

Галузь: ФІЗИКА ТА АСТРОНОМІЯ

Назва роботи: **СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ САМОПОДІБНОГО  
РЕЖИМУ РОЗМ'ЯКШЕННЯ ПОВЕРХНІ ЛЬОДУ ПРИ ТЕРТІ**

Шифр: “Самоподібність”

2019 р.

Зміст

<b>ВСТУП</b> .....	<b>3</b>
<b>1 ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД</b> .....	<b>4</b>
1.1 Режими тертя .....	4
1.1.1 Сухе тертя .....	4
1.1.2 Граничне тертя .....	4
1.1.3 Змішане тертя .....	5
1.1.4 Гідродинамічне тертя .....	6
1.2 Походження змащувального рідко подібного шару на льоду .....	7
1.2.1. Танення поверхні .....	7
1.2.2 Плавлення під тиском .....	9
1.2.3 Нагрівання при терті .....	9
<b>2 САМОПОДІБНИЙ РЕЖИМ</b> .....	<b>10</b>
2.1 Основні рівняння.....	10
2.2 Рівняння Ланжевена і Фоккера-Планка .....	11
2.3 Фазова діаграма та розподіл імовірностей .....	13
2.4 Залежність деформації зсуву від температури термостата .....	15
2.5 Часові ряди сили тертя .....	16
<b>ВИСНОВКИ</b> .....	<b>17</b>
<b>ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ</b> .....	<b>18</b>
<b>ДОДАТОК А</b> .....	<b>19</b>

## ВСТУП

Об'єктом дослідження виступає самоподібний режим розм'якшення льоду при терті.

Ціль роботи – ознайомитись з основною літературою для вивчення самоподібного режиму розм'якшення льоду при терті. Дізнатися про режими тертя, які присутні при терті льоду, визначити основні причини появи рідиноподібного шару. Вивести основні рівняння для побудови залежностей. На базі рівнянь побудувати відповідні залежності.

На основі отриманих рівнянь були побудовані: фазова діаграма, розподіл ймовірностей, залежності деформації зсуву від температури термостата, часові ряди сили тертя. Графіки були побудовані в програмному пакеті MatLab. Степеневий закон виявлений для режимів I та SI + MS. Доведена самоподібність часових рядів сил тертя. Дробовий показник не впливає на якісний вигляд фазової діаграми.

# 1 ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД

## 1.1 Режими тертя

Нижче продемонстровані базові концепти сухого, граничного, змішаного та гідродинамічного тертя у відповідності до товщини змащувального шару на льоду.

### 1.1.1 Сухе тертя

Сухе тертя описує ковзаючий контакт двох поверхонь за відсутності будь-якого роду мастильного шару. Тверда поверхня не повністю плоска, але має чіткий профіль поверхні нерівності та хвилі. Коли відбувається контакт двох нерівностей різних поверхонь, клейкі зв'язки хімічної або фізичної природи утворюються між цими нерівностями. Сила, необхідна для розриву зв'язку між нерівностями є тангенціальною силою тертя  $F_T$  [1]

$$F_T = \tau_c A_c, \quad (1.1)$$

де  $\tau_c$  – це сила зсуву, а  $A_c$  – область контакту між поверхнями. Боуден запропонував, щоб площа контакту  $A_c$  між двома поверхнями була прямо пропорційна застосованому навантаженню ( $F_N$ ) і обернено жорсткості матеріалу ( $H$ )

$$A_c = \frac{F_N}{H}. \quad (1.2)$$

Тоді, коефіцієнт тертя

$$\mu = \frac{\tau_c}{H}. \quad (1.3)$$

Таким чином, сухе тертя характеризується роботою необхідною щоб розірвати тверді поверхневі зв'язки. Вона залежить від застосовуваного навантаження і жорсткості поверхонь, але не залежить від швидкості ковзання.

Реальне сухе тертя льоду в атмосферних умовах не може існувати. Навіть при дуже низьких температурах тонка рідиноподібна плівка змащує ковзаючу поверхню. Ця плівка має товщину декількох молекулярних шарів, згідно [1].

### 1.1.2 Граничне тертя

Гранична змащення характеризується мастилом–шар з товщиною лише декількох молекулярних шарів між ковзаючими поверхнями. Граничне змащення на льоді характеризується температурою ( $T$ ) в зоні контакту яка

всюди нижче температури плавлення ( $T_m$ ), а також товщиною мастила рідкого шару ( $h$ ) що є далеко меншою ніж нерівності поверхні ( $R$ ).

Всюди в зоні контакту  $T < T_m$ ,  $h \ll R$ .

Змащувальний рідиноподібний шар пом'якшує контакт між поверхнями. Загалом коефіцієнт тертя в граничного змащення, як правило, нижче, ніж у сухого тертя

### 1.1.3 Змішане тертя

Змішане тертя відбувається, коли температура поверхні підвищується вище за температуру плавлення ( $T_m$ ) льоду в деяких точках в межах зони контакту і товщина рідиноподібного шару ( $h$ ) досі менша характерної нерівності поверхні ( $R$ ).

В деяких точках контактної зони  $T > T_m$ ,  $h < R$ .

У цьому режимі навантаження ковзання частково підтримується нерівностями поверхні і частково змащувальним шаром. Очевидно, що збільшення товщини мастильного шару зменшує зчеплення та посилює змащення. Відповідно, зменшення сили тертя в відношенні з граничним змащенням може бути продемонстрована

$$F_T = A_c * \left[ \alpha \tau_c + (1 - \alpha) \eta \frac{v}{h} \right], \quad (1.4)$$

де  $\alpha$  не змащена частина,  $\tau_c$  – сила зсуву твердого контакту,  $v$  це швидкість ковзання,  $\eta$  це в'язкість, а  $h$  – товщина шару мастила, слідуючи [1].

Однак, одночасно мастило буде капілярно водні мости між нерівностями.

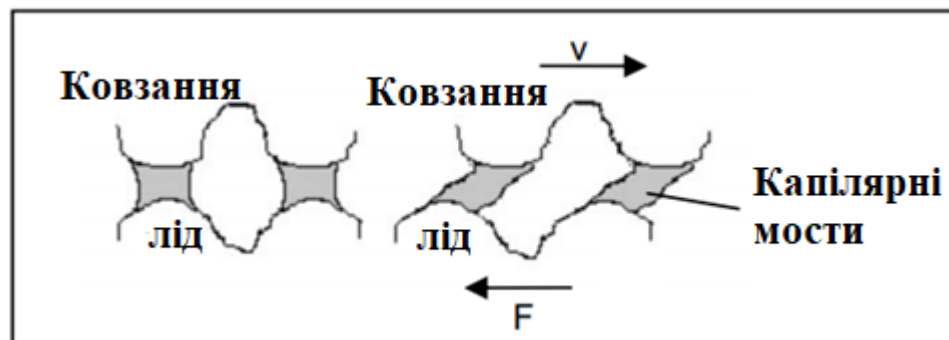


Рис.1.1 Капілярні мости між нерівностями контактних поверхонь при ковзанні

Капілярні мости виконують роль зв'язків між повзунком і поверхні льоду. Однак капілярні мости не підтримують прикладене навантаження. Ці капілярні мости виконують роль рідких зв'язків і додатково опір тертю. Отже, капілярні мости слід враховувати для доповнення рівняння 1.4. Проблема в тому, що не існує ні фізичної, ні експериментальної моделі щоб показати внесок капілярних мостів до сили тертя.

#### 1.1.4 Гідродинамічне тертя

Якщо скрізь у зоні контакту температура вище температури плавлення ( $T_m$ ) і товщина мастильного шару між двома поверхнями більша, ніж висота нерівностей, тертя називається гідродинамічним.

