3 ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

3.1 Основне рівняння динаміки обертального руху відносно нерухомої осі

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

де $\vec{M}$ - момент сили, що діє на тіло; $\vec{L}$ - момент імпульсу тіла.

Основне рівняння динаміки обертального руху в інтегральній формі (у випадку, коли момент інерції J є константою)

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon},$$

де $\vec{\varepsilon}$ – кутове прискорення.

3.2 Момент імпульсу тіла, що обертається відносно деякої осі:

$$\vec{L} = \left[\vec{r}, m\vec{\mathrm{v}}\right],$$

де $\vec{r}$ - радіус-вектор; $m\vec{\mathrm{v}}$ - імпульс тіла. **Момент імпульсу** можна також виразити через кутові величини:

$$\vec{L} = J\vec{\omega},$$

де $\vec{\omega}$ - кутова швидкість.

3.3 Момент сили F, що діє на тіло відносно осі обертання:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right].$$

Модуль моменту сили визначається як

$$M = Fr\sin\alpha = Fl\,,$$

де α - кут між радіусом – вектором та вектором сили; l – **плече сили** – найкоротша відстань від осі обертання до лінії дії сили.

3.4 Момент інерції матеріальної точки

$$J = mr^2\,,$$

де m - маса точки; r - відстань до осі обертання.

Момент інерції твердого тіла

$$J = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2\,,$$

де r_i - відстань елемента маси Δm_i від осі обертання.

Це співвідношення в інтегральній формі має вигляд

$$J = \int r^2 dm\,.$$

Моменти інерції деяких тіл наведені в таблиці 1.

Якщо тіло однорідне, тобто його густина ρ однакова по всьому об’єму, то

$$dm = \rho dV \;\text{ і }\; J = \rho\int r^2 dV\,,$$

де V - об’єм тіла.

Теорема Штейнера. Момент інерції тіла відносно довільної осі дорівнює

$$J = J_0 + ma^2,$$

де J_0 – момент інерції цього тіла відносно осі, що проходить через його центр тяжіння паралельно заданій осі; a – відстань між осями; m – маса тіла.

Таблиця 1 – Моменти інерції деяких тіл

Тіло	Вісь, відносно якої визначається момент інерції	Формула для моменту інерції
Однорідний тонкий стрижень масою m і довжиною l	Проходить через центр тяжіння стрижня перпендикулярно до нього	$J = \frac{ml^2}{12}$
	Проходить через кінець стрижня перпендикулярно до нього	$J = \frac{ml^2}{3}$
Тонке кільце, обруч, труба радіусом R і масою m, маховик радіусом R і масою m, розподіленою вздовж обода	Проходить через центр тяжіння перпендикулярно до площини основи	$J = mR^2$
Круглий однорідний диск (циліндр) радіусом R і масою m	Проходить через центр тяжіння перпендикулярно до площини основи	$J = \frac{mR^2}{2}$
Однорідна куля масою m і радіусом R	Проходить через центр кулі	$J = \frac{2mR^2}{5}$

3.6 Робота сталого моменту *M* сили, що діє на тіло, яке обертається:

$$A = M\varphi,$$

де φ - кут повороту тіла.

3.7 Миттєва потужність, що розвивається при обертанні тіла:

$$N = M\omega .$$

3.8 Кінетична енергія тіла, що обертається:

$$W_K = \frac{J\omega^2}{2} .$$

3.9 Кінетична енергія тіла, що котиться по площині без ковзання:

$$W_K = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} ,$$

де $\frac{m\mathrm{v}^2}{2}$ - кінетична енергія поступального руху тіла; v – швидкість центра інерції тіла; $\frac{J\omega^2}{2}$ - кінетична енергія обертального руху тіла навколо осі, що проходить через центр інерції.

3.10 Зв'язок між роботою, яка виконується при обертанні тіла, та зміною кінетичної енергії

$$A = \frac{J{\omega_2}^2}{2} - \frac{J{\omega_1}^2}{2} .$$

Зв'язок між величинами, що характеризують поступальний і обертальний рух, наведений у таблиці 2.

