4 ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ В МЕХАНІЦІ

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

4.1 Імпульс матеріальної точки

$$\vec{p} = m\vec{\mathrm{v}}.$$

Закон збереження імпульсу для ізольованої системи

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = const, \text{ або } \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\mathrm{v}}_i = const,$$

де N – кількість матеріальних точок (тіл) системи.

4.2 Робота

Робота, яка здійснюється сталою силою:

$$\Delta A = \vec{F}\Delta\vec{r}, \text{ або } \Delta A = F\Delta r\cos\alpha,$$

де α – кут між напрямками векторів сили $\vec{F}$ та переміщення $\Delta\vec{r}$.

Робота, яка здійснюється змінною силою:

$$A = \int_L F(\vec{r})\cos\alpha(\vec{r})dr,$$

де інтегрування ведеться вздовж траєкторії L.

4.3 Потужність

Середня потужність за інтервал часу Δt

$$< N > = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Миттєва потужність

$$N = \frac{dA}{dt}\text{, або } N = F\text{v}\cos\alpha\ .$$

4.4 Механічна енергія

Кінетична енергія матеріальної точки (тіла, що рухається поступально)

$$W_K = \frac{m\text{v}^2}{2}\text{, або } W_K = \frac{p^2}{2m}\ .$$

Потенціальна енергія тіла і сила, що діє на тіло в даній точці поля, пов’язані співвідношенням

$$\vec{F} = -\text{grad}\, W_П\text{, або } \vec{F} = -\left(\vec{i}\,\frac{\partial W_П}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial W_П}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial W_П}{\partial z}\right),$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти. Якщо поле сил має сферичну симетрію, одержимо

$$F = \frac{dW_П}{dr}\ .$$

Потенціальна енергія пружно-деформованого тіла

$$W_П = \frac{kx^2}{2}\ .$$

Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії двох матеріальних точок (тіл) масами m_1 і m_2, що розміщені на відстані r:

$$W_П = -G\frac{m_1 m_2}{r}\ .$$

Потенціальна енергія тіла, що міститься в однорідному полі сили тяжіння:

$$W_П = mgh,$$

де h $(h<<R)$ – висота тіла над нульовим рівнем; R - радіус Землі.

4.5 Закони збереження

Консервативними називаються сили, робота яких по замкнутому контуру дорівнює нулю:

$$A = \oint_L \vec{F} d\vec{l} = 0.$$

В ізольованій системі, в якій діють тільки консервативні сили, виконується **закон збереження енергії**

$$W_К + W_П = const.$$

Закон збереження моменту імпульсу для ізольованої системи

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = const.$$

Для двох взаємодіючих тіл закон збереження моменту імпульсу запишеться так:

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = J_1'\omega_1' + J_2'\omega_2',$$

де J_1, J_2, ω_1, ω_2 – моменти інерції і кутові швидкості тіл до взаємодії; $J`_1$, $J`_2$, $\omega`_1$, $\omega`_2$ – ті самі величини після взаємодії.

Закон збереження моменту імпульсу для одного тіла із змінним моментом інерції

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2 \ ,$$

де J_1 і J_2 – початковий і кінцевий моменти інерції;
ω_1 і ω_2 – початкова і кінцева кутова швидкість тіла.

4.6 Робота та енергія твердого тіла

Робота сталого моменту *M* сили, що діє на тіло, яке обертається:

$$A = M\varphi \,,$$

де φ - кут повороту тіла.

Миттєва потужність, що розвивається при обертанні тіла:

$$N = M\omega \,.$$

Кінетична енергія тіла, що обертається:

$$W_K = \frac{J\omega^2}{2} \,.$$

Кінетична енергія тіла, що котиться по площині без ковзання:

$$W_K = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} \,,$$

де $\frac{m\text{v}^2}{2}$ - кінетична енергія поступального руху тіла; v – швидкість центра інерції тіла; $\frac{J\omega^2}{2}$ - кінетична енергія обертального руху тіла навколо осі, що проходить через центр інерції.

Зв'язок між роботою, що здійснюється при обертанні тіла і зміною його кінетичної енергії:

$$A = \frac{J{\omega_2}^2}{2} - \frac{J{\omega_1}^2}{2}.$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 4.1 Човен довжиною $l = 3\,м$ і масою $m = 120\,кг$ стоїть на спокійній воді. На носі і кормі перебувають два рибалки масою $m_1 = 60\,кг$ і $m_2 = 90\,кг$ (рис.1). На скільки зміститься човен відносно води, якщо рибалки поміняються місцями?