Всюди в зоні контакту  $T > T_m$ ,  $h > R$ .

У цьому режимі тертя мастильний шар, а не нерівності поверхні, несе прикладене навантаження. Якщо навантаження дуже високе, частина змащувального шару між поверхнями може бути витиснута. Однак для гідродинамічного тертя передбачається, що товщина мастильного шару залишається більшою, ніж висота нерівностей. З цього площа контакту ідентична до площі поверхні ковзання ( $A$ ). Під час ковзання не відбувається жодного твердого контакту між поверхнями.

Отже, сила тертя може бути представлена як

$$F_T = \tau_1 A, \quad (1.5)$$

де  $\tau_1$  - сила зсуву змащувального рідиноподібного шару або "ефективне" зсувне напруження, що утворюється з зсуву рідиноподібного шару.

Це можна просто виразити як:

$$\tau_1 = \eta \frac{v}{h}. \quad (1.6)$$

Як і у разі змішаного тертя, капілярні сили повинні бути включені у випадку водного змащення. Фаулер і Бежан з'ясували, що змащувальна плівка під час ковзання на льоду товщає до кінця. Отже, механізми тертя на льоді можуть включати всі види тертя крім чистого сухого тертя. На рисунку 1.2 узагальнено різні режими тертя льоду. Зверніть увагу на падіння коефіцієнта тертя при товщенні плівки в режимі граничного тертя. З іншого боку, коефіцієнт тертя збільшується з товщиною плівки, коли вона стає повністю гідродинамічною, як обговорювалося вище. Відповідно, є оптимальна товщина плівки, що відповідає мінімальному тертю для кожної системи. Також зазначено, що відбувається плавний перехід між різними режимами, позначеними пунктирними лініями [1].

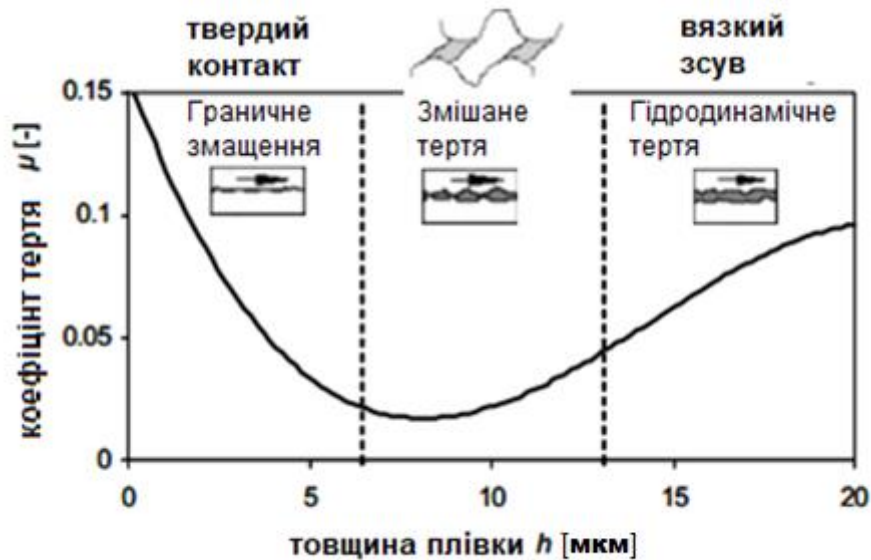


Рис.1.2 Режими тертя льоду, у відповідності до товщини змащувального шару.

## 1.2 Походження змащувального рідко подібного шару на льоду

Опишемо можливі варіанти походження рідиноподібного шару на льоду.

### 1.2.1. Танення поверхні

Фарадей у 1859 року припустив існування рідко подібного шару як невід'ємної частини поверхні льоду. Цей шар існує навіть без контакту з іншим тілом, іншими словами для його існування не потрібне тертя. На його поверхні шестигранна структура льоду розбивається рисунок 1.3.

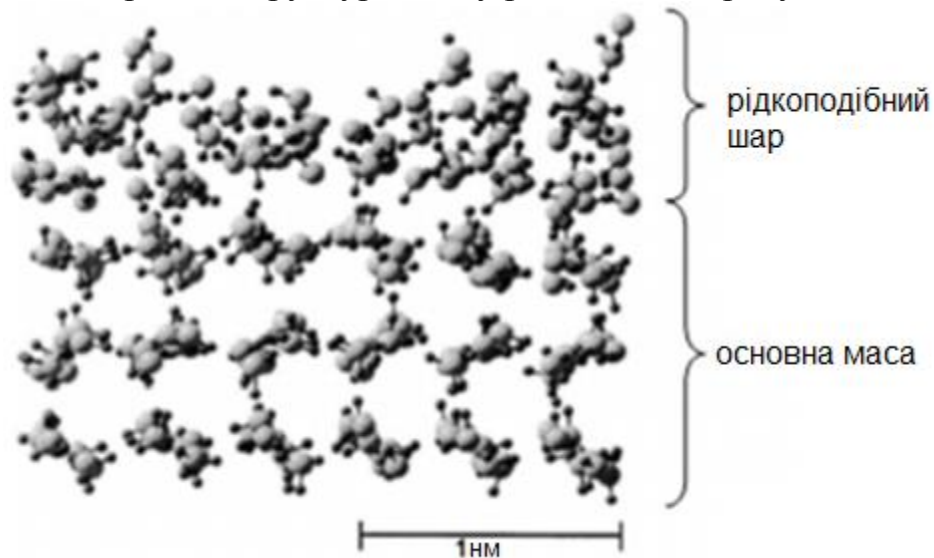


Рис.1.3. Структура поверхні льоду

Експериментальним доказом існування рідко подібного шару було надано різноманітними експериментальними методами. Діапазон температур в яких рідиноподібний шар спостерігався в різних експериментах показує велику варіативність залежно від техніки застосованій рис. 1.4. Тому не дивно, що вчені прийшли до різних висновків щодо загального характеру рідиноподібного шару, а точніше температури початку його формування.

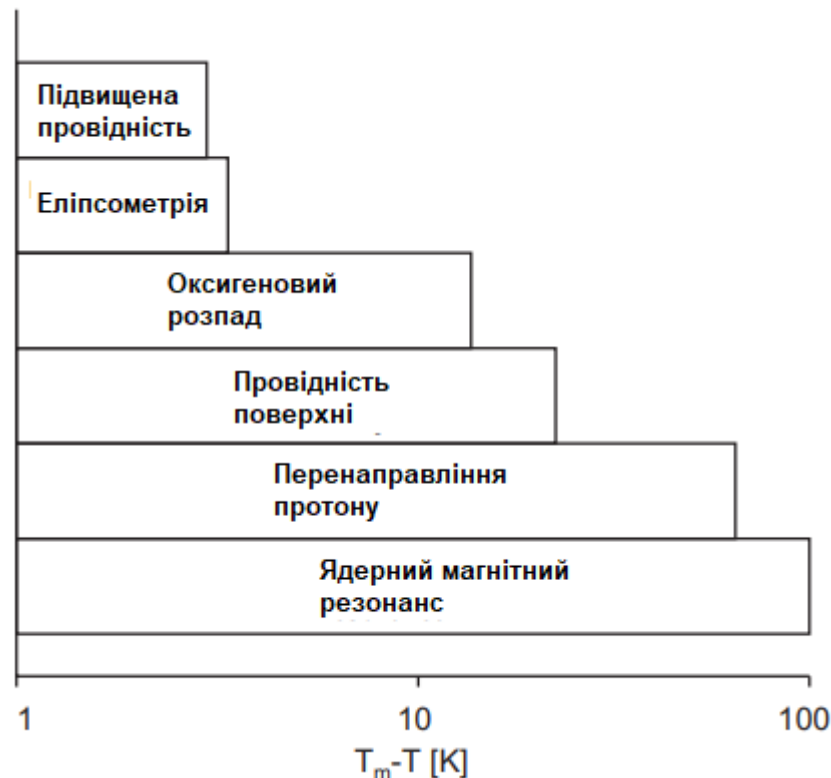


Рис.1.4 Експериментальні методи для дослідження рідиноподібного шару на льоду

Однак, незважаючи на величезну експериментальну базу доказів, наукове пояснення присутності рідиноподібного шару все ще перебуває під дебатами. Нижче наведено деякі з переважних теорій.

