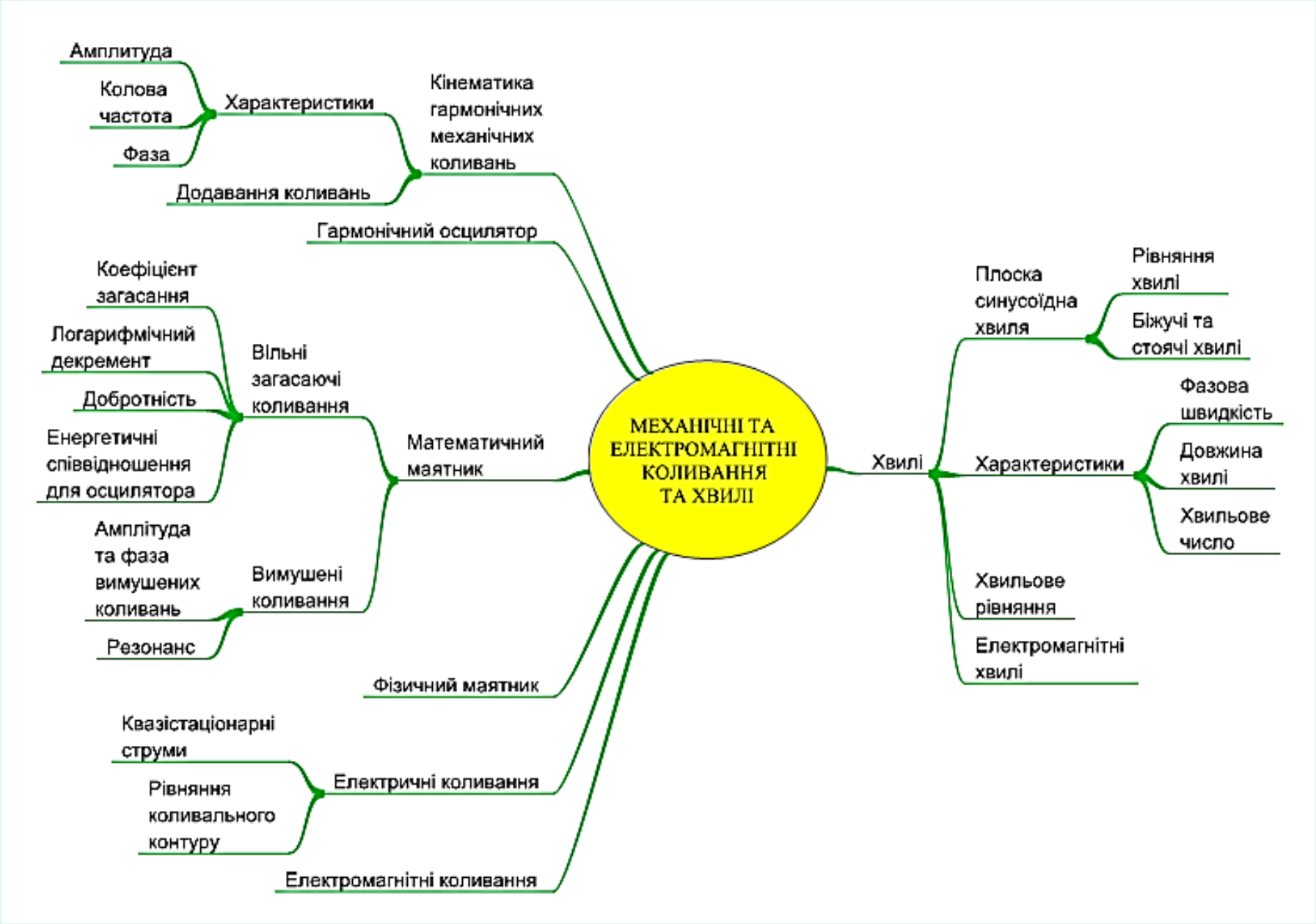
Факультет електроніки та інформаційних технологій
Кафедра електроніки, загальної та прикладної фізики

Лекції
МЕХАНІЧНІ ТА ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

Викладач – проф. Шкурдода Ю.О.

Суми 2022


МЕХАНІЧНІ ТА ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ
Кінематика гармонічних механічних коливань
Характеристики
Амплитуда
Колова частота
Фаза
Додавання коливань
Гармонічний осцилятор
Математичний маятник
Вільні загасаючі коливання
Коефіцієнт загасання
Логарифмічний декремент
Добротність
Енергетичні співвідношення для осцилятора
Вимушені коливання
Амплітуда та фаза вимушених коливань
Резонанс
Фізичний маятник
Електричні коливання
Квазістаціонарні струми
Рівняння коливального контуру
Електромагнітні коливання
Хвилі
Плоска синусоїдна хвиля
Рівняння хвилі
Біжучі та стоячі хвилі
Характеристики
Фазова швидкість
Довжина хвилі
Хвильове число
Хвильове рівняння
Електромагнітні хвилі

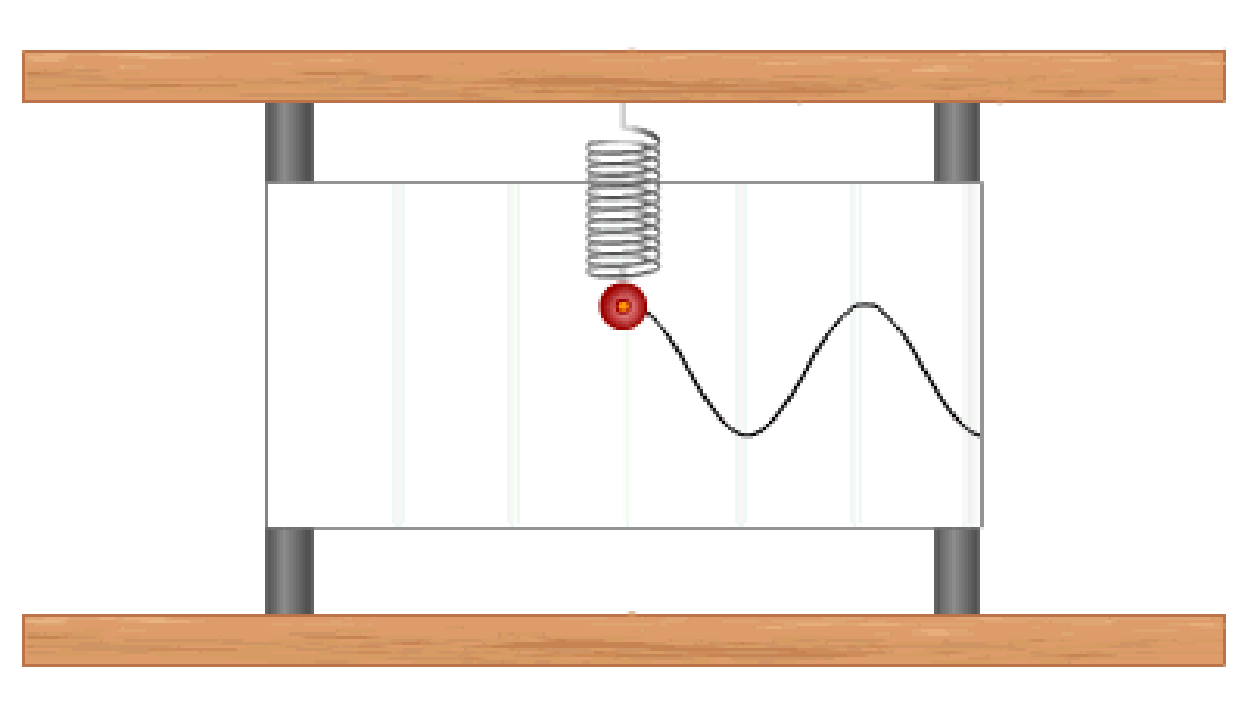
МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ

- ***Коливальними*** називаються процеси, які точно або приблизно повторюються через однакові проміжки часу.
- Рух називається ***періодичним***, якщо значення фізичних величин, які змінюються в процесі руху, повторюються через однакові проміжки часу.
- Система, яка приймає участь у коливаннях називається ***коливальною системою або осциляторомм.***
- Для більшості систем характерне існування положення ***стійкої рівноваги***. Якщо коливальна система була виведена з цього положення і надана сама собі, то її коливання називають ***вільними.*** У відсутність сил опору ці коливання називають ***власними***.

Оскільки в реальних системах завжди діють сили тертя, то вільні коливання є ***затухаючими.***

Вимушені коливання – це коливання, які виникають під впливом змінної зовнішньої дії.

Гармонічні коливання – це періодичні коливання, при яких значення фізичної величини змінюються з часом за законом косинуса чи синуса.



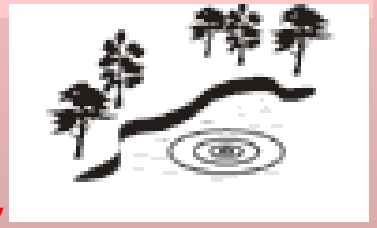
Типи коливань за фізичною природою

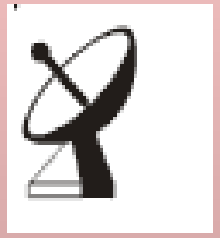
Механічні

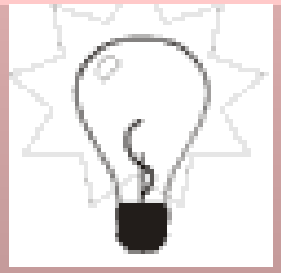
- пружні
- звукові
- на поверхні рідини
- сейсмічні

Електромагнітні

- радіохвилі
- світлові
- рентге кі







- **Гармонічний осцилятор** - система що коливається, потенційна енергія якої пропорційна квадрату відхилення від положення рівноваги.

