Теорема Гауса для вектора напруженості електричного поля. Напруженість електричного поля об’ємно зарядженої кулі

Практичне заняття № 11

Сумський державний університет

Короткі теоретичні відомості

Теорема Остроградського-Гаусса

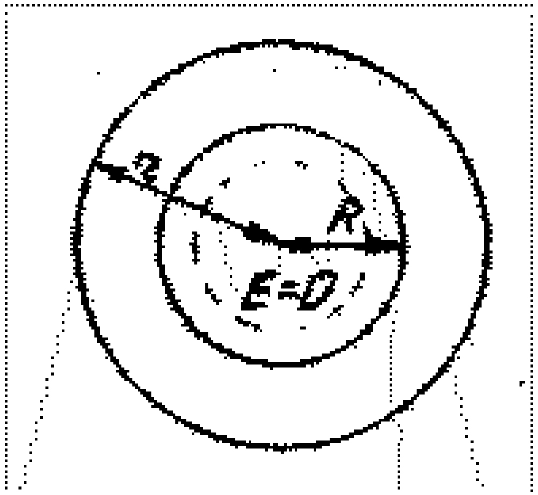
Потік вектора напруженості електростатичного поля у вакуумі через довільну замкнуту поверхню дорівнює алгебраїчній сумі зарядів всередині цієї поверхні

$$N_E = \oint E_n ds = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{k} q_i$$

Короткі теоретичні відомості

Поле сферично зарядженої поверхні

- Поле, створене сферичною поверхнею радіуса *R*, яка заряджена з поверхневою густиною σ буде центральносиметричним. Тобто напрям вектора напруженості в будь-якій точці, що проходить через центр сфери є функцією відстані *R* від центра сфери.



$$E(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \cdot \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Всередині сферичної поверхні з постійною поверхневою густиною поле відсутнє, ззовні даної поверхні поле тотожне з полем точкового заряду тієї ж самої величини, розміщеного в центрі сфери.

Короткі теоретичні відомості

Поле об’ємно зарядженої кулі

- Нехай куля радіусом *R* заряджена з постійною об’ємною густиною заряду *ρ*. Поле в даному випадку володіє центральною симетрією. Для поля зовні кулі маємо той самий результат, що і для сферичної поверхні.

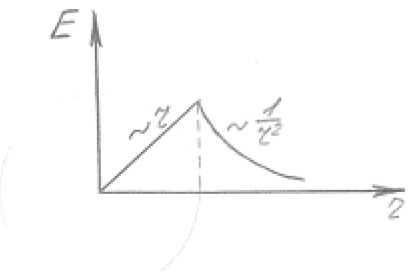
Для точок всередині кулі: $Q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$

Тому теорема Гауса для такої поверхні набуде вигляду: $E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$

Об’ємна густина заряду $\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

$$\boxed{E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R^3}\cdot r}$$

Всередині кулі напруженість зростає лінійно з відстанню *r* до центра, а зовні кулі – спадає із збільшенням відстані *r*



- **Задача 1.** Заряд Q розподілений рівномірно в об'ємі кулі радіуса R. Вважаючи, що діелектрична проникність усюди дорівнює одиниці, знайти потенціал:
а) в центрі кулі; б) усередині кулі як функцію відстані r від його центру.

Розв'язання

$\varphi(r)$, $\varphi(0)$
Q, R

$$\varphi(r)-\varphi(\infty)=\int_r^{\infty}\vec{E}d\vec{r} \qquad \varphi(\infty)=0$$

За теор. Гаусса: $$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\int_S E\cdot dS=E\int_S dS=E\cdot S=E\cdot 4\pi r^2$$

1) $r>R$

$$q=Q$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=q/\varepsilon_0\,,\quad E\cdot 4\pi r^2=Q/\varepsilon_0\,,\quad E=Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$$