Розв'язання

$x - ?$

$l = 3\,м,$

$m = 120\,кг,$

$m_1 = 60\,кг,$

$m_2 = 90\,кг.$

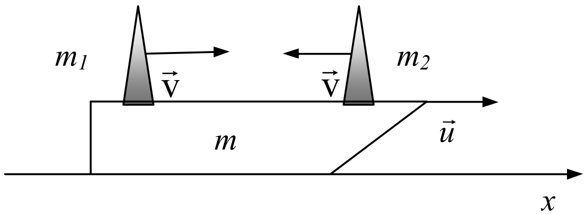

Рисунок 1

Запишемо закон збереження імпульсу для механічної системи „рибалки-човен". Врахуємо, що в початковий момент часу система була у стані спокою, а при русі рибалок зі швидкістю v відносно човна почнеться його рух із швидкістю u відносно дна озера. У вибраній системі відліку(відносно землі) закон збереження імпульсу має вигляд

$$m_1(\vec{v} + \vec{u}) + m_2(\vec{v} + \vec{u}) + m\vec{u} = 0\,. \qquad (1)$$

У проекції на вісь x співвідношення (1) запишеться так:

$$m_1(u + v) + m_2(v + u) + mu = 0\,.$$

Розв'яжемо це рівняння відносно u:

$$m_1 u + m_1 \mathrm{v} + m_2 \mathrm{v} - m_2 u + m u = 0\,,$$

$$m_1 u + m_2 u + m u = m_2 \mathrm{v} - m_1 \mathrm{v}\,,$$

$$u(m_1 + m_2 + m) = (m_2 - m_1)\mathrm{v}\,,$$

$$u = \frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + m}\mathrm{v}\,.$$

Помноживши обидві частини цього рівняння на час руху t, визначимо зміщення човна

$$ut = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m}\mathrm{v}t\,,$$

але $\mathrm{v}t = l$; $ut = x$.

Звідси

$$x = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m} l\,. \qquad (2)$$

Після підстановки числових значень величин у співвідношення (2) знайдемо x

$$x = \frac{60 - 90}{60 + 90 + 120} \cdot 3 = -\frac{90}{270} = -0{,}33\left(м\right).$$

Знак мінус свідчить про те, що переміщення відбулося в напрямку, протилежному напрямку осі х.

Відповідь: x = 0,33 *м*.

Приклад 4.2 Куля масою $m_1 = 1\,кг$ рухається зі швидкістю $\text{v}_1 = 4\,м/с$ і зіштовхується з кулею масою $m_1 = 2\,кг$, що рухається їй назустріч зі швидкістю $\text{v}_2 = 3\,м/с$ (рис.2). Які швидкості u_1 і u_2 куль після удару? Удар вважати абсолютно пружним, прямим, центральним.

Розв'язання

$u_1 - ?\quad u_2 - ?$

$m_1 = 1\,кг,$

$m_2 = 2\,кг,$

$\text{v}_1 = 4\,м/с,$

$\text{v}_2 = 3\,м/с.$

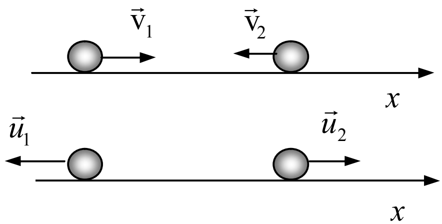

Рисунок 2

При пружному центральному ударі виконуються закони збереження імпульсу і механічної енергії. Запишемо їх для даної системи

$$\begin{cases} m_1\vec{\text{v}}_1 + m_2\vec{\text{v}}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2, \\ \dfrac{m_1\text{v}_1^2}{2} + \dfrac{m_2\text{v}_2^2}{2} = \dfrac{m_1u_1^2}{2} + \dfrac{m_2u_2^2}{2}. \end{cases} \qquad (1)$$

Спроектуємо рівняння (1) на вісь x

$$\begin{cases} m_1\text{v}_1 - m_2\text{v}_2 = -m_1u_1 + m_2u_2, \\ \dfrac{m_1\text{v}_1^2}{2} + \dfrac{m_2\text{v}_2^2}{2} = \dfrac{m_1u_1^2}{2} + \dfrac{m_2u_2^2}{2}. \end{cases} \qquad (2)$$

