Формула для моменту інерції
Однорідний тонкий стрижень масою m і довжиною l	Проходить через центр тяжіння стрижня перпендикулярно до нього	$J = \frac{ml^2}{12}$
	Проходить через кінець стрижня перпендикулярно до нього	$J = \frac{ml^2}{3}$
Тонке кільце, обруч, труба радіусом R і масою m , маховик радіусом R і масою m , розподіленою вздовж обода	Проходить через центр тяжіння перпендикулярно до площини основи	$J = mR^2$
Круглий однорідний диск (циліндр) радіусом R і масою m	Проходить через центр тяжіння перпендикулярно до площини основи	$J = \frac{mR^2}{2}$
Однорідна куля масою m і радіусом R	Проходить через центр кулі	$J = \frac{2mR^2}{5}$

Моменти інерції деяких тіл

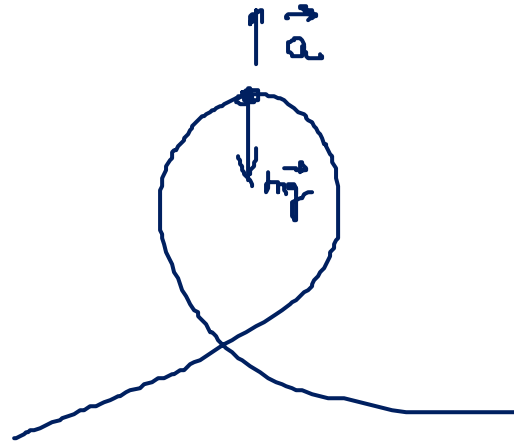
Особливості розв'язування задач

- У загальному випадку задачі з динаміки обертального руху об'єднують два типи задач: задачі на закон всесвітнього тяжіння та задачі на основний закон динаміки обертального руху.
- Перший тип задач розв'язують як і задачі на закони Ньютона.
- Другий тип задач ґрунтується на застосуванні теореми Штейнера.

- **Приклад 1.** Акробат на мотоциклі описує «мертву петлю» радіусом $r = 4$ м. З якою найменшою швидкістю v_{\min} він має пройти верхню точку петлі, щоб не зірватися?

Розв'язання

$$\frac{v_{\min} - ?}{r = 4 \text{ м}}$$



$$\begin{aligned} m\vec{a} &= m\vec{g} \\ ma &= -mg \\ |a| &\geq |g| \end{aligned}$$

$$a = \frac{v^2}{R}$$

$$\frac{v_{\min}^2}{R} \geq g \Rightarrow$$

$$v_{\min} \geq \sqrt{gR}$$

$$v_{\min} = \sqrt{9,8 \cdot 4} = 6,26 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right)$$

- **Приклад 2.** Блок, що має форму диска масою $m = 0,4$ кг, обертається під дією сили натягу нитки, до кінців якої підвішені тягарці масами $m_1 = 0,3$ кг і $m_2 = 0,7$ кг. Визначити сили натягу T_1 і T_2 нитки з обох боків блока.

- **Розв'язання**

$$T_1 - ? \quad T_2 - ?$$

$$m = 0,4 \text{ кг},$$

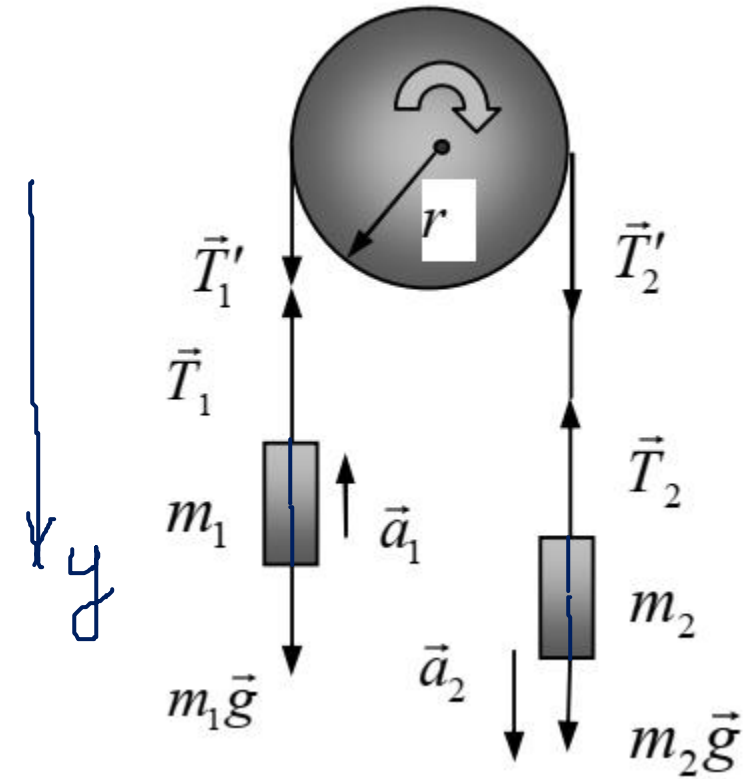
$$m_1 = 0,3 \text{ кг},$$

$$m_2 = 0,7 \text{ кг}.$$

$$a_1 = a_2 = a$$

$$\begin{cases} m_1 \vec{g} + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}_1, \\ m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 g - \underline{T_1} = -m_1 \underline{a_1}, \\ m_2 g - \underline{T_2} = m_2 \underline{a_2}. \end{cases}$$