- Гармонічний осцилятор (*в класичній механіці*) - це система, яка при зміщенні з положення рівноваги відчуває дію повертаючої сили F, пропорційної зміщенню ~ x (відповідно до закону Гука):

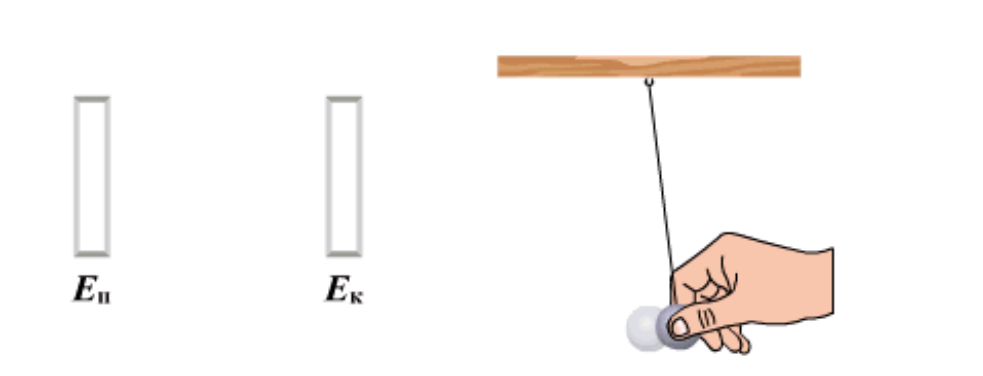
$$F = -k\,x\,,$$

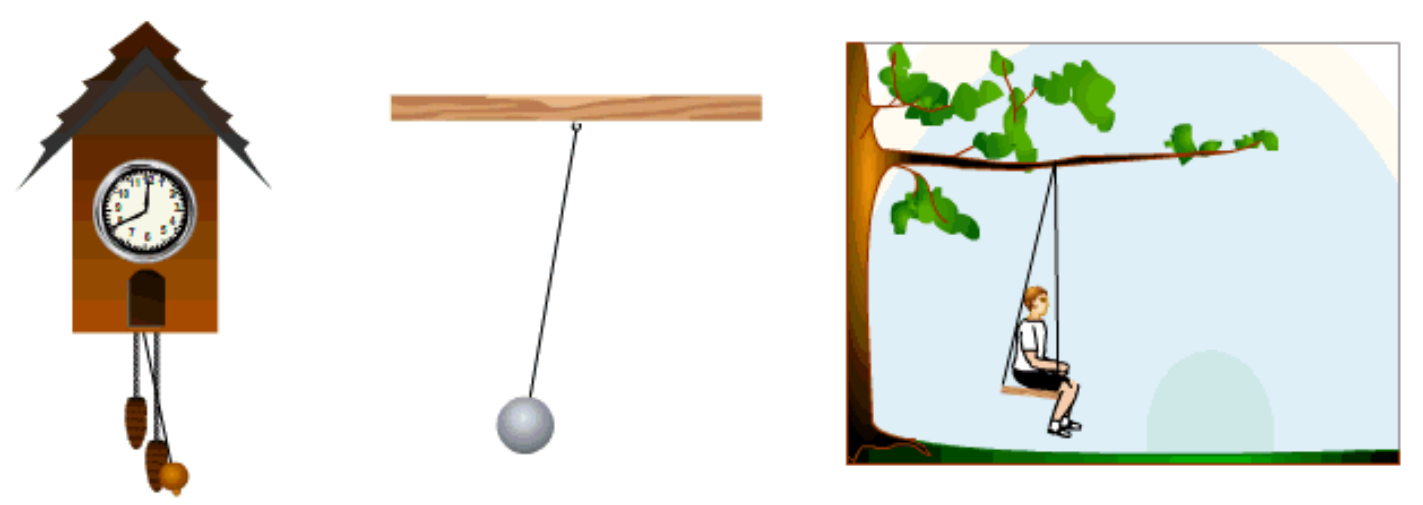
де k - позитивна константа, що описує жорсткість системи.

Приклади гармонічного осцилятора:

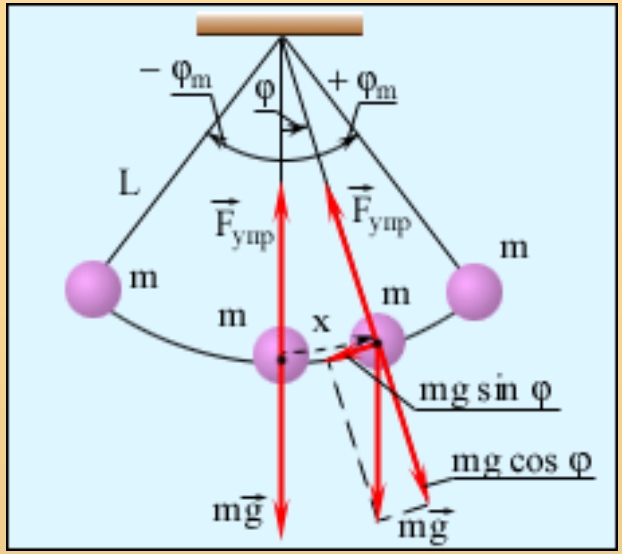
► математичний маятник (з малими кутами зсуву);
► вантаж на пружині;
► акустичні системи.

• **Математичний маятник** — осцилятор, що являє собою механічну систему, яка складається з матеріальної точки, що підвішена на невагомій нерозтяжимій нитці або на невагомому стрижні в поле тяжіння.





МАТЕМАТИЧНИЙ МАЯТНИК



Згідно з II законом Ньютона:

$$F = ma = m\ddot{x}$$

$$F = -mg\sin\varphi$$

$$m\ddot{x} + mg\sin\varphi = 0$$

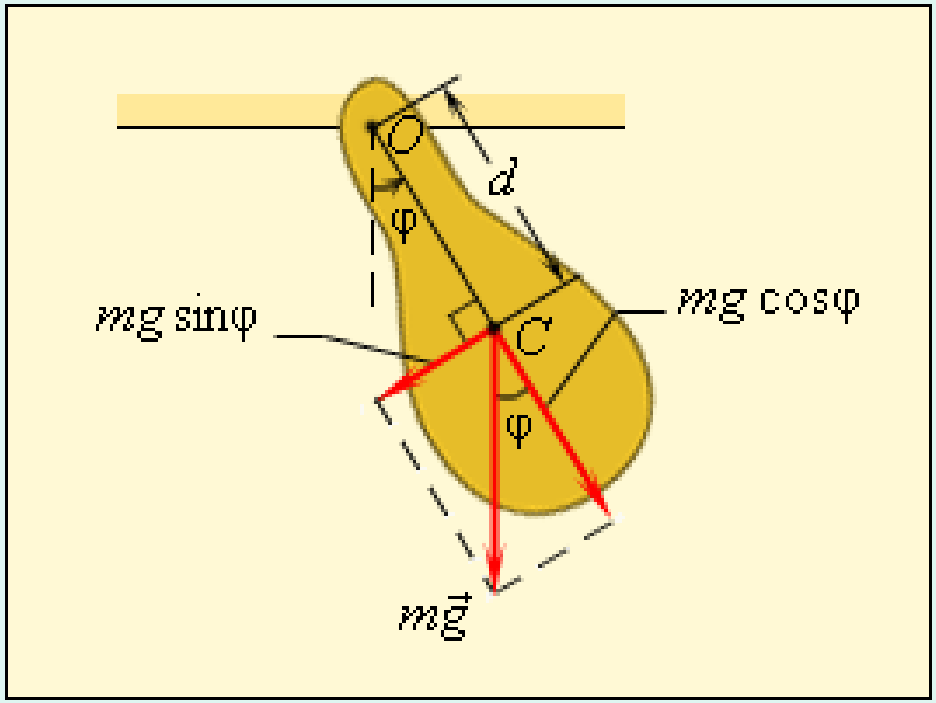
$$\sin\varphi = \frac{x}{l} \Rightarrow m\ddot{x} + mg\frac{x}{l} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0 \qquad \omega_0^2 = \frac{g}{l} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Диференціальне рівняння коливань маятника

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

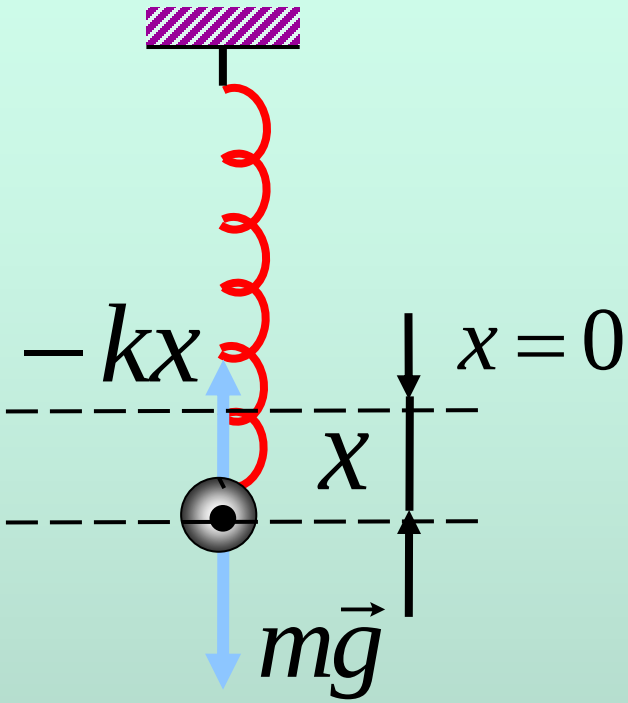
Фізичний маятник – тверде тіло довільної форми, що здійснює коливання під дією сили тяжіння навколо горизонтальної осі.