Таблиця 2 - Порівняння законів, що описують поступальний та обертальний рух

Поступальний рух	**Обертальний рух**
Основний закон динаміки	
$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$
$\vec{F} = m\vec{a}$	$M = J\varepsilon$
Робота і потужність	
$A = \vec{F}\vec{s}$	$A = \vec{M}\vec{\varphi}$
$N = \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{v}}$	$N = \vec{M}\vec{\omega}$
Кінетична енергія	
$W_K = \dfrac{m\mathrm{v}^2}{2}$	$W_K = \dfrac{J\omega^2}{2}$

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 3.1 Знайти момент інерції тонкого диска і суцільного циліндра відносно їх поздовжніх геометричних осей.

Розв'язання

$I - ?$

$\rho = const.$

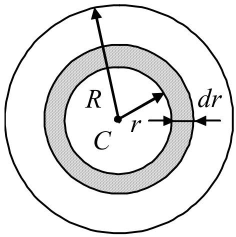

Рисунок 1

Будемо вважати, що диск та циліндр однорідні, тобто речовина розподілена в них з постійною густиною. Нехай вісь z проходить через центр диска C перпендикулярно до його площини (рис. 1). Розглянемо нескінченно тонке кільце з внутрішнім радіусом r і зовнішнім $r + dr$. Площа такого кільця дорівнює $dS = 2\pi r dr$. Відповідно його момент інерції визначається співвідношенням $dJ = r^2 dm$. Момент інерції всього диска - $J = \int r^2 dm$. Враховуючи однорідність диска знайдемо

$$dm = \frac{mdS}{S} = \frac{m2\pi rdr}{\pi R^2} = \frac{2mrdr}{R^2},$$

де $S = \pi R^2$ – площа всього диска. Вносячи цей вираз під знак інтеграла, отримаємо

$$J = \int_0^R r^2 \frac{2mrdr}{R^2} = \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2}\frac{r^4}{4}\bigg|_0^R = \frac{1}{2}mR^2 . \qquad (1)$$

Формула (1) визначає також момент інерції однорідного суцільного циліндра відносно його поздовжньої геометричної осі.

Відповідь: $J = \frac{1}{2} mR^2$.

Приклад 3.2 По дотичній до шківа маховика у вигляді диска діаметром $D = 75\,см$ і масою $m = 40\,кг$ прикладена сила $F = 1\,кН$ (рис.2). Визначити кутове прискорення ε і частоту обертання ν маховика через час $t = 10\,с$ після початку дії сили, якщо відстань, на якій прикладається сила (радіус шківа) дорівнює $r = 12\,см$. Силою тертя знехтувати.

Розв'язання

$\varepsilon - ?\quad \nu - ?$

$D = 75\,см = 0,75\,м,$

$m = 40\,кг,$

$F = 1\,кН = 10^3\,Н,$

$t = 10\,с,$

$r = 12\,см = 0,12\,м.$

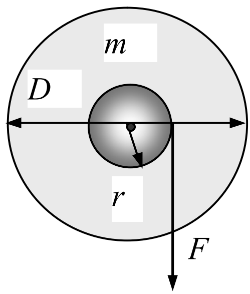

Рисунок 2

Запишемо для маховика основне рівняння динаміки обертального руху

$$M = J\varepsilon, \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{M}{J}, \tag{1}$$

де ε - кутове прискорення маховика; J – момент інерції; M – момент прикладеної сили.

Момент інерції диска дорівнює

$$J = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}mD^2, \tag{2}$$

де r – радіус диска; D - його діаметр.

Момент сили F знайдемо із співвідношення

$$M = Fr\sin\alpha = Fl, \tag{3}$$

де l – плече сили.

Підставивши співвідношення (2), (3) в (1), отримаємо

$$\varepsilon = \frac{Fr}{\frac{1}{8}mD^2} = \frac{8Fr}{mD^2}. \tag{4}$$

Рух під дією сталої сили є рівноприскореним. Звідси кутова швидкість диска

$$\omega = \varepsilon t = \frac{8Fr}{mD^2}t.$$

За визначенням $\omega = 2\pi\nu$, де ν - частота обертання диска. У результаті отримаємо

$$2\pi\nu = \frac{8Fr}{mD^2}t,$$

$$\nu = \frac{4Ftr}{\pi m D^2}. \tag{5}$$

Підставивши числові значення величин у співвідношення (4), (5), знайдемо остаточно

$$\varepsilon = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 0{,}12}{40 \cdot (0{,}75)^2} = 42{,}67\left(рад/с^2\right),$$

$$\nu = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 0{,}12}{3{,}14 \cdot 40 \cdot (0{,}75)^2} = \left(67{,}9\,с^{-1}\right).$$