Розв'яжемо спільно систему рівнянь (2)

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_1 u_1 = m_2 u_2 + m_2 v_2, \\ m_1 v_1^2 - m_1 u_1^2 = m_2 u_2^2 - m_2 v_2^2. \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} m_1 (v_1 + u_1) = m_2 (u_2 + v_2), \\ m_1 (v_1 - u_1)(v_1 + u_1) = m_2 (u_2 - v_2)(u_2 + v_2). \end{cases} \tag{4}$$

Розділивши друге співвідношення на перше, отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} v_1 - u_1 = u_2 - v_2, \\ m_1 (v_1 + u_1) = m_2 (u_2 + v_2). \end{cases} \tag{5}$$

Визначивши u_1 з першого рівняння і підставивши його у друге, одержимо

$$\begin{cases} u_1 = v_1 - u_2 + v_2, \\ m_1 (v_1 + v_1 - u_2 + v_2) = m_2 (u_2 + v_2). \end{cases} \tag{6}$$

Після низки перетворень співвідношень (6) знайдемо u_2:

$$2 m_1 v_1 - m_1 u_2 + m_1 v_2 = m_2 u_2 + m_2 v_2,$$

$$2 m_1 v_1 + m_1 v_2 - m_2 v_2 = m_2 u_2 + m_1 u_2,$$

$$u_2 = \frac{2 m_1 v_1 + m_1 v_2 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \tag{7}$$

Підставивши дане рівняння у (6), отримаємо

$$u_1 = \mathrm{v}_1 - \frac{2m_1\mathrm{v}_1 + m_1\mathrm{v}_2 - m_2\mathrm{v}_2}{m_1 + m_2} + \mathrm{v}_2 =$$

$$= \frac{m_1\mathrm{v}_1 + m_2\mathrm{v}_1 - 2m_1\mathrm{v}_1 - m_1\mathrm{v}_2 + m_2\mathrm{v}_2 + m_1\mathrm{v}_2 + m_2\mathrm{v}_2}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{-m_1\mathrm{v}_1 + m_2\mathrm{v}_1 + 2m_2\mathrm{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{2m_2\mathrm{v}_2 - m_1\mathrm{v}_1 + m_2\mathrm{v}_1}{m_1 + m_2}. \qquad (8)$$

Підставивши числові значення величин у вирази (7) та (8), отримаємо

$$u_2 = \frac{2\cdot 1\cdot 4 + 1\cdot 3 - 2\cdot 3}{1+2} = \frac{5}{3} = 1,67\left(м/с\right),$$

$$u_1 = \frac{2\cdot 2\cdot 3 - 1\cdot 4 + 2\cdot 4}{1+2} = \frac{16}{3} = 5,33\left(м/с\right).$$

Нескладно одержати одиницю вимірювання отриманих величин - м/с.

Відповідь: u_1 = 5,33 *м/с*; u_2 = 1,67 *м/с*.

Приклад 4.3 Платформа у вигляді суцільного диска радіусом $R = 1,5\,м$ і масою $m_1 = 180\,кг$ обертається навколо вертикальної осі з частотою $\nu = 10\,хв^{-1}$. У центрі платформи стоїть людина масою $m_2 = 60\,кг$. Яку лінійну швидкість v відносно підлоги приміщення матиме людина, якщо вона перейде на край платформи (рис.3)?

Розв’язання

$\text{v}-?$
$m_1 = 180\,кг,$
$m_2 = 60\,кг,$
$\nu = 10\,хв^{-1} = \dfrac{1}{6}c^{-1},$
$R = 1{,}5\,м.$

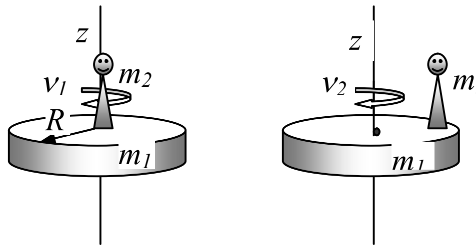

Рисунок 3

Згідно з умовою задачі, момент зовнішніх сил відносно осі обертання *z*, що збігається з геометричною віссю платформи, можна вважати таким, що дорівнює нулю. За цієї умови проекція L_z моменту імпульсу системи платформа - людина залишається сталою:

$$L_z = J_z\omega = const, \tag{1}$$

де J_z - момент інерції платформи з людиною відносно осі z; ω - кутова швидкість платформи.