$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

I – момент інерції

ПРУЖИННИЙ МАЯТНИК



Пружинний маятник - матеріальна точка, підвішена на пружині.

$$-kx = ma = m\ddot{x}$$

Період власних коливань пружинного маятника:

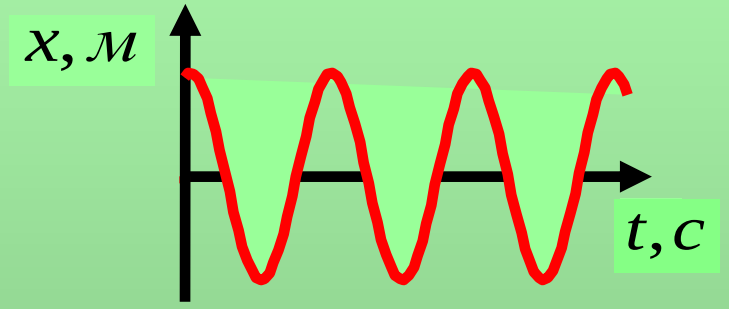
$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

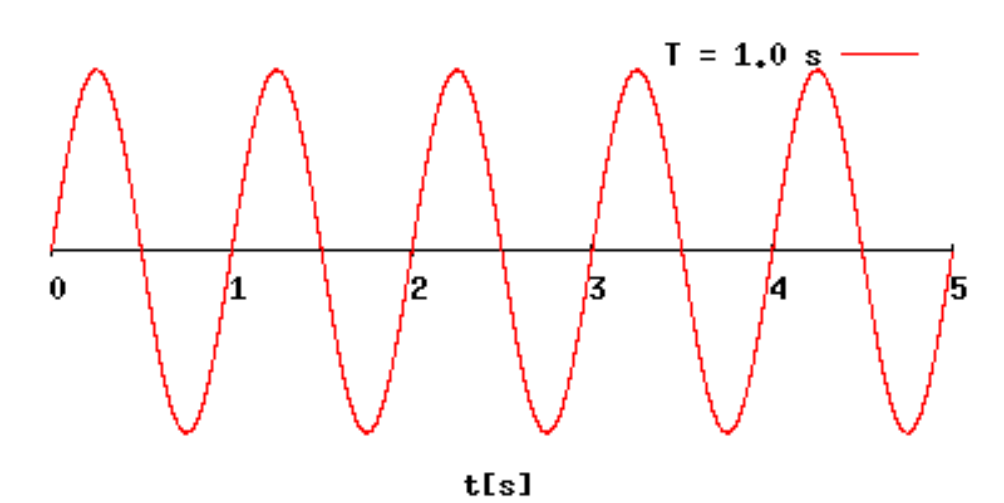
ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ

Рівняння гармонічних коливань:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha) \qquad [x] = [A] = м$$

Амплітуда - найбільше відхилення системи від положення рівноваги.





Вільними називаються коливання, які здійснюються без зовнішньої дії за рахунок раніше накопиченої енергії. Частота коливань системи, яка виконує вільні коливання, називається ***власною частотою.***

Циклічною частотою коливань називається число повних коливань, які здійснюються за 2π секунд

$$\omega = 2\pi\nu$$

Величина, що стоїть під знаком косинуса в рівнянні гармонічних коливань, називається ***фазою коливань***

$$\varphi = \omega_0 t + \alpha$$

Фаза коливань - фізична величина, що при заданій амплітуді визначає стан коливальної системи в будь-який момент часу.

Швидкість коливної точки

$$\mathrm{v} = \dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

Прискорення коливної точки

$$\ddot{x} = a = -\omega_0^2 x$$

$$a = \dot{\mathrm{v}} = \ddot{x}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

Сила, яка діє на коливну точку під час гармонічного коливання також змінюється за гармонічним законом

$$F = ma = m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x$$

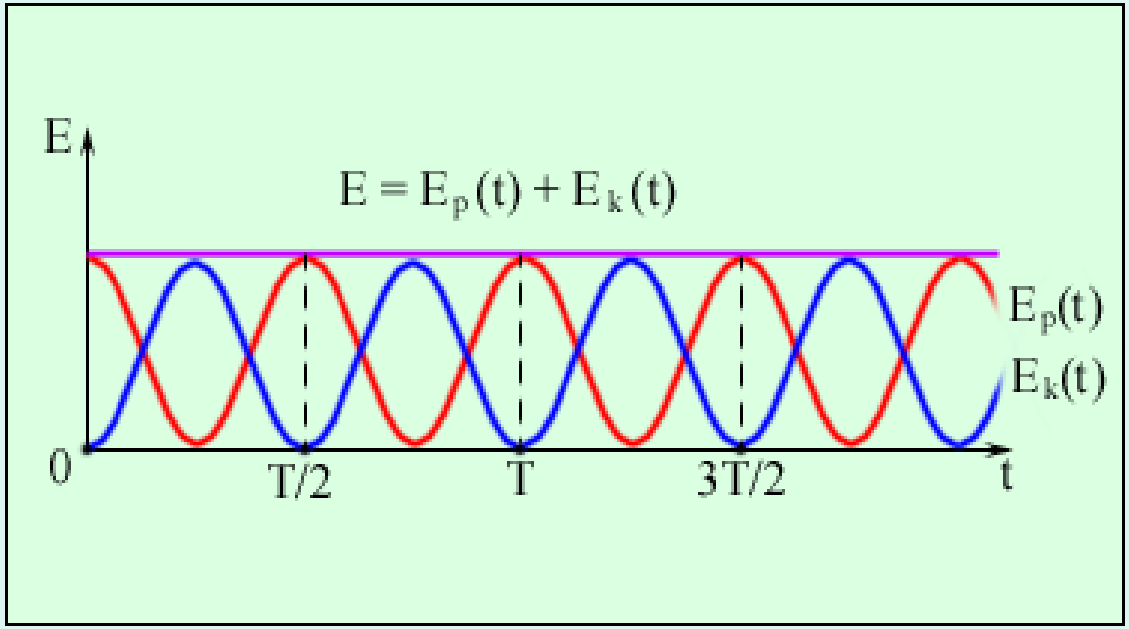
Час, протягом якого здійснюється одне повне коливання, називається **періодом коливань**

$$T = \frac{t}{N} \qquad [T] = c$$

Частотою коливань називається фізична величина, що показує, яке число повних коливань виконує коливна система за одиницю часу

$$\nu = \frac{n}{t} = \frac{1}{T} \qquad [\nu] = \frac{1}{c} = c^{-1} = 1Гц$$

Повна енергія при вільних гармонічних коливаннях залишається сталою



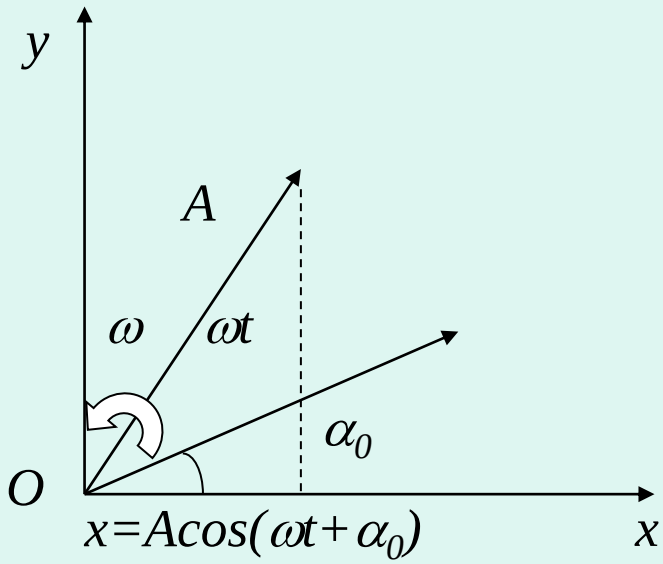
$$W_K = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A \sin^2\left(\omega_0 t + \alpha\right)$$

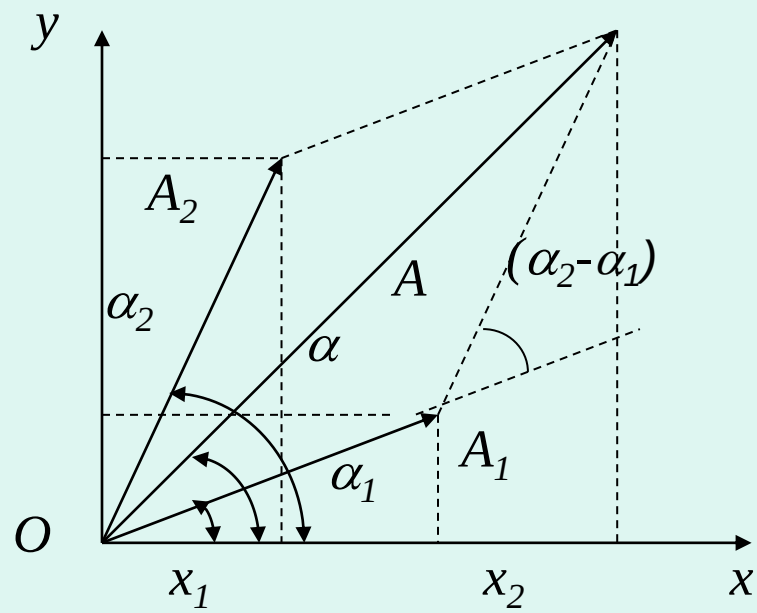
$$W_П = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2\left(\omega_0 t + \alpha\right)$$

$$W = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 = const$$

ДОДАВАННЯ КОЛИВАНЬ ОДНАКОВОГО НАПРЯМУ

Можливі випадки коли тіло бере участь одночасно у кількох коливаннях. При цьому коливання можуть відбуватися у одному напрямку, або взаємно перпендикулярних.