Перевіримо розмірності отриманих величин:

$$\left[\varepsilon\right] = \frac{\left[F\right] \cdot \left[r\right]}{\left[m\right] \cdot \left[D\right]^2} = \frac{Н \cdot м}{кг \cdot м^2} = \frac{кг \cdot м / с^2}{кг \cdot м} = \frac{1}{с^2},$$

$$\left[\nu\right] = \frac{\left[F\right]\left[t\right]\left[r\right]}{\left[m\right]\left[D\right]^2} = \frac{Н \cdot с \cdot м}{кг \cdot м^2} = \frac{кг \cdot м / с^2 \cdot с}{кг \cdot м} = \frac{1}{с}.$$

Відповідь: $\varepsilon = 42{,}67\ рад/с^2$; $\nu = 67{,}9\,с^{-1}$.

Приклад 3.3 Блок, що має форму диска масою $m = 0{,}4\,кг$, обертається під дією сили натягу нитки, до кінців якої підвішені тягарці масами $m_1 = 0{,}3\,кг$ і $m_2 = 0{,}7\,кг$ (рис.3). Визначити сили натягу T_1 і T_2 нитки з обох боків блока.

Розв'язання

$T_1 - ?\quad T_2 - ?$

$m = 0,4\,кг,$

$m_1 = 0,3\,кг,$

$m_2 = 0,7\,кг.$

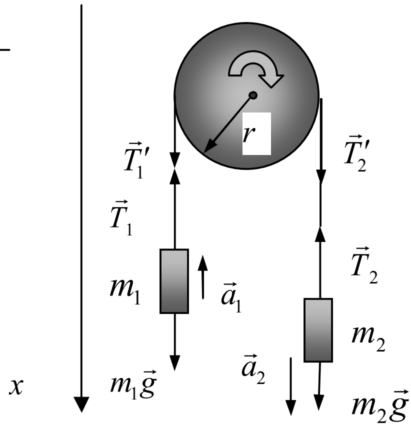

Рисунок 3

Для розв'язання задачі скористаємося рівняннями обертального і поступального руху тіл. Оскільки $m_2>m_1$, то $m_2g>T_2$. Рівнодійна сил тяжіння і натягу нитки спричиняє рівноприскорений рух системи, при цьому обертання блока здійснюється за годинниковою стрілкою (рис.3). Для тіл, що рухаються поступально, можна записати другий закон Ньютона

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1, \\ m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_1, \end{cases}$$

де g - прискорення вільного падіння.

У проекціях на вісь x ці рівняння будуть мати вигляд

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = -m_1 a_1, & (1) \\ m_2 g - T_2 = m_2 a_2. & (2) \end{cases}$$

Згідно з основним рівнянням обертального руху для блока отримаємо вираз

$$M = J\varepsilon\,, \tag{3}$$

де M – момент сил, прикладених до блока; J – момент інерції блока; ε - кутове прискорення блока.

Визначимо обертальний момент сил. Врахуємо при цьому, що прискорення вантажів однакові $a_1 = a_2 = a$. Сили натягу ниток діють не тільки на вантажі, але й на диск. За третім законом Ньютона сили $\vec{T}_1'$ і $\vec{T}_2'$, що прикладені до блока, дорівнюють відповідно силам $\vec{T}_1$ і $\vec{T}_2$, але протилежні за напрямком. При русі вантажів блок прискорено обертається за годинниковою стрілкою, отже, $T_2' > T_1'$. Для обертального моменту сил, що прикладені до блока, можна записати

$$M = (T_2' - T_1')r\,. \tag{4}$$

Кутове прискорення блока пов'язане з лінійним прискоренням вантажів співвідношенням