$$M = J\varepsilon$$

$$M = (T_2^{\uparrow} - T_1^{\uparrow})r$$

$$\varepsilon = \frac{a}{r}$$

$$(T_2^{\uparrow} - T_1^{\uparrow})r = \underline{J} \frac{a}{r}.$$

- **Приклад 2.** Блок, що має форму диска масою $m = 0,4$ кг, обертається під дією сили натягу нитки, до кінців якої підвішені тягарці масами $m_1 = 0,3$ кг і $m_2 = 0,7$ кг. Визначити сили натягу T_1 і T_2 нитки з обох боків блока.

- **Розв'язання**

$T_1 - ?$ $T_2 - ?$	Момент інерції блока дорівнює $J = \frac{1}{2}mr^2$
$m = 0,4$ кг,	Тоді $(T_2 - T_1)r = \frac{1}{2}mr^2 \frac{a}{r}$
$m_1 = 0,3$ кг,	$T_2 - T_1 = \frac{ma}{2}$
$m_2 = 0,7$ кг.	
$a_1 = a_2 = a$	Враховуючи, що $T_2' = T_2$, а $T_1' = T_1$, одержимо $T_2 - T_1 = \frac{ma}{2}$

Розв'яжемо спільно систему трьох рівнянь

$$m_1 g - T_1 = -m_1 a_1$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2$$

$$T_2 - T_1 = \frac{ma}{2}$$



$$a = \frac{T_1 - mg}{m_1}$$

- **Приклад 2.** Блок, що має форму диска масою $m = 0,4$ кг, обертається під дією сили натягу нитки, до кінців якої підвішені тягарці масами $m_1 = 0,3$ кг і $m_2 = 0,7$ кг. Визначити сили натягу T_1 і T_2 нитки з обох боків блока.

- **Розв'язання**

$T_1 - ? \quad T_2 - ?$	$m_2 g - T_2 = m_2 \frac{T_1 - m_1 g}{m_1} \quad \text{або} \quad T_2 = m_2 g - \frac{m_2 (T_1 - m_1 g)}{m_1}.$
$m = 0,4 \text{ кг},$ $m_1 = 0,3 \text{ кг},$ $m_2 = 0,7 \text{ кг}.$ $a_1 = a_2 = a$	<p>Підставимо отриманий вираз у третє рівняння $T_2 - T_1 = \frac{ma}{2}$</p> $m_2 g - \frac{m_2 (T_1 - m_1 g)}{m_1} - T_1 = \frac{m}{2} \frac{T_1 - m_1 g}{m_1}$

$$2(m_1 m_2 g - m_2 T_1 + m_1 m_2 g - T_1 m_1) = m T_1 - m m_1 g,$$

$$4m_1 m_2 g - 2m_2 T_1 - 2m_1 T_1 - m T_1 + m m_1 g = 0,$$

$$\underline{2m_2 T_1} + \underline{2m_1 T_1} + \underline{m T_1} = \underline{4m_1 m_2 g + m m_1 g},$$

- **Приклад 2.** Блок, що має форму диска масою $m = 0,4$ кг, обертається під дією сили натягу нитки, до кінців якої підвішені тягарці масами $m_1 = 0,3$ кг і $m_2 = 0,7$ кг. Визначити сили натягу T_1 і T_2 нитки з обох боків блока.

- **Розв'язання**

$T_1 - ?$	$T_2 - ?$
<hr/>	
$m = 0,4$ кг,	
$m_1 = 0,3$ кг,	
$m_2 = 0,7$ кг.	
$a_1 = a_2 = a$	

$$T_1 = \frac{(4m_1m_2 + mm_1)g}{2m_2 + 2m_1 + m} = \frac{m_1g(4m_1 + m)}{2(m_1 + m_2) + m}.$$

$$T_2 = m_2g - \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{g(4m_1m_2 + mm_1)}{2m_2 + 2m_1 + m} - m_1g \right).$$

$$T_1 = \frac{0,3 \cdot 9,8(4 \cdot 0,3 + 0,4)}{2(0,3 + 0,7) + 0,4} = 1,96(H),$$

$$T_2 = 0,7 \cdot 9,8 - \frac{0,7}{0,3} \left(\frac{0,3 \cdot 9,8(4 \cdot 0,3 + 0,4)}{2(0,3 + 0,7) + 0,4} - 0,3 \cdot 9,8 \right) = 9,15(H).$$

Задача для самостійного розв'язання

- Тонкий однорідний стрижень довжиною $l = 50$ см і масою $m = 400$ г обертається з кутовим прискоренням $\varepsilon = 3$ рад/с² навколо осі, що проходить перпендикулярно до стрижня через його середину. Визначити його обертальний момент M .

Фото розв'язку задачі прикріпити до завдання «ПЗ 2» в Google Classroom до кінця пари +/- (0,5 балів).

У випадку, якщо розв'язок надійде пізніше, оцінювання здійснюється інакше (до 0,3 бали)