Момент інерції системи дорівнює сумі моментів інерції тіл, що входять до складу системи, тому в початковому стані $J_z = J_1 + J_2$, а в кінцевому стані $J_z^{'} = J_1^{'} + J_2^{'}$.

З урахуванням цього співвідношення (1) набуде вигляду

$$\left(J_1 + J_2\right)\omega = \left(J_1^{'} + J_2^{'}\right)\omega^{'}, \tag{2}$$

де значення моментів інерції J_1 і J_2 платформи і людини відповідно належать до початкового стану системи; $J_1^{'}$ і $J_2^{'}$ - до кінцевого.

Момент інерції платформи відносно осі z під час переходу людини не змінюється: $J_1 = J_1^{'} = \frac{1}{2} m_1 R^2$. Момент інерції людини відносно тієї самої осі буде змінюватися. Якщо розглядати людину як матеріальну точку, то її момент інерції J_2 у початковому стані (в центрі платформи) можна вважати таким, що дорівнює нулю. У кінцевому стані (на краю платформи) момент інерції людини дорівнює $J_2^{'} = m_2 R^2$. Врахуємо, що $\omega = 2\pi\nu$, а $\omega = \frac{\mathrm{v}}{R}$, де ν - частота обертання платформи; v - швидкість людини відносно підлоги.

Підставимо у формулу (2) вирази для моментів інерції, початкової кутової швидкості обертання платформи з людиною і кінцевої кутової швидкості:

$$\left(\frac{1}{2} m_1 R^2 + 0\right) 2\pi\nu = \left(\frac{1}{2} m_1 R^2 + m_2 R^2\right) \mathrm{v} / R.$$

Після скорочення на R^2 і простих перетворень знаходимо швидкість

$$\mathrm{v} = 2\pi\nu R m_1 / \left(m_1 + 2m_2\right). \qquad (3)$$

Після підстановки числових значень фізичних величин у співвідношення (3) проведемо обчислення

$$\mathrm{v} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1{,}5 \cdot 180}{180 + 2 \cdot 60} = 1\left(м/с\right).$$

Перевіримо розмірність отриманої величини

$$\mathrm{v} = \frac{[v][R][m]}{[m]} = \frac{м}{с}.$$

Відповідь: $\mathrm{v} = 1\, м/с$.

Приклад 4.4 На лаві Жуковського стоїть людина і тримає в руках стрижень вертикально вздовж осі лави. Лава з людиною обертається з кутовою швидкістю $\omega_1 = 4\, рад/с$ (рис.4). З якою швидкістю ω_2 почне обертатися лава, якщо людина поверне стрижень так, що він набуде горизонтального положення. Сумарний момент інерції людини і лави $J = 5\, кг \cdot м^2$. Довжина стрижня $l = 1{,}8\, м$, його маса $m = 6\, кг$. Вважати, що центр мас стрижня з людиною розміщений на осі платформи.

Розв'язання

$\omega_2 - ?$

$\omega_1 = 4\, рад/с$,
$I = 5\, кг \cdot м^2$,
$m = 6\, кг$,
$l = 1{,}8\, м.$

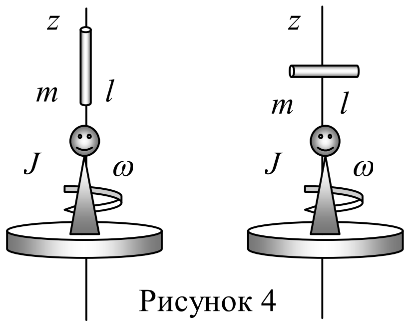

Рисунок 4

Для розв'язання задачі скористаємося законом збереження моменту імпульсу відносно осі z, навколо якої відбувається обертання:

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_{2`}, \tag{1}$$

де J_1 та J_2 – моменти інерції системи в початковий та кінцевий моменти часу; ω_1, ω_2 – відповідні кутові швидкості.