$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1),$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha_2)$$

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega t + \alpha_2)$$

$$tg\alpha = \frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2},$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$$

ДОДАВАННЯ ВЗАЄМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИХ КОЛИВАНЬ

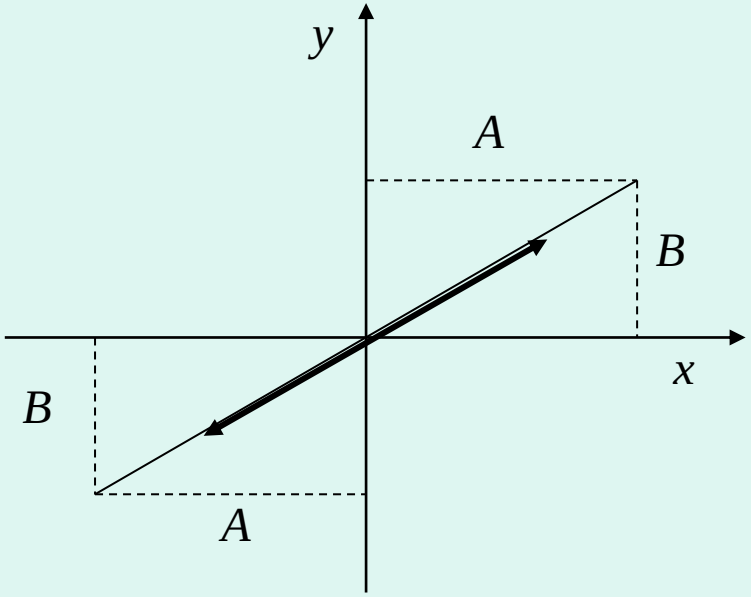
$$x = A\cos\omega t,$$

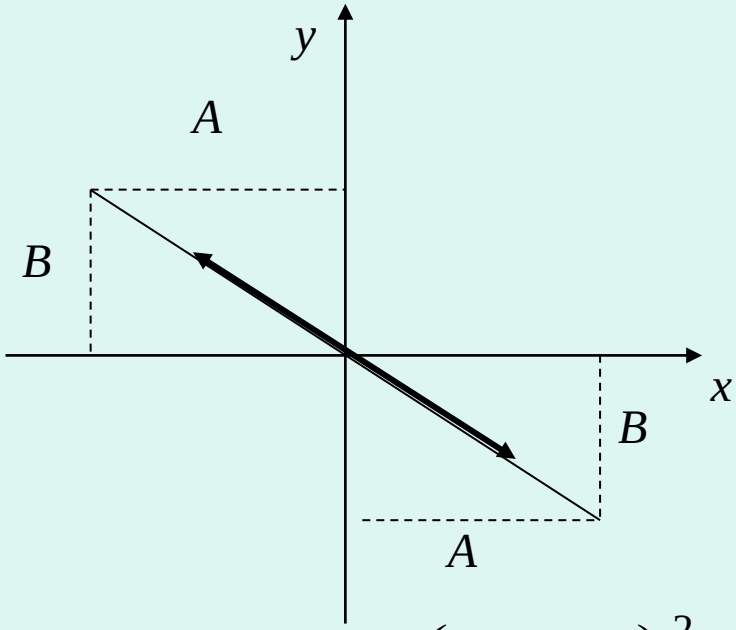
$$y = B\cos(\omega t + \alpha) = B(\cos\omega t\cos\alpha - \sin\omega t\sin\alpha)$$

$$\cos\omega t = \frac{x}{A}, \qquad \sin\omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}},$$

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A}\cos\alpha - \sin\alpha\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}},$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\alpha = \sin^2\alpha$$





$$\alpha = 0, \quad \left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0$$

$$\alpha = \pm\pi, \quad \left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0$$

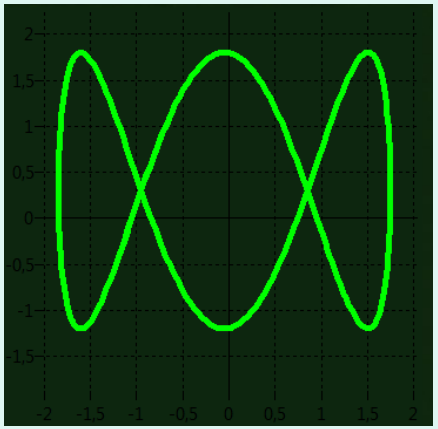
$$\alpha = \pm\frac{\pi}{2}, \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$ – рівняння еліпса,

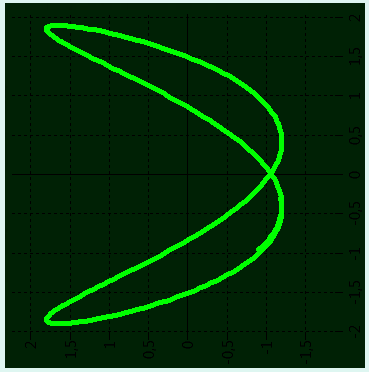
$$A = B, \quad x^2 + y^2 = A^2$$ – рівняння кола

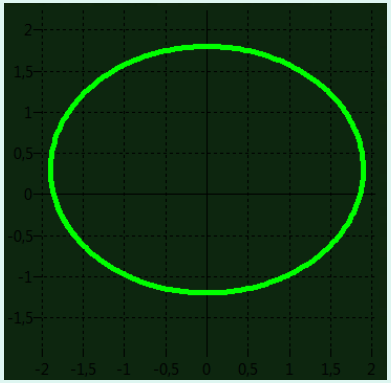
Додавання взаємно перпендикулярних коливань

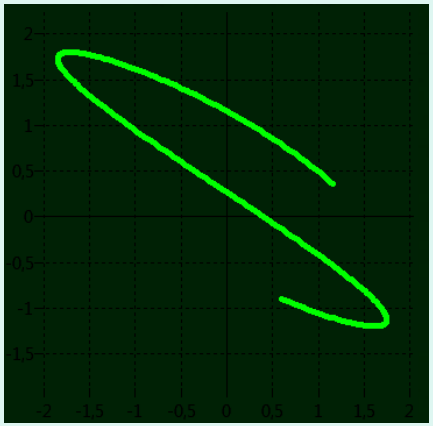
$$x = A\cos(n\omega t)$$ n = 1, 2, . . . $$y = B\cos(\omega t + \varphi)$$

φ	0	π/4	π/2	3π/4	π
n=1					
n=2					

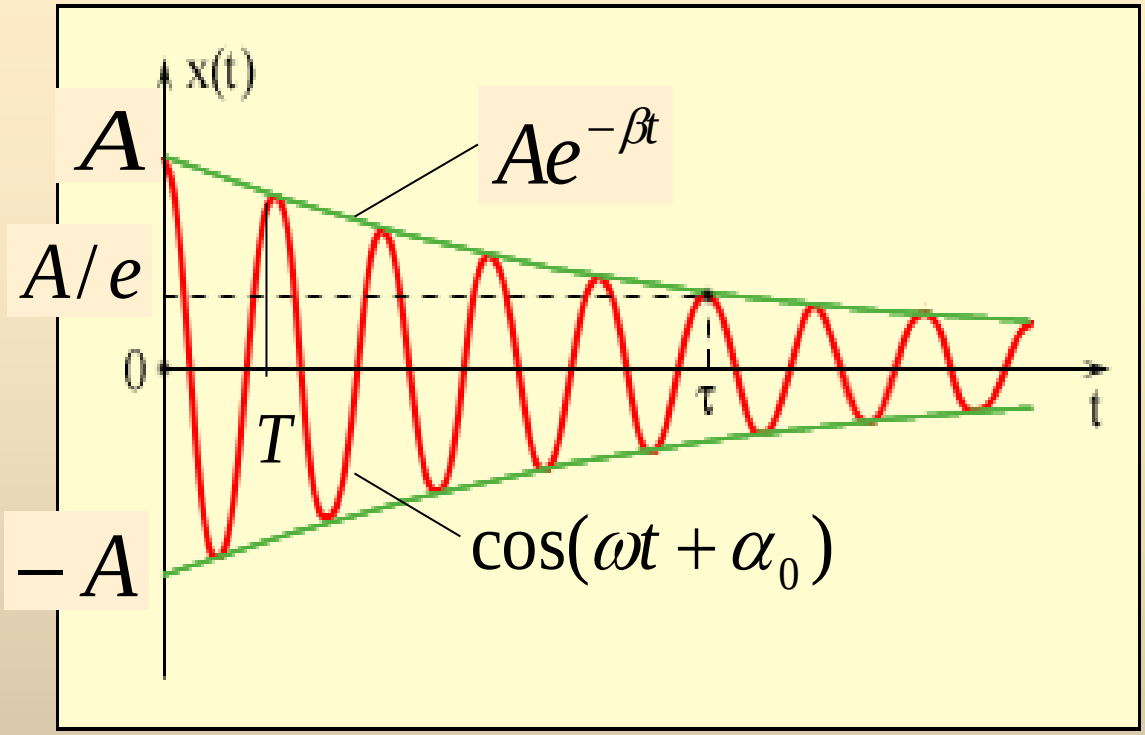








ЗАТУХАЮЧІ КОЛИВАННЯ



$$F_{тер} = -rv = -r\dot{x}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = kx - r\frac{dx}{dt}$$

Диференціальне рівняння вільних затухаючих коливань

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$ де β – коефіцієнт затухання.

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha_0)$$ – рівняння вільних затухаючих коливань

$$A(\tau) = A_0 e^{-\beta\tau} = A_0 e^{-1}, \qquad -\beta\tau = -1,$$

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$ – час релаксації

Коефіцієнт затухання чисельно дорівнює оберненому часу за який амплітуда коливань зменшується в е раз.

Циклічна частота затухаючих коливань $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

Період затухаючих коливань $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$

Декремент затухання $\dfrac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}$

Логарифмічний декремент затухання

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T$$

Добротність $Q = \dfrac{\pi}{\lambda} = \pi N_e$

Вона пропорційна числу коливань N_e, які здійснюються системою за час τ, за який A зменшується у e раз

ВИМУШЕНІ МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ

Коливання, які здійснюються під дією зовнішньої періодичної сили, називаються **вимушеними.**

Резонанс - явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань, при наближені частоти зовнішньої сили до частоти власних коливань системи.