Флетчер приписав утворення рідиноподібного шару електростатичній взаємодії, тоді як Лакман і Странські виправдовує існування рідко подібного шару тенденція природи щоб звести до мінімуму енергію системи. Ця теорія мінімізації вільної поверхневої енергії була ще більш розвинена Дешом, Фу та Ветлауфером. Вони стверджували, що система, чия вільна поверхнева енергія інтерфейсу твердої пари  $\gamma_{sv}$  вище ніж сума енергій твердої рідини  $\gamma_{sl}$  і рідини-пари  $\gamma_{lv}$ , "знизить свою вільну енергію шляхом перетворення твердого шару в рідкий "

$$\gamma_{sv} > \gamma_{sl} + \gamma_{lv}. \quad (1.7)$$



Поки ця теорія триває для декількох твердих тіл, експериментальні докази для льоду показують, що вільна поверхнева енергія "сухого" льоду фактично не більша, ніж комбінована енергія поверхні змоченої системи.

### 1.2.2 Плавлення під тиском

Протягом багатьох років плавлення під тиском було варіантом пояснення низького коефіцієнту тертя на льоду. Воно може бути пов'язане з формуванням змащувального шару, але не може пояснити низьке тертя на льоду при низьких температурах. Тиск  $p$  на льоду може бути розрахований

$$\text{як } p = \frac{F_N}{A_c}$$

Основною проблемою у вивченні тертя є розрахунок точної площі контакту  $A_c$ . Оскільки поверхні не є ідеально гладкими, контакт відбувається між певною кількістю нерівностей.

Зважаючи, що лід досить м'який матеріал контактна зона ковзання залежить від прикладеного навантаження. Крім того, це також залежить від температури навколишнього середовища.

### 1.2.3 Нагрівання при терті

На підставі своїх дослідів Боуден і Хьюзб припустили, що нагрівання при терті грає фундаментальну роль в тому, що коефіцієнт тертя на льоду низький. Нагрівання, що виникає під час тертя підвищує температуру в точках контакту до точки плавлення льоду.

Отже, поверхня льоду розплавляється локально у контактних нерівностях, за допомогою яких а утворюється непостійна водна плівка. Ця плівка сприяє для змащення ковзання на льоду. Однак не вся енергія з нагріву при терті доступна для розплавлення Крім того, автори вказують, що змащувальний шар може стати постійним, якщо температура навколишнього середовища близько до температури плавлення льоду. Вони також зазначають, що тертя при  $0^\circ \text{C}$  на мокрому снігу вище, ніж на сухому снігу.

Ефект капілярних мостів не був вивченим у цьому дослідженні і як обговорювалося раніше їх внесок у коефіцієнт тертя може бути значним. На закінчення можна сказати що нагрівання при терті є найважливішим фактором при поясненні низького тертя на льоду.

## 2 САМОПОДІБНИЙ РЕЖИМ

### 2.1 Основні рівняння

Дослідження присвячено визначенню причин тертя стійкості до ковзання при розм'якшенні поверхні льоду. Ця проблема була досліджена з середини 20 ст. Фазові переходи, що виникають на поверхні льоду (і снігу) при терті, доводять свою актуальність як з практичної точки зору (наприклад, катання або катання на льоду), так і в природі (наприклад, рух льодовиків). Показано, що тертя змінюється завдяки появі плівки води між ковзаючими поверхнями. Очевидно, що при русі на поверхні льоду в результаті тертя між двома поверхнями відбувається танення льоду через нагрівання, утворюється шар рідини і відбувається в'язке тертя. Згодом ця ідея набула різноманітних змін, але не з'ясовано, що відіграє важливу роль: танення, повзучість, перелом льоду тощо. Поведінка тонкого розм'якшеного плівки на поверхні льоду сильно впливає на шум, оскільки він має невелику товщину ( $\sim 1$  нм). Вплив флуктуацій завжди відбувається, і в цілому описує різні неоднорідності, дефекти, шорсткість поверхні, температурні коливання, недоліки експериментальної установки, зовнішнього впливу та інші ефекти, які явно не присутні в моделі. Тому раніше отримана модель переходу була розроблена для обліку коливань. У даному дослідженні планується побудувати аналітичні та чисельні схеми експозиції автотельного режиму перед плавленням льодової поверхні та досліджувати фазову діаграму з різними режимами тертя, а також відповідними часовими рядами сили натирання. Запропоновано сукупність кінетичних рівнянь, що визначають взаємно координовану поведінку деформації  $\varepsilon$  і напруги  $\sigma$  зсуву, а також температуру  $T$  у поверхневому льодовому шарі під час тертя. У рівняннях досліджували інтенсивність цих величин шуми  $I_\varepsilon$ ,  $I_\sigma$  та  $I_T$  [2,3]

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{G_\varepsilon}, \sigma_s = \left( \frac{c_p \eta_\varepsilon T_c}{\tau_T} \right)^{\frac{1}{2}}, T_c, (\varepsilon_s / \tau_\varepsilon)^2, \sigma_s^2, T_c^2. \quad (2.1)$$

для величин  $\varepsilon, \sigma, T, I_\varepsilon, I_\sigma$  та  $I_T$ , де  $G_\varepsilon \equiv \frac{\eta_\varepsilon}{\tau_\varepsilon} \equiv G(\omega)|_{\omega \rightarrow 0}$  це розслаблене значення модуля льодового зсуву ( $\omega$  - кругова частота періодичний зовнішній вплив),  $\eta_\varepsilon$  є ефективним значенням зсувної в'язкості  $\eta$ ,  $\tau$  - час релаксації льодової деформації,  $c_p$  - теплоємність,  $T_c$  - характеристична температура,  $\tau_T \equiv l^2 c_p / k$  - час теплопровідності,  $l$  - відстань, до якої тепло проникає в лід,  $k$  - теплопровідність. Пропонуємо запропонувати нелінійний релаксаційний термін деформацій та зворотних зв'язків у цих рівняннях за допомогою дробового показника  $0 < a < 1$ :

$$\tau_\varepsilon \dot{\varepsilon} = -\varepsilon^a + \sigma + I_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \xi_1(t), \quad (2.2)$$

$$\tau_\varepsilon \dot{\sigma} = -\sigma + g(T-1)\varepsilon^a + I_\sigma^{\frac{1}{2}} \xi_2(t), \quad (2.3)$$

$$\tau_T \dot{T} = T_e - T - \sigma\varepsilon^a + I_T^{\frac{1}{2}} \xi_3(t). \quad (2.4)$$

В даному випадку час деформації  $\tau_\sigma$ , константа  $g = G_0/G_\varepsilon < 1$  ( $G_0 \equiv G(T = 2T_c)$  є типовим значенням модуля) та температурою термостата пропонується  $T_e = \tau_T Q$ , де  $Q$  - тепловий струм, що йде від ковзаючого блоку до поверхневого шару. Функція  $\xi_i(t)$  являє собою  $\delta$ -корельоване гаусівське джерело (білий шум), моменти якого задаються:

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = 2\xi_{ij} \delta(t - t'). \quad (2.5)$$

## 2.2 Рівняння Ланжевена і Фоккера-Планка

Основні рівняння для перегляду ефекту адитивного некорельованого шуму штамів  $\varepsilon$  і компонентів стрічки  $\sigma$  і напруги  $\sigma$ , а також температури  $T$ . Експериментальні дані для значень часів релаксації дозволяють застосовувати адіабатичне наближення  $\tau_\varepsilon \gg \tau_\sigma, \tau_T$  і перетворити рівняння (2.3) та (2.4) до форми

$$\sigma(t) = \bar{\sigma} + \tilde{\sigma} \xi_4(t), T(t) = \bar{T} + \tilde{T} \xi_5(t), \quad (2.6)$$

$$\dot{T} = 0 \Rightarrow T = T_e - \sigma\varepsilon^a + I_\sigma^{\frac{1}{2}} \xi,$$

$$\dot{\sigma} = 0 \Rightarrow \underline{\sigma} = g \left( T_e - \underline{\sigma}\varepsilon^a + I_T^{\frac{1}{2}} \xi - 1 \right) \varepsilon^a + I_\sigma^{\frac{1}{2}} \xi,$$

$$\sigma(1 + g\varepsilon^{2a}) = g \left( T_e + I_T^{\frac{1}{2}} \xi - 1 \right) \varepsilon^a + I_\sigma^{\frac{1}{2}} \xi,$$

$$\sigma = \frac{g(T_e - 1)\varepsilon^a}{1 + g\varepsilon^{2a}} + \frac{1}{1 + g\varepsilon^{2a}} \left[ g\varepsilon^a I_T^{\frac{1}{2}} \xi + I_\sigma^{\frac{1}{2}} \xi \right],$$

$$d_a(\varepsilon) = (1 + g\varepsilon^{2a})^{-1}, \quad (2.7)$$

$$\sigma = g(T_e - 1)\varepsilon^a d_a(\varepsilon) + \sqrt{I_\sigma + g^2 \varepsilon^{2a} I_T} d_a(\varepsilon) \xi,$$

$$T = T_e - g(T_e - 1)\varepsilon^{2a} d_a(\varepsilon) - \left[ g\varepsilon^a I_T^{\frac{1}{2}} \xi + I_\sigma^{\frac{1}{2}} \xi \right] \varepsilon^a d_a(\varepsilon) + I_T^{\frac{1}{2}} \xi,$$

$$T = [T_e + T_e g\varepsilon^{2a} - g(T_e - 1)\varepsilon^{2a}] d_a(\varepsilon) + [1 - g\varepsilon^{2a} d_a(\varepsilon)] I_T^{\frac{1}{2}} \xi - \varepsilon^a d_a(\varepsilon) I_\sigma^{\frac{1}{2}} \xi,$$

$$T = [T_e + g\varepsilon^{2a}]d_a(\varepsilon) + \sqrt{\left(\frac{1 + g\varepsilon^{2a} - g\varepsilon^{2a}}{1 + g\varepsilon^{2a}}\right)^2} I_T + \varepsilon^{2a}d_a^2 I_\sigma \xi,$$

$$T = [T_e + g\varepsilon^{2a}]d_a(\varepsilon) + \sqrt{I_T + \varepsilon^{2a}I_\sigma}d_a(\varepsilon)\xi.$$

Видно, що адитивні шуми напружень  $\sigma$  і температури  $T$  в рівняннях. (2.3) та (2.4) стають мультиплікативними. З (2.2), (2.6) та (2.7) рівняння Ланжевена

$$\tau_\varepsilon \dot{\varepsilon} = -\varepsilon^a + g(T_e - 1)\varepsilon^a d_a(\varepsilon) + d_a(\varepsilon) \left[ g\varepsilon^a I_T^{\frac{1}{2}} \xi + I_\sigma^{\frac{1}{2}} \xi \right] + I_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \xi,$$

$$\tau_\varepsilon \dot{\varepsilon} = -\varepsilon^a + g(T_e - 1)\varepsilon^a d_a(\varepsilon) + \sqrt{I_\varepsilon + d_a^2(\varepsilon)[I_\sigma + g\varepsilon^{2a}I_T]} \xi,$$

$$\tau_\varepsilon \dot{\varepsilon} = f_a(\varepsilon) + \sqrt{I_a(\varepsilon)} \xi(t), \quad (2.8)$$

отримується з детерміністичною силою

$$f_a(\varepsilon) = -\varepsilon^a + g\varepsilon^a (T_e - 1)d_a(\varepsilon), \quad (2.9)$$

і ефективна інтенсивність шуму

$$I_a(\varepsilon) \equiv I_\varepsilon + [I_\sigma + I_T(g\varepsilon^a)^2]d_a^2(\varepsilon), \quad (2.10)$$

$\tilde{\sigma}$ ,  $\tilde{T}$  (2.7) та  $I_a(\varepsilon)$  складаються за допомогою властивості дисперсійної адитивності незалежних гаусових стохастичних величин. Помітно, що квадрат амплітуди виразу

$$d_a(\varepsilon) \left[ g\varepsilon^a I_T^{\frac{1}{2}} \xi + I_\sigma^{\frac{1}{2}} \xi \right] + I_\varepsilon^{\frac{1}{2}}. \quad (2.11)$$

Залежно від вибору форми інтерпретації коефіцієнтів дифузії  $f_a(\varepsilon)$  (2.9) та  $I_a(\varepsilon)$  (2.10) рівняння Ланжевена (2.8) має різну форму та фізичний зміст. Незважаючи на широкий спектр існуючих форм розрахунку, підходи Стратоновича (S-форма) та Іто (I-форма) вважаються найбільш виправданими [4,7].

Давайте використовувати розв'язок у S-формі:

$$\frac{\partial P_a(\varepsilon, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon} [f_a(\varepsilon)P_a(\varepsilon, t)] + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [\sqrt{I_a(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \sqrt{I_a(\varepsilon)} P_a(\varepsilon, t)]. \quad (2.12)$$

Стационарна ( $\frac{\partial P(\varepsilon, t)}{\partial t} = 0$ ) щільність імовірності рівняння (2.8) отримуємо з рівняння (2.10)

$$P_a(\varepsilon) = Z^{-1} \exp\{-U_a(\varepsilon)\}, \quad (2.13)$$

де  $Z$  - константа нормалізації і ефектний потенціал

$$U_a(\varepsilon) = \frac{1}{2} \ln I_a(\varepsilon) - \int_0^\varepsilon \frac{f_a(\varepsilon')}{I_a(\varepsilon')} d\varepsilon'. \quad (2.14)$$

Екстремуми для  $P_a(\varepsilon)$  знаходяться з рівняння

$$\begin{aligned} 2a\varepsilon^{a-1}g^2I_T + g2a\varepsilon^{a-1}(gI_T - I_\sigma) &= 0 \Rightarrow \\ d_a^{-3}(\varepsilon) - g(T_e - 1)d_a^{-2}(\varepsilon) - d_a^{-1}(\varepsilon)g^2a\varepsilon^{a-1}I_T + g2a\varepsilon^{a-1}(gI_T - I_\sigma) &= 0, \\ d_a^{-3}(\varepsilon) - g(T_e - 1)d_a^{-2}(\varepsilon) - ga\varepsilon^{a-1}[d_a^{-1}(\varepsilon)gI_T - 2(gI_T - I_\sigma)] &= 0, \\ d_a^{-3}(\varepsilon) - g(T_e - 1)d_a^{-2}(\varepsilon) - ga\varepsilon^{a-1}\{gI_T [d_a^{-1}(\varepsilon) - 2] + 2I_\sigma\} &= 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

### 2.3 Фазова діаграма та розподіл ймовірностей

Характерна фазова діаграма на заданій температурі  $T_e$  зображена на рисунку 2.1, де лінії фіксують межі втрати стабільності.