Момент інерції системи дорівнює сумі моментів інерції тіл, що входять в систему:

$$J_1 = J + J_1', \tag{2}$$

$$J_2 = J + J_2', \tag{3}$$

де J, J_1', J_2 – моменти інерції людини та лави до та після повороту стрижня.

Врахуємо, що

$$J_1' = 0; \; J_2' = \frac{1}{12}ml^2. \tag{4}$$

Після підстановки виразів (2) - (4) в (1) отримаємо

$$J\omega_1 = (J + \frac{1}{12}ml^2)\omega_2 .$$

Звідси

$$\omega_2 = \frac{J\omega_1}{J + \frac{1}{12}ml^2} . \tag{5}$$

Після підстановки числових значень фізичних величин у співвідношення (5) знайдемо

$$\omega_2 = \frac{5 \cdot 4}{5 + \frac{1}{12} 6(1,8)^2} = 3,02\left(рад/с\right).$$

Нескладно довести, що одиниця отриманої величини - рад/с.

Відповідь: $\omega_2 = 3,02\left(рад/с\right)$.

Приклад 4.5 Однорідний стрижень довжиною $l = 1\,м$ і масою $m_1 = 0,7\,кг$ підвішений на горизонтальній осі, що проходить через верхній кінець стрижня. В точку, яка міститься на відстані $\frac{2}{3}l$, абсолютно пружно вдаряє куля масою $m_2 = 5\,г$, що летить перпендикулярно до стрижня і його осі. Після удару стрижень відхилився на кут $\alpha = 60^0$ (рис.5). Визначити швидкість кулі.

Розв’язання

$\omega_2 - ?$

$m_1 = 0,7\,кг,$

$l = 1\,м,$

$m_2 = 5\,г,$

$\alpha = 60^0.$

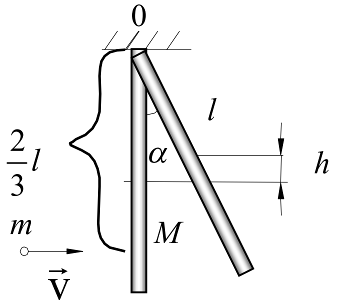

Рисунок 5

Запишемо закон збереження моменту імпульсу для системи „куля-стрижень”. Оскільки $m_2 << m_1$ і удар абсолютно пружний, будемо вважати, що швидкість кулі до v і після удару u однакова за модулем. Тоді можна записати

$$m_2\,\mathrm{v}\cdot\frac{2}{3}l\;=J\omega-m_2u\cdot\frac{2}{3}l\,, \qquad (1)$$

де ω – кутова швидкість стрижня; $J=\dfrac{m_1l^2}{3}$ - його момент інерції відносно точки О.

З урахуванням того, що $\mathrm{v}=u$, співвідношення набуде вигляду

$$4m_2\,\mathrm{v}=m_1\,l\,\omega\,. \qquad (2)$$

Скористаємося законом збереження енергії. У нижній точці стрижень має кінетичну енергію, у верхній – потенціальну, тобто

$$\frac{J\omega^2}{2}=m_1gh\,. \qquad (3)$$

З рисунка зрозуміло, що

$$h=\frac{l}{2}-\frac{l}{2}\cos\alpha=\frac{l}{2}(1-\cos\alpha)\,. \qquad (4)$$

Підставивши даний вираз у (1), отримаємо

$$\frac{1}{3}m_1l^2\,\frac{\omega^2}{2}=m_1g\,\frac{l}{2}(1-\cos\alpha)$$

або після скорочення та простих перетворень

$$\frac{1}{6}\omega^2 l = \frac{g}{2}(1-\cos\alpha),$$

$$\omega^2 l = 3g(1-\cos\alpha),$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g(1-\cos\alpha)}{l}}. \tag{5}$$

Підставимо рівняння (5) в (2) і розв'яжемо отримане співвідношення відносно v:

$$\text{v} = \frac{m_1}{4m_2}\sqrt{3gl(1-\cos\alpha)}. \tag{6}$$

Підставивши в рівняння (6) числові значення величин, отримаємо кінцевий результат

$$\text{v} = \frac{0,7}{4\cdot 0,005}\sqrt{3\cdot 1\cdot 9,8\left(1-\frac{1}{2}\right)} = 134\left(м/с\right).$$

Перевіримо розмірність отриманої величини

$$\text{v} = \frac{[M]}{[m]}\sqrt{[g][l]} = \frac{кг}{кг}\sqrt{м/с^2\cdot м} = \frac{м}{с}.$$

Відповідь: $\text{v} = 134\, м/с$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

4.1 Пружина жорсткістю $k = 500\frac{H}{м}$ стиснута силою $F = 100\,H$. Визначити роботу A зовнішньої сили, що додатково стискує пружину ще на $\Delta l = 2\,см$.