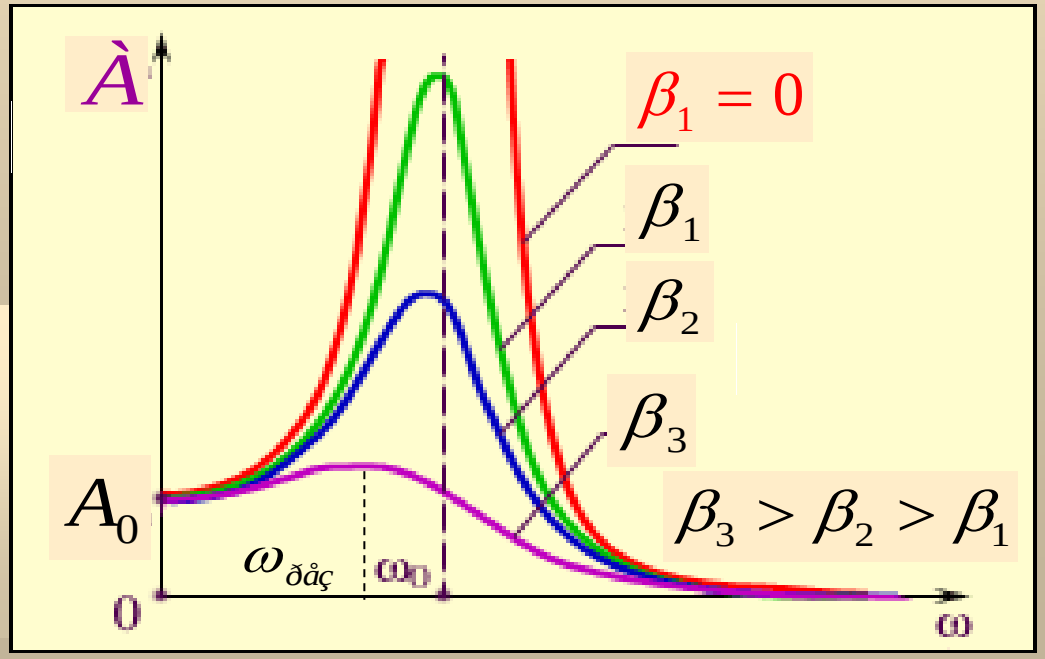
Амплітуда вимушених коливань

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta\omega^2}}$$

Резонансна частота

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

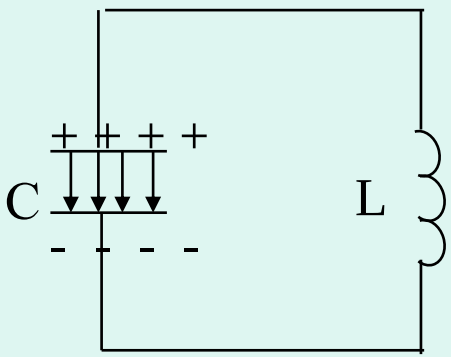
Резонансні криві



Залежність амплітуди вимушених коливань від частоти зовнішньої сили

Власні електромагнітні коливання

Коливальний контур



$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

– період власних коливань (формула Томсона)

Диференціальне рівняння вільних незгасаючих електромагнітних коливань:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0, \text{ де } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} -$$

власна частота контура.

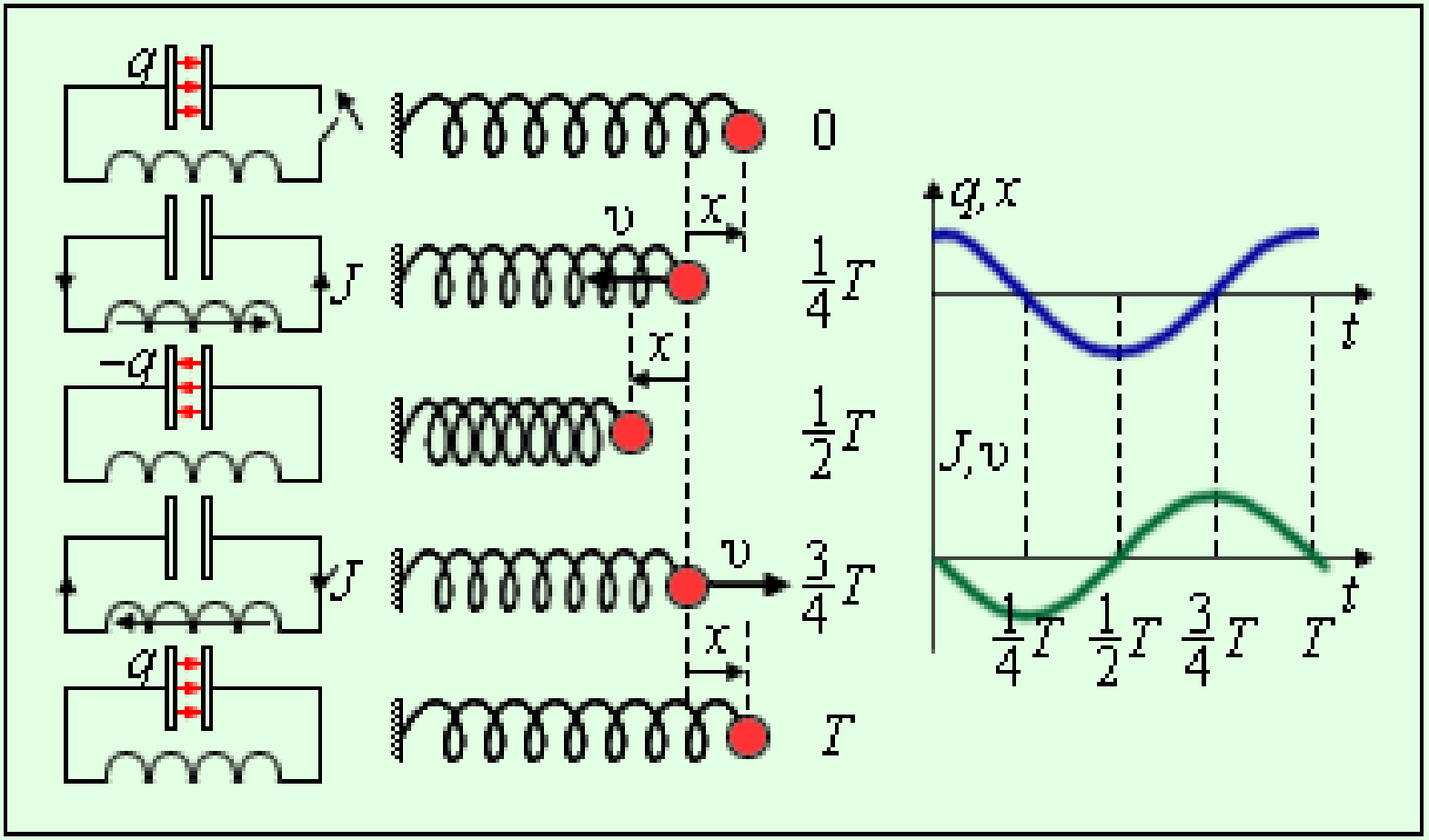
Розв'язком цього рівняння є функція: $q = q_m\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

Сила струму в коливальному контурі:

$$I = I_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2).$$

Напруга на конденсаторі: $U_c = \frac{q}{C} = U_m\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$

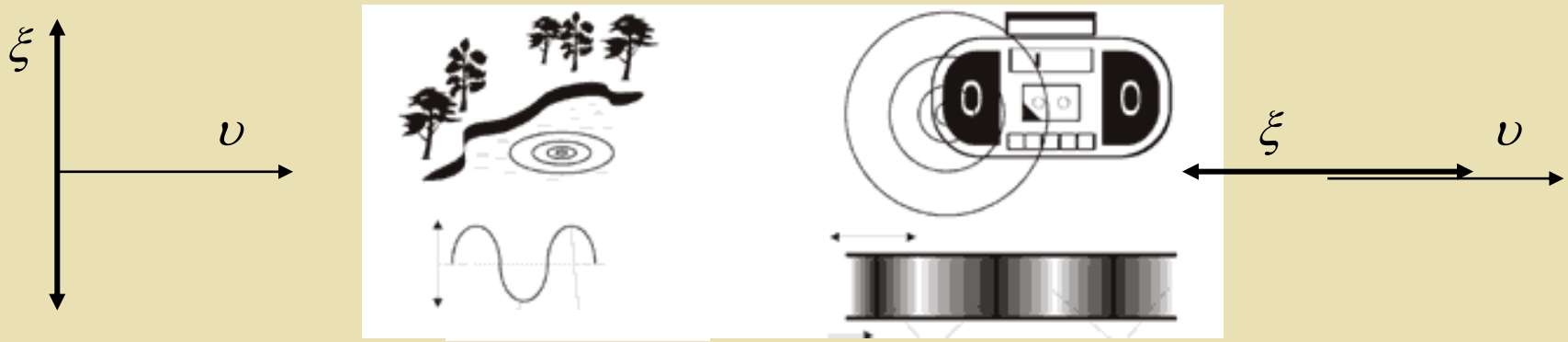
Аналогія між електромагнітними і механічними коливаннями



МЕХАНІЧНІ ХВИЛІ

Хвиля – це процес розповсюдження коливань у просторі. Бувають *поперечними та поздовжніми*. Напрям поширення хвиль називають *променем*. *Поперечними* називають хвилі, в яких частинки коливаються в напрямі, перпендикулярному до променя хвилі. *Поздовжніми* називають хвилі, в яких частинки коливаються в напрямі променя хвилі.

Поперечні хвилі ***Поздовжні хвилі***



Впадина горб ***Згустки розрідження***

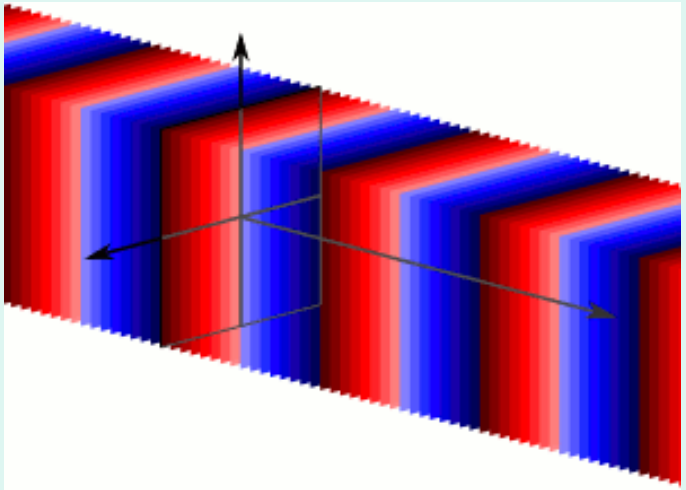
- Основною властивістю усіх хвиль, незалежно від їхньої природи, є перенесення енергії без перенесення речовини.