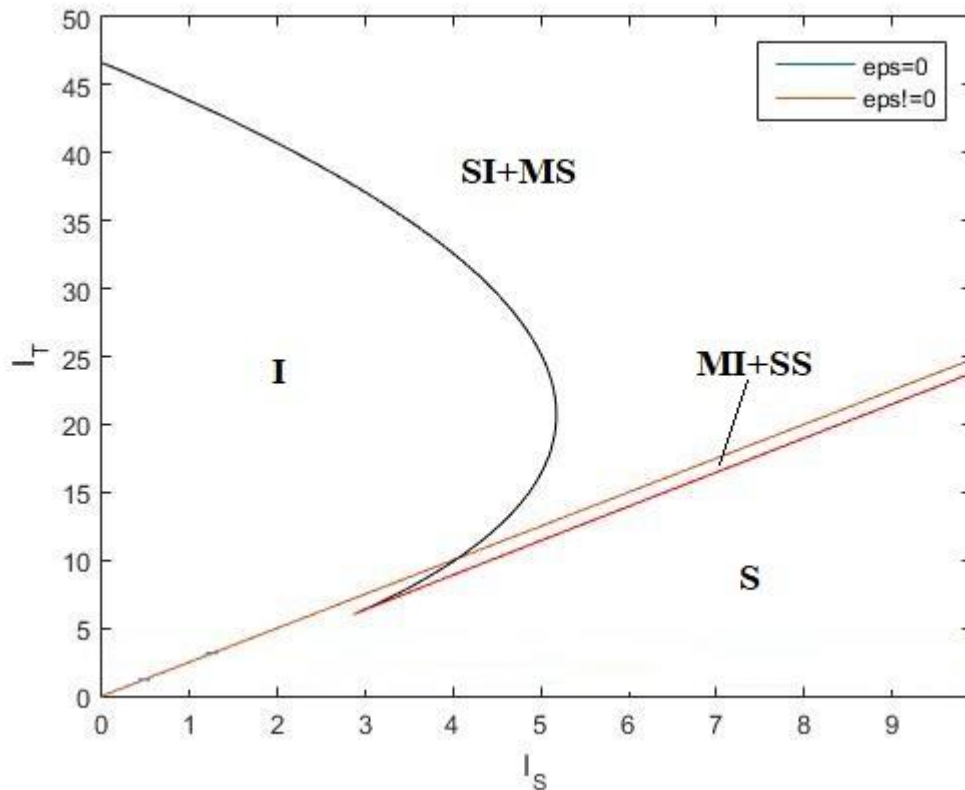


Рис.2.1 Фазова діаграма, де  $g = 0,8$ ,  $T_e = 1,2$ ,  $a = 0,9$  з доменами розм'якшеного льоду (S), льоду (I), стійкого льоду та метастабільного розм'якшеного льоду (SI + MS), а також метастабільного льоду та стабільного розм'якшеного льоду (MI + SS).

Координати прямої лінії, що бере початок а точці (0;0) детермінуються за допомогою рівняння

$$I_T = \frac{2I_\sigma}{g}. \quad (2.16)$$

Лінії показують границі втрати стабільності. В діаграмі показана 4 домени з різними режимами тертя.

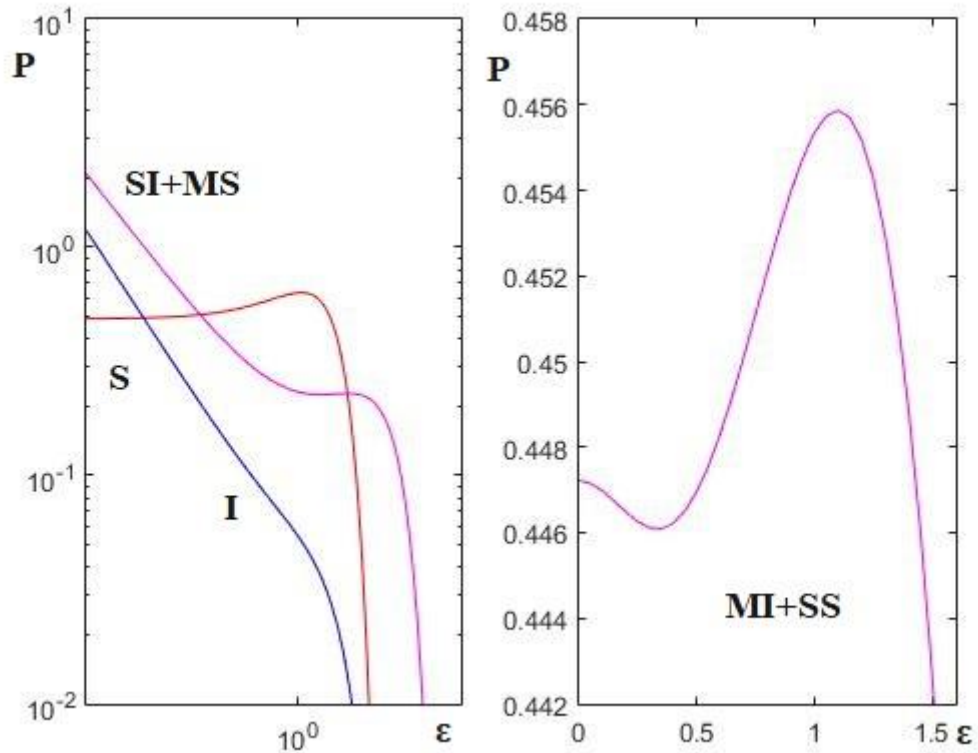


Рис.2.2 Розподіл ймовірностей  $I_\varepsilon = 0$  та режими по точкам: 1 –  $I_\sigma = 4.25$ ,  $I_T = 2$  (S); 2 –  $I_\sigma = 0$ ,  $I_T = 5$  (I); 3 –  $I_\sigma = 0$ ,  $I_T = 55$  (SI + MS), Другий малюнок  $P_a(\varepsilon)$  де  $I_\sigma = 5$ ,  $I_T = 12$  (MI + SS)

Розглянемо залежності  $P_a(\varepsilon)$  (2.13), які є представлені на рисунку 2.2. Звернемо увагу, що отримані результати є чисельно нормалізовані в заданому діапазоні значень  $\varepsilon$ . У загальному випадку, розрахунок константи нормування аналітично неможливо, оскільки розподіл  $\varepsilon = 0$  розходиться. Всі криві на рисунку 4 побудовані в логарифмічних координатах, що дозволяє нам спостерігати формування енергетичної залежності і, відповідно, реалізація самоподібного режиму для  $\varepsilon < \varepsilon_{max}$  [9].

Тут залежність  $P_a(\varepsilon)$  має два максимуми при  $\varepsilon = 0$  та  $\varepsilon \neq 0$ , що відповідає перерваному режиму коли можливі переходи між метастабільним льодом та розм'якшеним льодом.

$P_a(\varepsilon)$  залежність на рисунку 2.2 побудована в логарифмічних координатах. Помітно, що криві I та SI + MS описані степеневим законом.