Відповідь: A = 2,1 *Дж.*

4.2 Розрахувати роботу A, виконану при рівноприскореному підніманні вантажу масою $m = 100$ кг на висоту $h = 4\,м$ за час $t = 2\,с$.

Відповідь: $A = 4,72\,кДж$.

4.3 Із шахти глибиною h =600 м піднімають кліть масою $m_1 = 3$ т на канаті, кожен метр якого має масу $m = 1,5\,кг$. Яка робота A виконується при піднятті кліті на поверхню Землі? Який коефіцієнт корисної дії η підіймального пристрою?

Відповідь: A = 30,2 *Дж*; η =0,87.

4.4 Знайти роботу A піднімання вантажу по похилій площині довжиною $l = 2\,м$, якщо маса вантажу $m = 100\,кг$, кут нахилу $\alpha = 30^0$, коефіцієнт тертя $\mu = 0,1$, а сам вантаж рухається з прискоренням $a = 1\,м/с^2$.

Відповідь: $A = 1,35\,кДж$.

4.5 Робота, витрачена на штовхання ядра, кинутого під кутом $\alpha = 30^0$ до горизонту, дорівнює $A = 216\,Дж$. Через який час та на якій відстані від місця кидання ядра воно впаде на землю? Маса ядра $m = 2\,кг$. Опором повітря знехтувати.

Відповідь: $t = 1,5\,с$; $\text{v} = 19,1\,м/с$.

4.6 Тіло масою $m = 1\,кг$, яке кинули з вишки у горизонтальному напрямку зі швидкістю $\text{v}_0 = 20\,м/с$, через $t = 3\,с$ впало на землю. Визначити кінетичну енергію W_K, яку мало тіло в момент удару об землю. Опором повітря знехтувати.

Відповідь: $W_K = 663\,Дж$.

4.7 З похилої площини висотою $h = 1\,м$ та довжиною $l = 10\,м$ сковзає тіло масою $m = 1\,кг$. Знайти: а) кінетичну енергію біля внизу біля похилої площини; б) швидкість тіла в тій самій точці; в) відстань, яку пройде тіло по горизонтальній частині шляху до зупинки. Коефіцієнт тертя на всьому шляху вважати сталим і таким, що дорівнює $\mu = 0{,}05$.

Відповідь: а) $W_K = 4{,}9\,Дж$; б) $v = 3{,}1\,м/с$; в) $S = 10\,м$.

4.8 На підлозі стоїть візок у вигляді довгої дошки з легкими колесами. На одному кінці дошки стоїть людина. Її маса $m_1 = 60\,кг$, маса дошки $m_2 = 20\,кг$. З якою швидкістю (відносно підлоги) буде рухатися візок, якщо людина піде уздовж дошки зі швидкістю (відносно дошки) $v = 1\,м/с$? Масою коліс і тертям знехтувати.

Відповідь: $v_1 = 0{,}75\,м/с$.

4.9 На скільки зміститься відносно берега човен довжиною $l = 3{,}5\,м$ і масою $m_1 = 200\,кг$, якщо людина масою $m_2 = 80\,кг$, яка стоїть на кормі, перейде на ніс човна? Вважати, що човен розташований перпендикулярно до берега.

Відповідь: $S = 1\,м$.

4.10 Два ковзанярі масами $m_1 = 80\,кг$ і $m_2 = 50\,кг$ тримаються за кінці довгого натягненого шнура і стоять нерухомо на льоду один проти іншого. Один з них починає вкорочувати шнур, вибираючи його зі швидкістю $v = 1\,м/с$. З якими швидкостями будуть рухатися по льоду ковзанярі? Тертям знехтувати.

Відповідь: $u_1 = 0{,}385\ м/с$; $u_2 = -0{,}615\ м/с$.