2) $r\le R$ $\qquad \rho=\dfrac{Q}{V}=\dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \qquad q=\rho\cdot 4\pi r^3/3=Q\cdot r^3/R^3$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=q/\varepsilon_0\,,\quad E\cdot 4\pi r^2=Q\cdot r^3/(\varepsilon_0\cdot R^3)\,,\quad E=Q\cdot r/(4\pi\varepsilon_0 R^3)$$

- **Задача 1.** Заряд Q розподілений рівномірно в об'ємі кулі радіуса R. Вважаючи, що діелектрична проникність усюди дорівнює одиниці, знайти потенціал:
а) в центрі кулі; б) усередині кулі як функцію відстані r від його центру.

Розв'язання

Потенціал усередини кулі φ(r):

$$\varphi(r)=\int_r^\infty \vec{E}d\vec{r}=\int_r^\infty E dr=\int_r^R E dr+\int_R^\infty E dr=$$

$$=[Q/(4\pi\varepsilon_0 R^3)]\int_r^R r dr+\int_R^\infty [Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)]dr=\frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left[1-\frac{r^2}{3R^2}\right].$$

$$\boxed{\varphi(r)=\frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left[1-\frac{r^2}{3R^2}\right]}$$

Якщо r = 0:

$$\boxed{\varphi(0)=\frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R}}$$

- **Задача 2.** Точковий заряд *q* = 50нКл знаходиться на осі прямого колового циліндру на відстані 5 см від основи. Знайти число силових ліній, які проходять через його бічну поверхню, якщо висота циліндру *h* =10см, а радіус основи *r* = 5см.

Розв'язання

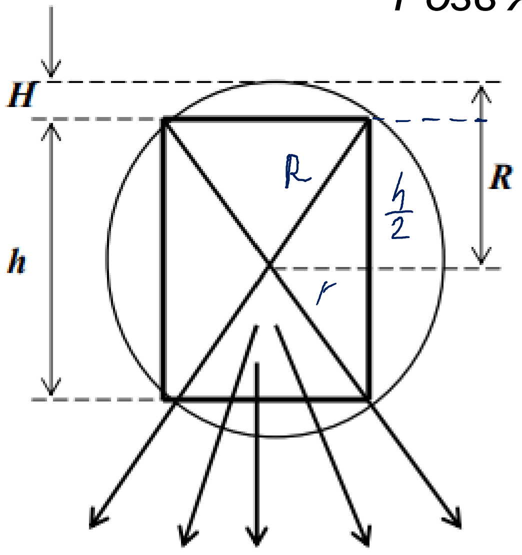
$N_б - ?$

$q = 5\cdot 10^{-8}$ Кл

$l = 0{,}05$ м

$h = 0{,}1$ м

$r = 0{,}05$ м



$$R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}$$

$$N = \oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = E\cdot S = \underline{E\cdot 4\pi R^2}$$

$$N_{осн.} = E\cdot S_{сегм.} = \underline{E\,2\pi R H}$$

$$H = R - \frac{h}{2}. \qquad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$\frac{N}{N_{осн}} = \frac{2R}{H}. \Rightarrow N_{осн} = \frac{NH}{2R}$$

$$N_б = N - 2\cdot N_{осн} = N - \frac{2NH}{2R} = N\left(1 - \frac{H}{R}\right)$$

$$N = \frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{\cancel{R^2}}\cdot\cancel{4\pi R^2} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

- **Задача 2.** Точковий заряд *q* = 50нКл знаходиться на осі прямого колового циліндру на відстані 5 см від основи. Знайти число силових ліній, які проходять через його бічну поверхню, якщо висота циліндру *h* =10см, а радіус основи *r* = 5см.

Розв'язання

$$N = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}\left(1 - \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} - \frac{h}{2}\right).$$

$$N = 4\ кВ/м.$$

Задача для самостійного розв'язання

- Знайти потенціал φ і напруженість поля E в центрі сфери радіуса R, зарядженої однорідно з поверхневою густиною σ.