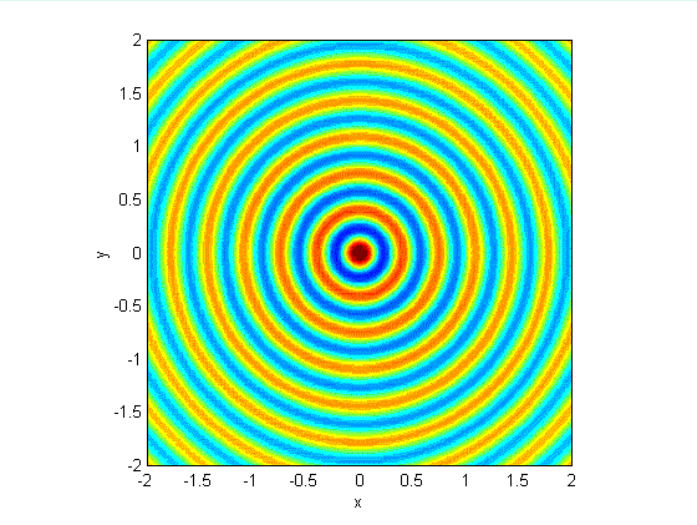
- Геометричне місце точок, до яких дійшли коливання в деякий момент часу *t*, називається ***фронтом хвилі*.**

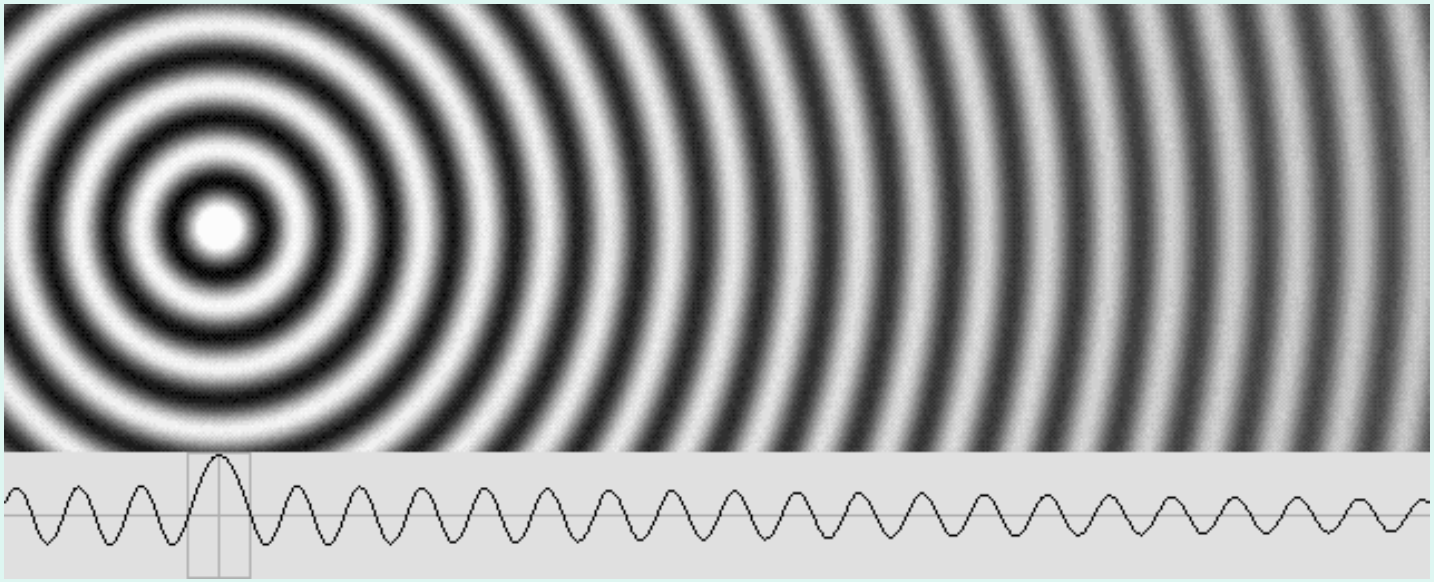
- Геометричне місце точок, які коливаються в однаковій фазі, називається ***хвильовою поверхнею***.

- Хвильові поверхні нерухомі.
  Хвильовий фронт весь час переміщується.

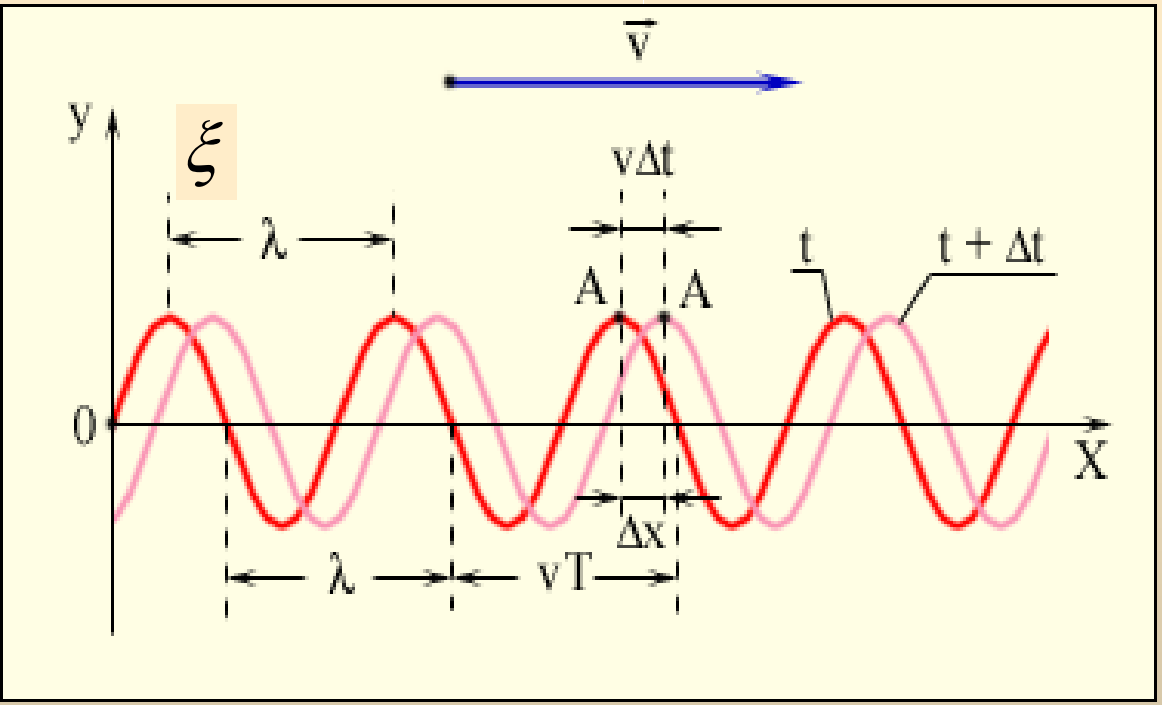
За формою хвильових поверхонь хвилі поділяють на ***плоскі і сферичні.***







ЗВЯЗОК МІЖ ШВИДКІСТЮ ТА ЧАСТОТОЮ ХВИЛІ



Відстань між найближчими точками в напрямі поширення хвилі, які коливаються в однакових фазах називається ***довжиною хвилі λ.***

Очевидно, λ дорівнює відстані, на яку поширюється хвиля за період.

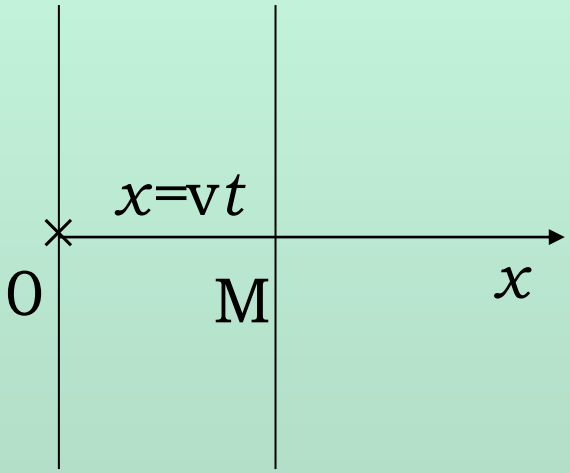
Довжина хвилі $\lambda = \mathrm{v}T$

Швидкість поширення хвилі $\mathrm{v} = \lambda\nu$

РІВНЯННЯ ПЛОСКОЇ ХВИЛІ

Рівнянням хвилі називається вираз, який визначає зміщення будь-якої точки, збудженої хвилею, як функції від часу і відстані від початкової точки (джерела)

$$\xi = f(x, y, z, t)$$



$$\xi(x,t) = A\cos\omega(t-\tau) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

Хвильове число

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Рівняння хвилі

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$$

Якщо хвиля розповсюджується у довільному напрямку r рівняння хвилі набуває вигляду