4.11 На залізничній платформі встановлено гармату. Маса платформи з гарматою $M = 15\,т$. Гармата стріляє вгору під кутом $\alpha = 60^0$ до горизонту в напрямку шляху. З якою швидкістю v_1 покотиться платформа внаслідок віддачі, якщо маса снаряда $m = 20\ кг$ і він вилітає зі швидкістю $v_2 = 600\ м/с$.

Відповідь: $v_1 = 0{,}4\ м/с$.

4.12 Куля масою $m_1 = 10\,кг$, що рухається зі швидкістю $v_1 = 4\,м/с$, зіткнулася з кулею масою $m_2 = 4\,кг$, швидкість якої $v_2 = 12\ м/с$. Вважаючи удар прямим, непружним, знайти швидкість u куль після удару в двох випадках: а) мала куля доганяє велику кулю; б) кулі рухаються назустріч одна одній.
Відповідь: а) $u = 6,30\ м/с$; б) $u = -0,57\ м/с$.

4.13 Дві кулі масами $m_1 = 2\,кг$ і $m_2 = 3\,кг$ рухаються зі швидкостями відповідно $v_1 = 8\ м/с$ і $v_2 = 4\ м/с$. Визначити приріст ΔU внутрішньої енергії куль в результаті їх абсолютно непружного зіткнення в двох випадках: а) менша куля наздоганяє більшу; б) кулі рухаються назустріч одна одній.
Відповідь: а) $\Delta U = 9,6\,Дж$; б) $\Delta U = 86,4\,Дж$.

4.14 Куля масою $m_1 = 2\,кг$ налітає на кулю масою $m_2 = 8\,кг$, що перебуває в стані спокою. Імпульс кулі, що налітає, $p_1 = 10\ кг \cdot м/с$. Удар вважати прямим, пружним. Визначити безпосередньо після удару: а) імпульси p_1' першої кулі і p_2' другої кулі; б) зміну Δp_1 імпульсу першої кулі; в) кінетичні енергії W_{K_1}', W_{K_2}' обох куль; г) зміну ΔW_{K_1} кінетичної енергії першої кулі; д) частку w_K кінетичної енергії, переданої першою кулею другій.
Відповідь: а) $p_1' = -6\ кг \cdot м/с$; $p_2' = 16\ кг \cdot м/с$;
б) $\Delta p_1 = -16\ кг \cdot м/с$; в) $W_{K_1}' = 9\,Дж$, $W_{K_2}' = 16\,Дж$;
г) $|\Delta W_{K_1}| = 16\,Дж$; д) $w_K = \dfrac{|\Delta W_{K_1}|}{W_{K_1}} = 0,64$.

4.15 Визначити найменшу висоту, з якої повинен скочуватись візок з людиною по жолобу, що переходить в петлю радіусом $r = 6\,м$, щоб не відірватися від нього у верхній точці петлі. Тертям знехтувати.
Відповідь: $H = 15\,м$.

4.16 Молот масою $m_1 = 5\,кг$ ударяє невеликий кусок заліза, що лежить на ковадлі. Маса ковадла $m_2 = 100\,кг$. Масою куска заліза знехтувати. Удар непружний. Визначити к.к.д. η удару молота за даних умов.

Відповідь: $\eta = 0{,}952$.

4.17 Ланцюг довжиною $l = 2\,\text{м}$ лежить на столі, одним кінцем звисаючи зі столу. Якщо довжина частини, що звішується зі столу, перевищує $\frac{l}{3}$, то ланцюг зісковзує зі столу. Визначити швидкість v ланцюга в момент відриву від столу.

Відповідь: v=4,17 $м/с$.

4.18 Людина стоїть у центрі горизонтальної круглої платформи, що обертається навколо осі, яка проходить через центр маси людини та центр маси платформи. Людина тримає в руках горизонтально штангу довжиною $l = 2\,м$ м та масою $m = 18\,кг$. Платформа при цьому обертається з частотою $\nu = 0{,}5\,с^{-1}$. Людина повертає штангу в вертикальній площині на кут $\varphi = 60^0$. Визначити роботу, яку виконала при цьому людина. Момент інерції людини вважати еквівалентним масі $m_0 = 50\,кг$, що міститься на відстані $r_0 = 0{,}04\,м$ від осі обертання. Момент інерції платформи не враховувати.

Відповідь: $A = 85{,}7$ $Дж$.