#### 2.4 Залежність деформації зсуву від температури термостата

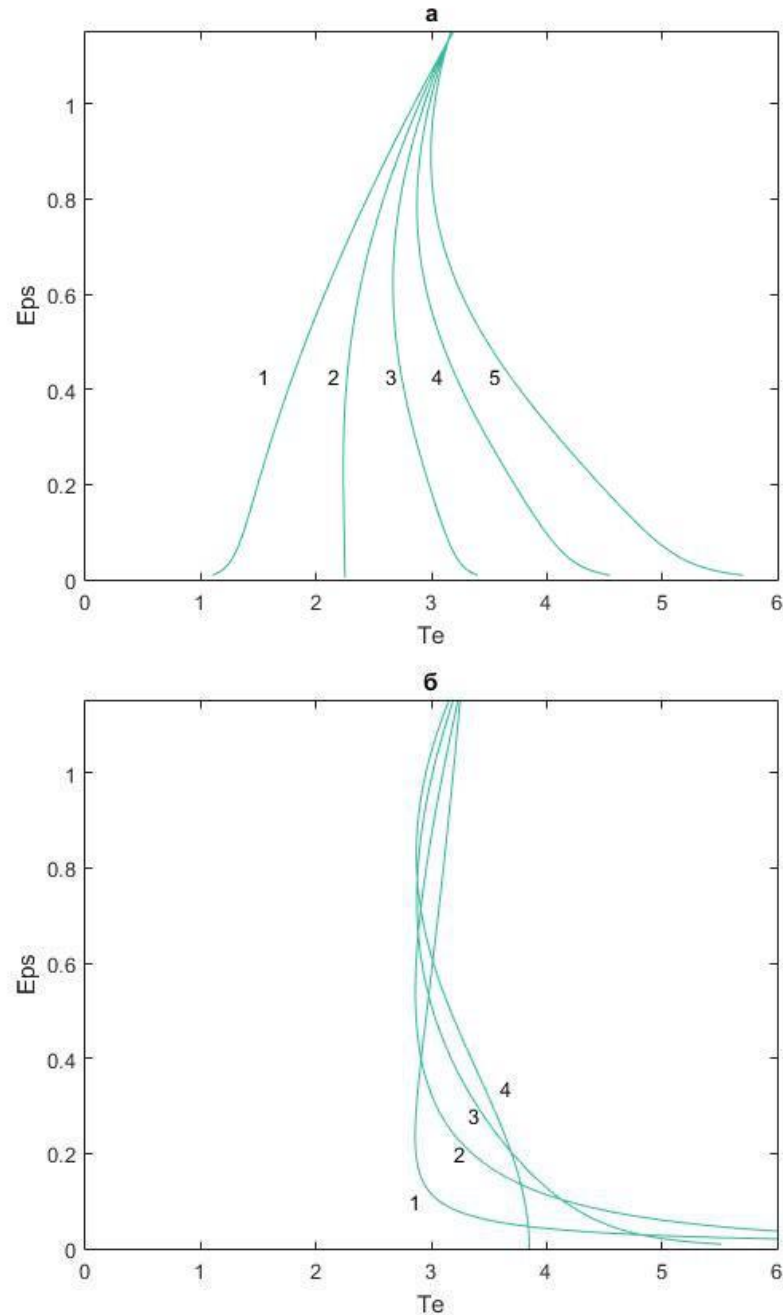


Рис. 2.3 Залежність деформації зсуву від температури для  $g=0.8$   $I_\sigma=0.8$   
 а)  $a=0.9$  та  $I_T=(1)1, (2) 2, (3) 3, (4) 4$  та  $(5) 5$   
 б)  $I_T=4$  та  $a=(1) 0.2, (2) 0.5, (3) 0.8, (4) 1$

З рисунку 2.3 видно, що  $\varepsilon^m$  може бути рівним до нуля тільки при  $a = 1$  або  $I_T = \frac{2I_\sigma}{g}$ . Інакше, якщо  $I_T > \frac{2I_\sigma}{g}$ , а  $a \neq 1$  лінії  $\varepsilon^m(T_e)$  асимптотично йде до нуля і при цьому ефективний потенційний бар'єр спостерігається поблизу точки  $\varepsilon_0 = 0$ . Іншими словами, теж перехід першого порядку відбувається на поверхні льоду плівкою або льодовими умовами. При  $I_T < \frac{2I_\sigma}{g}$ , пом'якшення відбувається, задовольняючи мінімум потенціалу при  $\varepsilon_0 \neq 0$ , оскільки максимум реалізується фізично безглуздому регіоні  $\varepsilon^m < 0$ .

## 2.5 Часові ряди сили тертя

Метод Ейлера:

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \left( f(\varepsilon_i) + \frac{ga\varepsilon^{2a-1}[gl_T(1-g\varepsilon^{2a})-2l_\sigma]}{(1+g\varepsilon^{2a})^3} \right) \Delta t + \sqrt{I(\varepsilon_i)\Delta t}W_i \quad (2.17)$$

Модель Бокса-Мюллера:

$$W_i = \sqrt{\mu^2} \sqrt{-2 \ln r_1} \cos(2\pi r_2), \quad r_n \in (0; 1] \quad (2.18)$$

На рисунку 2.4 залежності побудовані на базі наближення  $F(t) = AG_\varepsilon|\varepsilon|(t)$  звідси впливає що  $F(t)$  відповідає експериментальним даним і виконуються кілька умов: 1) час релаксації деформації  $\tau_\varepsilon$  в діапазоні 0.1- 5 с; 2) зона контакту  $A \approx 10^{-6} - 10^{-1} m^2$  [6].

Часові залежності на рисунку 2.4 визначають режими фрикції, які підтверджені ймовірністю щільності  $P_a$ . Очевидно, що верхня частина відповідає режиму розм'якшення (S). Нульове  $F$  найбільш імовірно в режимі тертя льоду (I). Випадкові стрибки між нульовими та ненульовими значеннями  $F$  відбувається при двох режимах SI + MS і MI + SS.

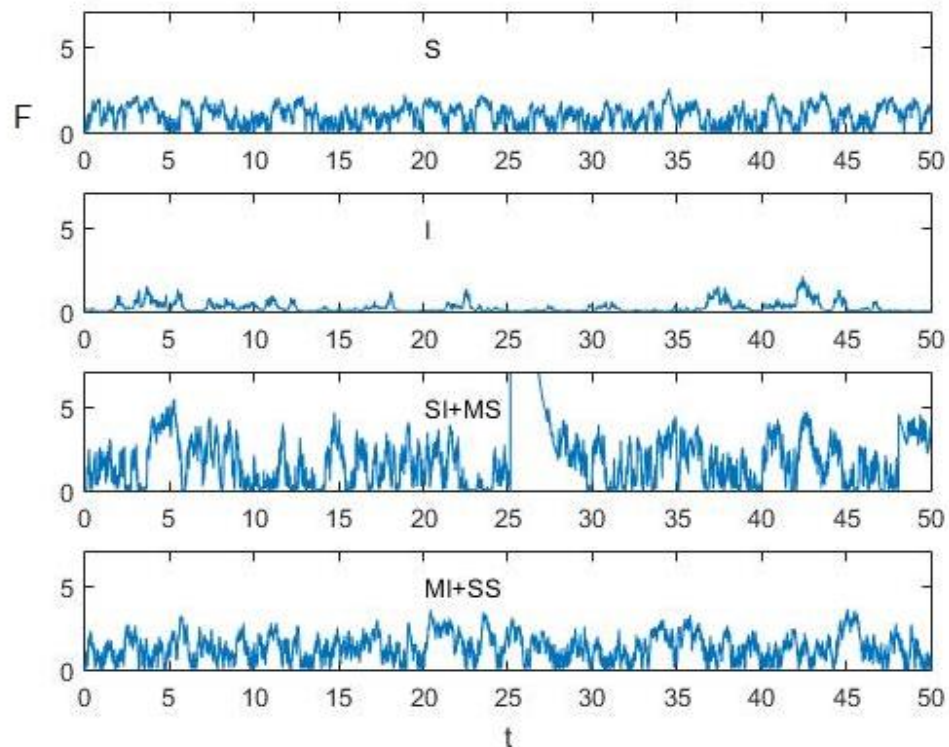


Рис. 2.4 Часові ряди сили тертя. Побудовані відповідно до рівняння (2.17). Презентовані режими відповідають параметрам Рис.2.2