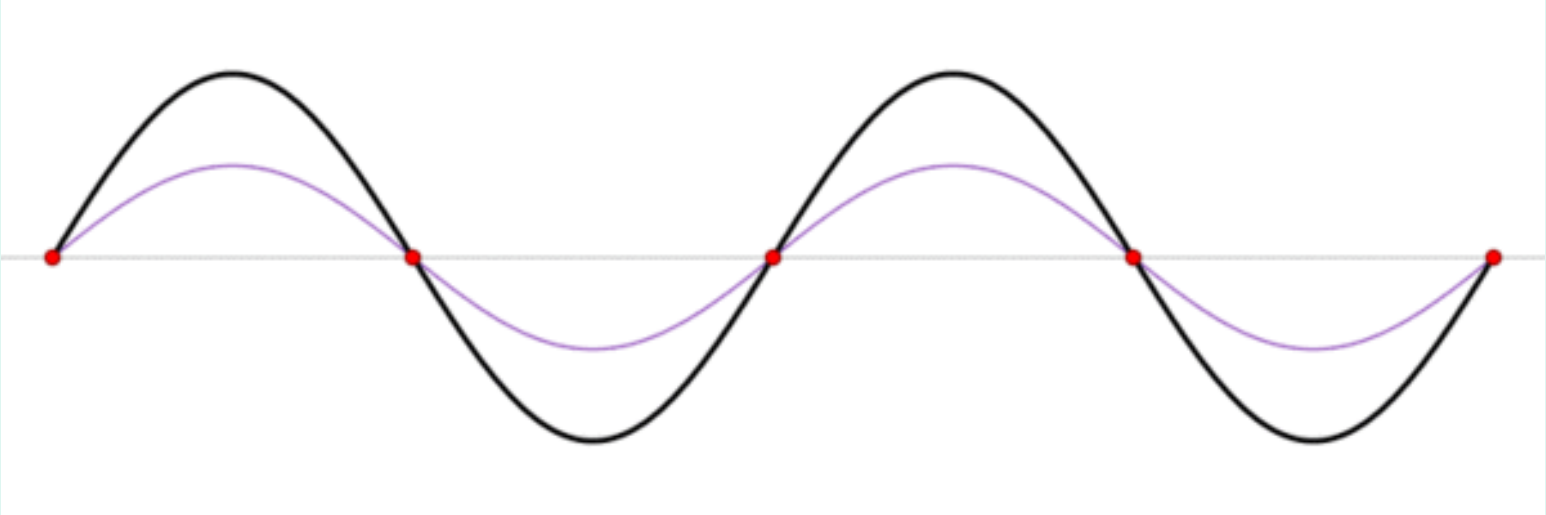
$$\xi(\vec{r},t) = A\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)$$

Диференціальне рівняння хвилі:

$$\nabla^2\xi = \Delta\xi = \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{d^2\xi}{dt^2}$$

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$$ – оператор Лапласа

- **Стояча хвиля** - коливання в коливальних системах з характерним розташуванням максимумів (пучностей), що чергуються, і мінімумів (вузлів) амплітуди. Практично така хвиля виникає при відображеннях від перешкод і неоднорідностей у результаті накладення відбитої хвилі на падаючу.



ВЕКТОР УМОВА

Кількість енергії, яку переносить хвиля через деяку поверхню S за час t, називають потоком енергії Φ

$$\Phi = \frac{dW}{dt}$$

Густина потоку енергії $j = \frac{dW}{dtdS}$, $\vec{j} = \langle w \rangle \vec{v}$

Вектор густини потоку енергії називається вектором Умова

Інтенсивність хвилі дорівнює модулю середнього значення вектора Умова

$$I = \langle j \rangle = \langle w \rangle v = \frac{1}{2}\rho v A^2 \omega^2$$

Перетворення енергії хвиль в інші види енергії під час їх поширення в середовищі називається **поглинанням хвиль**.

$$A = A_0 e^{-\alpha x}, I = I_0 e^{-2\alpha x}$$

ЗВУКОВІ ХВИЛІ

Звук як фізичне явище – це процес поширення коливань в пружному середовищі.

Звук як фізіологічне явище – це специфічне відчуття, викликане дією звукових хвиль на органи слуху людини.

Людське вухо сприймає частоти (**ν**) від 16 Гц до 20000 Гц, тому пружні коливання з такими частотами і хвилі, які їм відповідають, називають звуковими. Коливання з **ν** < 20 Гц називають *інфразвуком*, а з частотою **ν**>20000 Гц – *ультразвуком*. Найбільш високочастотні пружні коливання та відповідні їм хвилі у діапазоні 10^9-10^{13} Гц називають *гіперзвуком.*

- Звукові явища вивчає *акустика.*
- Звукові хвилі можуть поширюватися у будь-якому пружному середовищі. *У рідинах і газах* вони поширюються як *поздовжні хвилі,* у *твердих тілах* звук поширюється *поздовжніми і поперечними хвилями.*
- ***Швидкість*** поширення звуку ***у газі*** залежить від його температури і фізичних властивостей

$$v_{зв} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

Швидкість поширення звукової хвилі в пружному *твердому тілі* залежить від його пружності та густини

$$v_{зв} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

(тут E – модуль Юнга)

- Звук як фізичне явище характеризується певною ***частотою, інтенсивністю та набором частот***. Це – об'єктивні характеристики звуку. Людське вухо сприймає звук за ***гучністю, висотою і тембром***. Це – суб'єктивні характеристики звуку.
- ***Гучність звуку*** – це фізіологічна інтенсивність звуку. Поняття інтенсивності і гучності звуку не рівнозначні. Встановлено, що гучність зростає значно повільніше, ніж інтенсивність звуку.
- ***Висота звуку*** визначається його ***частотою***. Чим більша частота, тим більша висота звуку. ***Тембр звуку,*** його відтінок визначається набором частот простих коливань, що входять до складу звуку.
- ***Музикальний тон*** – це звук, який ми чуємо тоді, коли його джерело здійснює гармонічні коливання з найменшою частотою. Кратні частоти називаються ***обертонами***, саме вони визначають тембр звуків.

СПРИЙМАННЯ ЗВУКУ ВУХОМ

Звуки сприймаються людиною лише тоді, коли достатня їх інтенсивність.

Мінімальні значення інтенсивності, за яких стають чутними звуки, називають *порогом чутності* ($I_0=10^{-12}$ Вт/м^2). Інтенсивність звукової хвилі, яка викликає біль у вусі, називається *порогом больового відчуття* (10 Вт/м^2).

Гучність звуку L – характеристика суб'єктивного сприйняття звукової хвилі. Вимірюють у децибелах (дБ):

$$L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}$$

Децибел – логарифмічна одиниця рівнів, загасань і посилень.

Зміні інтенсивності звукової хвилі від I_0 до $I_{\max}$ відповідає зміна гучності звуку від 0 до 130 дБ.

Хвильове рівняння електромагнітної хвилі

В загальному випадку хвильове рівняння записується у вигляді:

$$\Delta u = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Аналогічно для електромагнітної хвилі:

$$\Delta E = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

де

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu}} = \mathrm{v}$$

– фазова швидкість електромагнітної хвилі

Швидкість поширення електромагнітної хвилі

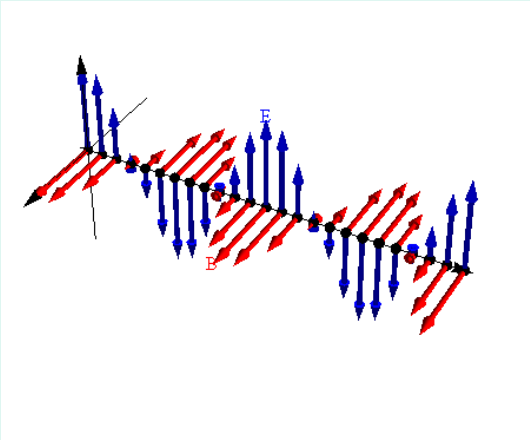
$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \ м/с$$

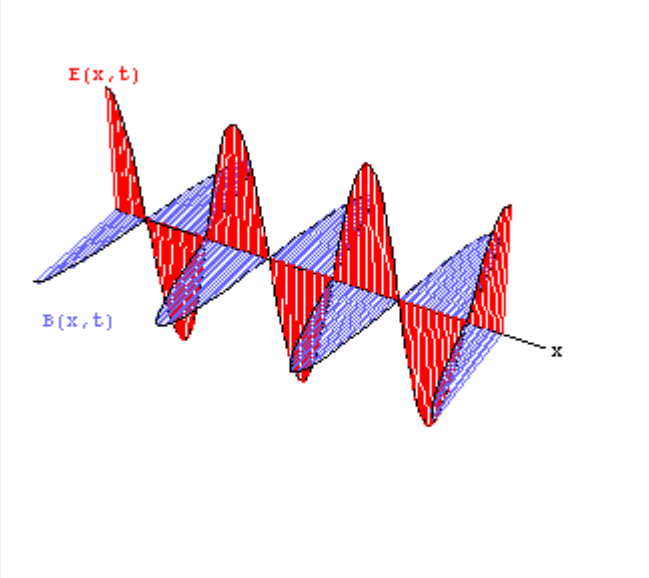
$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \ Ф/м, \ \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \ Гн/м$$