4.19 Горизонтальна платформа масою $m_1 = 100\,кг$ обертається навколо вертикальної осі, що проходить через центр платформи, з частотою $\nu_1 = 10\,хв^{-1}$. Людина масою $m_2 = 60\,кг$ стоїть при цьому на краю платформи. З якою кутовою швидкістю ω_2 почне обертатися платформа, якщо людина перейде від краю платформи до її центра? Вважати платформу круглим, однорідним диском, а людину – матеріальною точкою.

Відповідь: $\omega_2 = 0{,}37\,с^{-1}$.

4.20 Яку роботу виконує людина при переході від краю платформи до її центра в умовах попередньої задачі? Радіус платформи дорівнює $R = 1,5\,м$.

Відповідь: $A = 162\,Дж$.

4.21 Платформа, що має форму диска, може обертатися навколо вертикальної осі. На краю платформи стоїть людина. На який кут φ повернеться платформа, якщо людина піде вздовж краю платформи і, обійшовши її, повернеться в початкову (на платформі) точку? Маса платформи $m_1 = 240\,кг$, маса людини $m_2 = 60\,кг$.

Відповідь: $\varphi = \frac{2}{3}\pi$.

4.22 Людина, масою $m_1 = 60\,кг$ стоїть на нерухомій платформі масою $m_2 = 100\,кг$. З якою частотою стане обертатися платформа, якщо людина буде рухатися по колу радіусом $r = 5\,м$ навколо осі обертання? Швидкість руху людини відносно платформи дорівнює $4\,км/год$. Радіус платформи складає $R = 10\,м$. Вважати, що платформа є однорідним диском, а людина – точковою масою.

Відповідь: $\nu = 8,17\,Гц$

4.23 Однорідний стрижень довжиною $l = 1\,м$ і масою $M = 0,7\,кг$ підвішений на горизонтальній осі, що проходить через верхній кінець стрижня. В точку, що віддалена від осі на $\frac{2}{3}l$, абсолютно пружно вдаряє куля масою $m = 5\,г$, що летить перпендикулярно до стрижня і його осі. Після удару стрижень відхиляється на кут $\alpha = 60^\circ$. Визначити швидкість кулі.

Відповідь: $v = 269\ м/с$.

4.24 Однорідний диск масою $m_1 = 0,2\,кг$ і радіусом $R = 20\,см$ може вільно обертатися навколо горизонтальної осі z, що проходить через точку O перпендикулярно до площини диска (рис. 6). В точку A на поверхні диска попадає пластилінова кулька, що летить горизонтально (перпендикулярно до осі z) зі швидкістю $\mathrm{v} = 10$ $м/с$ і прилипає до його поверхні. Маса кульки дорівнює $m_2 = 10\ г$. Визначити кутову швидкість ω диска і лінійну швидкість u точки A на диску в початковий момент часу. Розрахунок провести для таких значень a і b: а) $a = b = R$; б) $a = \frac{R}{2}$, $b = R$; в) $a = \frac{2}{3}R$, $b = \frac{R}{2}$; г) $a = \frac{R}{3}$, $b = \frac{2}{3}R$.

Відповідь: а) $\omega = 4,55\ рад/с$, $u = 0,909$ $м/с$;

б) $\omega = 2,27\ рад/с$, $u = 0,454$ $м/с$;

в) $\omega = 3,03\ рад/с$, $u = 0,303$ $м/с$;

г) $\omega = 1,52\ рад/с$, $u = 0,202$ $м/с$.

4.25 Кулька, що скочується без проковзування по похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 30^0$, вдаряється об похилу площину і після удару підскакує на висоту $h = 12,5\ см$ (рис. 7). Знехтувавши тертям і вважаючи удар абсолютно пружним, визначити шлях S, який пройшла кулька по похилій площині.

Відповідь: $S = 1,4\ м$.

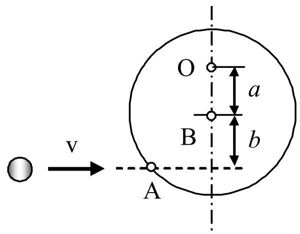

Рисунок 6

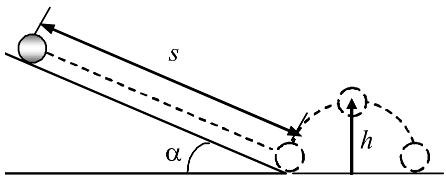

Рисунок 7