## ВИСНОВКИ



1. Відповідно до проведеного аналізу розподіл імовірності деформацій, притаманний самоподібним системам, викликаний збільшенням флуктуацій температури та дробовим показником.
2. Відповідна фазова діаграма з областями S, I, SI + MS та MI + SS якісно співпадає з тією, яка розрахована для випадку, коли дробовий показник відсутній у релаксаційному виразі та зворотних зв'язках.
3. Часові ряди сили тертя розраховано для кожного режиму чисельно, використовуючи рівняння Ланжевена, і зроблено висновок, що за визначеними параметрами часові ряди є самоподібними.
4. Самоподібні часові залежності сили тертя реалізуються лише для доменів тертя кристалічного льоду (I) та переривчастого тертя (SI + MI), оскільки лише для цих режимів виявляється степеневий закон густини ймовірності.

## **ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ**

1. Kietzig Anne-Marie, Hatzikiriakos Savvas G., Englezos Peter. Physics of ice friction//Journal of Applied Physics. – 2010. – V. 107. – p. 081101.
2. Akkok M., Ettles C.M.M., Calabrese S.J. Parameters affecting the kinetic friction of ice // ASME Journal of Tribology. – 1987. – V. 109. – p. 552–559.
3. Amit D.J. Field theory, the renormalization group, and critical phenomena. – London, New York: McGraw-Hill International Book Co, 1978. – 336 p.
4. Baurle L., Kaempfer T.U., Szabo D., Spencer N.D.: Sliding friction of polyethylene on snow and ice: Contact area and modeling // Cold Regions Science and Technology. – 2007. – V. 47(3). – p. 276 – 289.
5. Beeman M., Durham W.B., Kirby S.H.: Friction of ice // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. – 1988. – V. 93(B7). – p. 7625–7633.
6. Blackford J.R., Skouvaklis G., Purser M., Koutsos V.: Friction on ice: stick and slip // Faraday Discuss. – 2012. – V. 156. – p. 243–254.
7. Box G.E.P., Jenkins G.M., Reinsel G.C., Ljung G.M. Time Series Analysis: Forecasting and Control, 5th Edition. – Hoboken: Wiley Series in Probability and Statistics, 2015. – 712 p.
8. Ducret S., Zahouani H., Midol A., Lanteri P., Mathia T. Friction and abrasive wear of UHWMPE sliding on ice // Second International Conference on Erosive and Abrasive Wear. – 2005. – V. 258(14). – p. 26 – 31.
9. Eirich, F. Rheology. – New York: Academic Press, 1960. – 238 p.
10. Eisenberg D.S., Kauzmann W. The structure and properties of water. – New York, Auckland, Oxford: Oxford University Press, 2011. – 308 p.

## Програмна реалізація

## A1. Код програми для побудови фазової діаграми

```

g=0.8;
a=0.9;
It=0:139;
Te=1.2;

syms It
Is=(It.*g)/2; %eps=0

n=length(It);

i=1;
Is1(1:n)=0; Is2(1:n)=0;

for It=0:0.5:139

[Is_max,Is_min]=get_extremdipl(g,a,It,Te);

if isempty(Is_max)
    Is1(i)=NaN;
else
    Is1(i)=Is_max;
end
if isempty(Is_min)
    Is2(i)=NaN;
else
    Is2(i)=Is_min;
end
i=i+1;
end

It=[0:0.5:139];
hold on
plot(subs(Is,It),It)
plot(Is1,It,'black')
plot(Is2,It,'r')
xlabel('I_S')
ylabel('I_T')
Eleg = legend('eps=0','eps!=0')
axis([0 9.9 0 50])

```

```
result=[It' subs(Is,It)' Is1' Is2'];
dlmwrite('It(Is).dat', result, '\t');
```

A2. Код програми для побудови розподілу ймовірностей

```
clear all;
%Ieps=10^(-20);
Ieps=0;
Is1=4.25;
Is2=0;
Is3=0;
Is4=5;
It1=2;
It2=5;
It3=55;
It4=12;
g=0.8;
Te=1.2;
a=0.9;
%Z=1;
ei=0; % нижний предел
ef=6.5; % верхний предел
h = 0.1; % шаг интегрирования
syms x;

f=-x^a+g*x^a*(Te-1)*((1+g*(x)^(2*a))^(-1));
I1=Ieps+(g^2*x^(2*a)*It1+Is1)*((1+g*x^(2*a))^(-2));
I2=Ieps+(g^2*x^(2*a)*It2+Is2)*((1+g*x^(2*a))^(-2));
I3=Ieps+(g^2*x^(2*a)*It3+Is3)*((1+g*x^(2*a))^(-2));
I4=Ieps+(g^2*x^(2*a)*It4+Is4)*((1+g*x^(2*a))^(-2));

s=0;
i=1;
while s<=6.5
    I21=Ieps+(g^2*s^(2*a)*It1+Is1)*((1+g*s^(2*a))^(-2));
    I22=Ieps+(g^2*s^(2*a)*It2+Is2)*((1+g*s^(2*a))^(-2));
    I23=Ieps+(g^2*s^(2*a)*It3+Is3)*((1+g*s^(2*a))^(-2));
    I24=Ieps+(g^2*s^(2*a)*It4+Is4)*((1+g*s^(2*a))^(-2));
    r1=double(int(f/I1,0,s));
    r2=double(int(f/I2,0,s));
    r3=double(int(f/I3,0,s));
    r4=double(int(f/I4,0,s));
    U1=0.5*log(I21)-r1;
```

```

U2=0.5*log(I22)-r2;
U3=0.5*log(I23)-r3;
U4=0.5*log(I24)-r4;
P1(i)=exp(-U1);
P2(i)=exp(-U2);
P3(i)=exp(-U3);
P4(i)=exp(-U4);
t(i)=s;
s=s+0.05
i=i+1;

end
subplot(1,2,1)
loglog(t(:),P1(:),'color','red')
axis([0.05 10 0.001 10])
hold on
loglog(t(:),P2(:),'color','blue')
axis([0.05 10 0.001 10])
hold on
loglog(t(:),P3(:),'color','magenta')
axis([0.05 10 0.01 10])
hold off
subplot(1,2,2)
plot(t(:),P4(:),'color','magenta')
axis([0 1.6 0.442 0.458])

result=[t' P1' P2' P3' P4'];

```

A3. Код програми для побудови залежності деформації зсуву від температури термостата

```

a)a=0.9 та  $I_T=(1)1, (2)2, (3)3, (4)4$  та (5)5
xmin=0;
xmax=6;
ymin=0;
ymax=1.15;
ezplot('(1+0.8.*y.^(1.8)).^(3)+0.8.*(1-x).*(1+0.8.*y.^(1.8)).^(2)-0.72.*y.^(-0.1).*(0.8.*((1+0.8.*y.^(1.8))-2)+2.*0.8)=0',[xmin, xmax, ymin, ymax])
hold on
ezplot('(1+0.8.*y.^(1.8)).^(3)+0.8.*(1-x).*(1+0.8.*y.^(1.8)).^(2)-0.72.*y.^(-0.1).*(1.6.*((1+0.8.*y.^(1.8))-2)+2.*0.8)=0',[xmin, xmax, ymin, ymax])
hold on