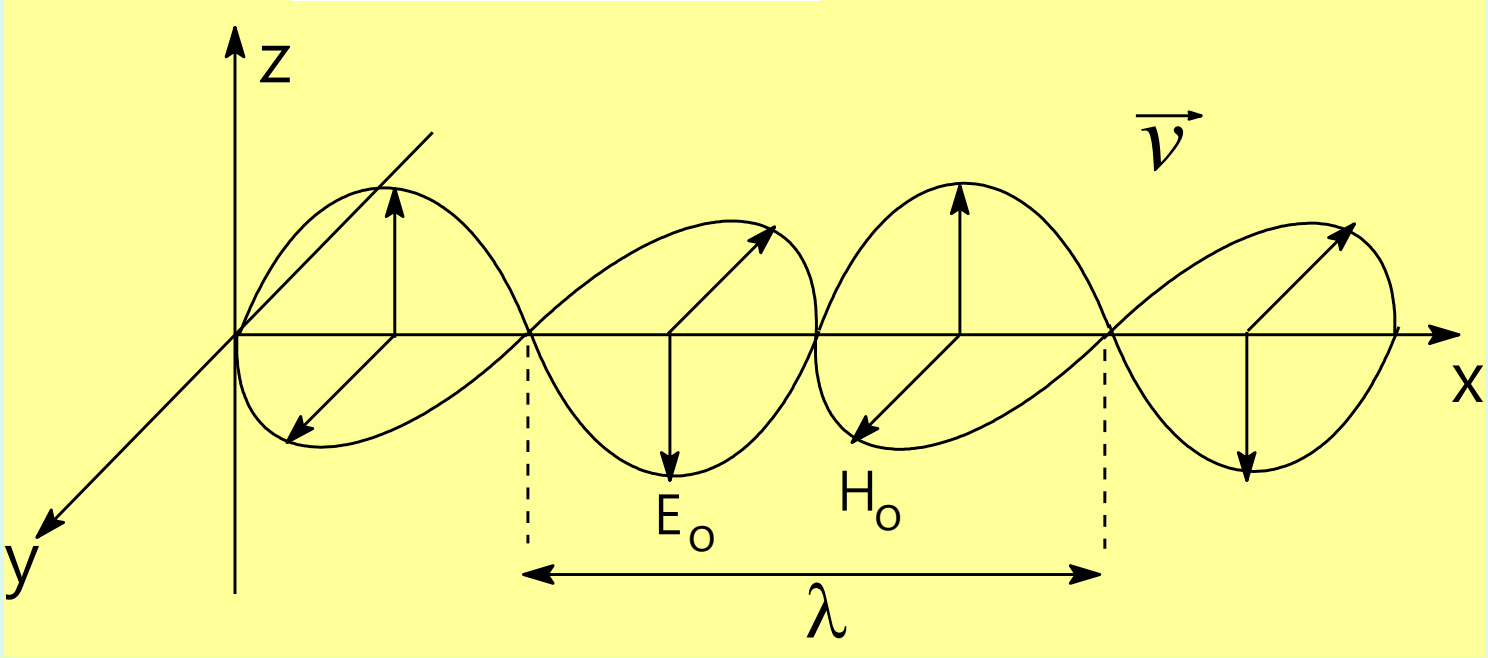
$$\frac{c}{\mathrm{v}} = \sqrt{\varepsilon\mu} = n$$ - показник заломлення

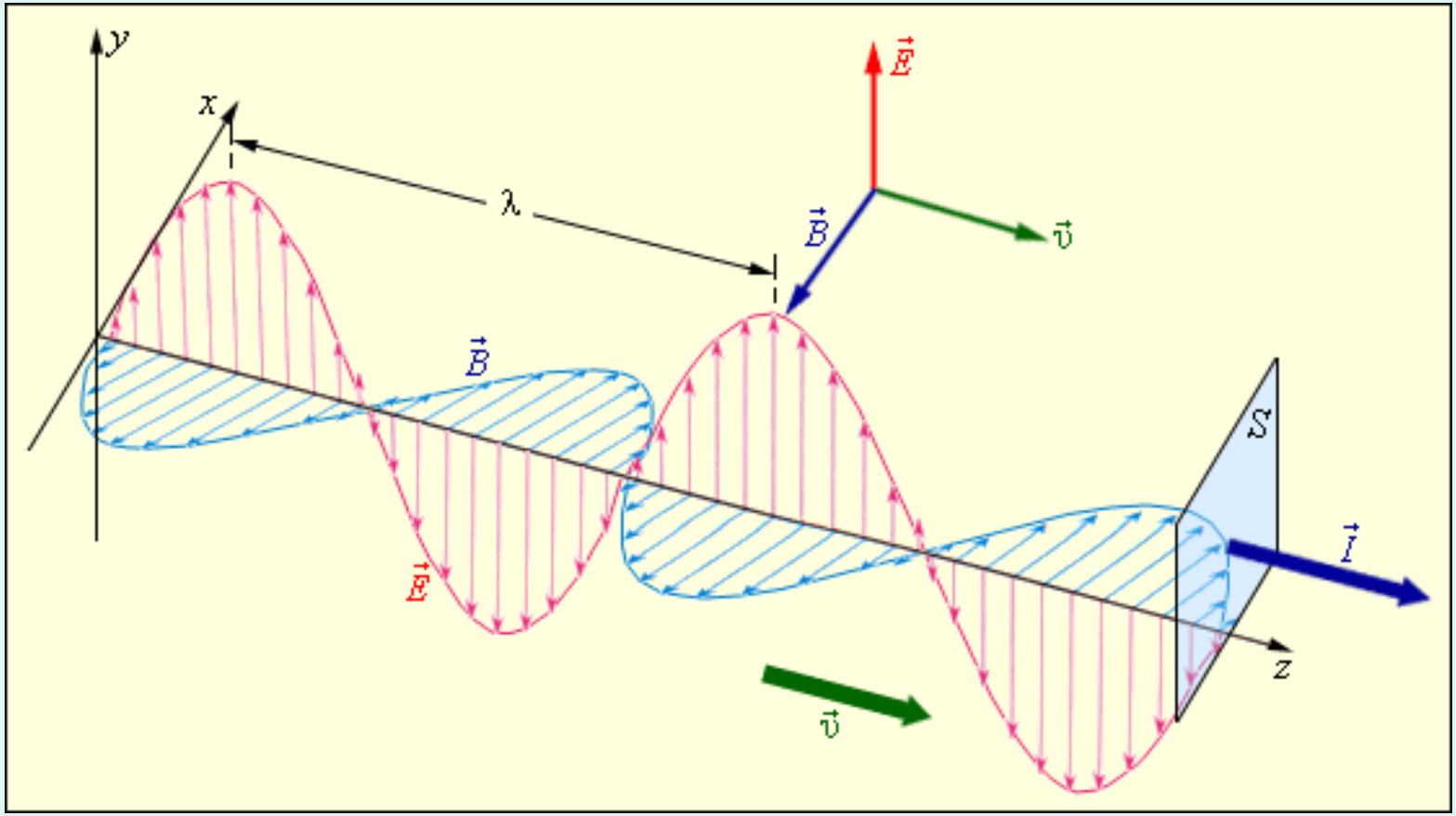
В електромагнітних хвилях коливання здійснюють вектори

$\vec{E}$ і $\vec{H}$









1.	Частота коливань	ν, [Гц]
2.	Циклічна частота коливань	$\omega=2\pi\nu$
3.	Хвильовий вектор	$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\omega}{v}$

4.	Довжина хвилі	$\lambda = vT = \frac{v}{\nu}$
5.	Фазова швидкість	$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu}}$
6.	Хвильовий вектор	$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$

Енергія електромагнітної хвилі. Вектор Умова-Пойнтинга

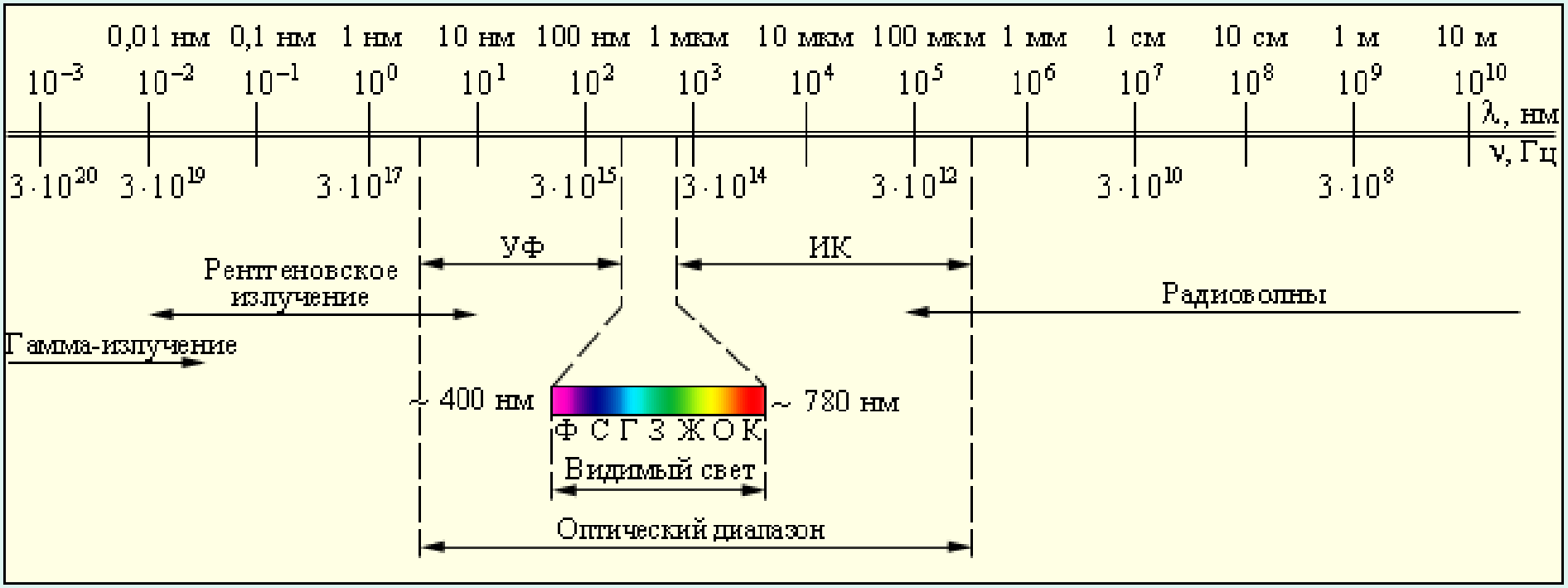
$$w = w_{\text{ЕЛ}} + w_{\text{М}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}$$

$$w = 2w_{ЕЛ} = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu} EH = \frac{1}{\text{v}} EH.$$

$$\vec{S} = w\vec{\text{v}} = \left[\vec{E}\vec{H}\right]$$ – вектор Умова-Пойнтінга

$$I = \left|\left\langle \vec{S} \right\rangle\right| = \text{v}\langle w \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_0^2.$$

Шкала електромагнітних хвиль



Дякую за увагу!