```

```

ezplot('(1+0.8.*y.^(1.8)).^3+0.8.*(1-x).*(1+0.8.*y.^(1.8)).^2-0.72.*y.^(-
0.1).*(2.4.*((1+0.8.*y.^(1.8))-2)+2.*0.8)=0',[xmin, xmax, ymin, ymax])
hold on
ezplot('(1+0.8.*y.^(1.8)).^3+0.8.*(1-x).*(1+0.8.*y.^(1.8)).^2-0.72.*y.^(-
0.1).*(3.2.*((1+0.8.*y.^(1.8))-2)+2.*0.8)=0',[xmin, xmax, ymin, ymax])
hold on
ezplot('(1+0.8.*y.^(1.8)).^3+0.8.*(1-x).*(1+0.8.*y.^(1.8)).^2-0.72.*y.^(-
0.1).*(4.*((1+0.8.*y.^(1.8))-2)+2.*0.8)=0',[xmin, xmax, ymin, ymax])
xlabel('Te')
ylabel('Eps')
title('a')
text(1.5,0.43,'1')
text(2.1,0.43,'2')
text(2.6,0.43,'3')
text(3,0.43,'4')
text(3.5,0.43,'5')

```

б)  $I_T=4$  та  $a=(1)0.2, (2)0.5, (3)0.8, (4)1$

```

xmin=0;
xmax=6;
ymin=0;
ymax=1.15;
ezplot('(1+0.8.*y.^(0.4)).^3+0.8.*(1-x).*(1+0.8.*y.^(0.4)).^2-0.16.*y.^(-
0.8).*(3.2.*((1+0.8.*y.^(0.4))-2)+2.*0.8)=0',[xmin, xmax, ymin, ymax])
hold on
ezplot('(1+0.8.*y.^(1)).^3+0.8.*(1-x).*(1+0.8.*y.^(1)).^2-0.4.*y.^(-
0.5).*(3.2.*((1+0.8.*y.^(1))-2)+2.*0.8)=0',[xmin, xmax, ymin, ymax])
hold on
ezplot('(1+0.8.*y.^(1.6)).^3+0.8.*(1-x).*(1+0.8.*y.^(1.6)).^2-0.64.*y.^(-
0.2).*(3.2.*((1+0.8.*y.^(1.6))-2)+2.*0.8)=0',[xmin, xmax, ymin, ymax])
hold on
ezplot('(1+0.8.*y.^(2)).^3+0.8.*(1-x).*(1+0.8.*y.^(2)).^2-
0.8.*y.^(0).*(3.2.*((1+0.8.*y.^(2))-2)+2.*0.8)=0',[xmin, xmax, ymin, ymax])
xlabel('Te')
ylabel('Eps')
title('b')
text(2.8,0.1,'1')
text(3.2,0.2,'2')
text(3.32,0.28,'3')
text(3.6,0.34,'4')

```

A4. Код програми для побудови часових рядів сил тертя

```
clear all;
```

```

clc;
% N=10^4;
% T=100;
%dt=0.01;
N=10^4;
T=50;
dt=T/N;
g=0.8;
I_e=0;
I_s1=4.25;
I_s2=0;
I_s3=0;
I_s4=5;
I_t1=2;
I_t2=5;
I_t3=55;
I_t4=12;
T_e=1.2;
epsilon1(1)=0.1;
epsilon2(1)=0.1;
epsilon3(1)=0.1;
epsilon4(1)=0.1;
a=0.9;
for i=1:N
    f=-epsilon1(i)^a-g*epsilon1(i)^a*(1-T_e)/(1+g*epsilon1(i)^(2*a));
    r1=rand(1);
    r2=rand(1);
    W=sqrt(-4*log(r1))*cos(2*pi*r2);
    I=I_e+(I_s1+I_t1*g^2*epsilon1(i)^(2*a))*((1+g*epsilon1(i)^(2*a))^(-2));
    epsilon1(i+1)=epsilon1(i)+(f+a*g*epsilon1(i)^(2*a-1)*[g*I_t1*(1-
g*epsilon1(i)^(2*a))-2*I_s1]/(1+g*epsilon1(i)^(2*a))^3)*dt+sqrt(I*dt)*W;
end;

for i=1:N
    f=-epsilon2(i)^a-g*epsilon2(i)^a*(1-T_e)/(1+g*epsilon2(i)^(2*a));
    r1=rand(1);
    r2=rand(1);
    W=sqrt(-4*log(r1))*cos(2*pi*r2);
    I=I_e+(I_s2+I_t2*g^2*epsilon2(i)^(2*a))*((1+g*epsilon2(i)^(2*a))^(-2));
    epsilon2(i+1)=epsilon2(i)+(f+a*g*epsilon2(i)^(2*a-1)*[g*I_t2*(1-
g*epsilon2(i)^(2*a))-2*I_s2]/(1+g*epsilon2(i)^(2*a))^3)*dt+sqrt(I*dt)*W;
end;

for i=1:N

```

```

f=-epsilon3(i)^a-g*epsilon3(i)^a*(1-T_e)/(1+g*epsilon3(i)^(2*a));
r1=rand(1);
r2=rand(1);
W=sqrt(-4*log(r1))*cos(2*pi*r2);
I=I_e+(I_s3+I_t3*g^2*epsilon3(i)^(2*a))*((1+g*epsilon3(i)^(2*a))^(-2));
epsilon3(i+1)=epsilon3(i)+(f+a*g*epsilon3(i)^(2*a-1)*[g*I_t3*(1-
g*epsilon3(i)^(2*a))-2*I_s3]/(1+g*epsilon3(i)^(2*a))^3)*dt+sqrt(I*dt)*W;
end;

```

```

for i=1:N

```

```

    f=-epsilon4(i)^a-g*epsilon4(i)^a*(1-T_e)/(1+g*epsilon4(i)^(2*a));
    r1=rand(1);
    r2=rand(1);
    W=sqrt(-4*log(r1))*cos(2*pi*r2);
    I=I_e+(I_s4+I_t4*g^2*epsilon4(i)^(2*a))*((1+g*epsilon4(i)^(2*a))^(-2));
    epsilon4(i+1)=epsilon4(i)+(f+a*g*epsilon4(i)^(2*a-1)*[g*I_t4*(1-
g*epsilon4(i)^(2*a))-2*I_s4]/(1+g*epsilon4(i)^(2*a))^3)*dt+sqrt(I*dt)*W;
end;

```

```

t=0:dt:T;

```

```

subplot(4,1,1)

```

```

plot(t, abs(epsilon1));

```

```

axis([0 50 0 7])

```

```

text(20,5,'S')

```

```

ylabel('|epsilon|');

```

```

subplot(4,1,2)

```

```

plot(t, abs(epsilon2));

```

```

axis([0 50 0 7])

```

```

text(20,5,'I')

```

```

subplot(4,1,3)

```

```

plot(t, abs(epsilon3));

```

```

axis([0 50 0 7])

```

```

text(20,5,'SI+MS')

```

```

subplot(4,1,4)

```

```

plot(t, abs(epsilon4));

```

```

axis([0 50 0 7])

```

```

text(20,5,'MI+SS')

```

```

xlabel('t');

```

```

result=[t' abs(epsilon1)' abs(epsilon2)' abs(epsilon3)'];

```

```

dlmwrite('eps(t).dat', result, 'delimiter', '\t', 'precision', '%.6f');

```