$$\varepsilon = \frac{a}{r}\,. \tag{5}$$

Підставивши вирази (4) та (5) у (5), отримаємо

$$(T_2' - T_1')r = J\frac{a}{r}\,. \tag{6}$$

Момент інерції блока дорівнює

$$J = \frac{1}{2} m r^2 . \qquad (7)$$

Тоді

$$(T_2' - T_1') r = \frac{1}{2} m r^2 \frac{a}{r} .$$

Після скорочення отримаємо

$$T_2' - T_1' = \frac{ma}{2} . \qquad (8)$$

Враховуючи, що $T_2' = T_2$, а $T_1' = T_1$, одержимо

$$T_2 - T_1 = \frac{ma}{2} . \qquad (9)$$

Розв’яжемо спільно систему трьох рівнянь (1), (2) і (9). З рівняння (1) a дорівнює

$$a = \frac{T_1 - mg}{m_1} . \qquad (10)$$

Підставивши це рівняння у (2), отримаємо

$$m_2 g - T_2 = m_2 \frac{T_1 - m_1 g}{m_1}$$

або

$$T_2 = m_2 g - \frac{m_2 (T_1 - m_1 g)}{m_1} . \qquad (11)$$

Підставивши дане рівняння у (9), знайдемо

$$m_2 g - \frac{m_2(T_1 - m_1 g)}{m_1} - T_1 = \frac{m}{2}\frac{T_1 - m_1 g}{m_1}. \qquad (12)$$

Після низки перетворень співвідношення (12) визначимо T_1

$$2(m_1 m_2 g - m_2 T_1 + m_1 m_2 g - T_1 m_1) = mT_1 - mm_1 g,$$
$$4m_1 m_2 g - 2m_2 T_1 - 2m_1 T_1 - mT_1 + mm_1 g = 0,$$
$$2m_2 T_1 + 2m_1 T_1 + mT_1 = 4m_1 m_2 g + mm_1 g,$$

$$T_1 = \frac{(4m_1 m_2 + mm_1)g}{2m_2 + 2m_1 + m} = \frac{m_1 g(4m_1 + m)}{2(m_1 + m_2) + m}. \qquad (13)$$

Підставивши даний вираз (13) у (11), отримаємо

$$T_2 = m_2 g - \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{g(4m_1 m_2 + mm_1)}{2m_2 + 2m_1 + m} - m_1 g\right). \qquad (14)$$

Після підстановки числових значень величин у співвідношення (13) та (14) отримаємо кінцевий результат:

$$T_1 = \frac{0,3\cdot 9,8(4\cdot 0,3 + 0,4)}{2(0,3 + 0,7) + 0,4} = 1,96(H),$$

$$T_2 = 0,7\cdot 9,8 - \frac{0,7}{0,3}\left(\frac{0,3\cdot 9,8(4\cdot 0,3 + 0,4)}{2(0,3 + 0,7) + 0,4} - 0,3\cdot 9,8\right) = 9,15(H).$$

Зрозуміло, що одиниця вимірювання отриманих величин - ньютон.

Відповідь: T_1=1,96 Н; T_2=9,15 Н.

Приклад 3.4 По горизонтальній площині котиться диск зі швидкістю v=8 $м/с$ (рис.4). Визначити коефіцієнт опору, якщо диск зупинився, пройшовши шлях $S = 18\,м$.

Розв'язання

$\mu - ?$

v=8 $м/с$,
$S = 18\,м.$

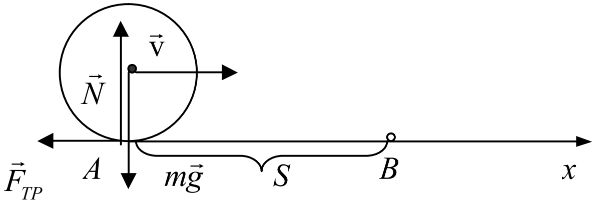

Рисунок 4

Для розв'язання задачі скористаємось законом збереження енергії. У точці A (рис.4) тіло має кінетичну енергію W_K, яка складається з енергії поступального та обертального руху. У точці B ця енергія дорівнює 0. Кінетична енергія витрачається на виконання роботи проти неконсервативних сил (сили тертя $F_{тр}$):

$$\Delta W_K = W_{KB} - W_{KA} = A_{тр}, \qquad (1)$$

$$\Delta W_K = -W_{KA} = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{m\text{v}^2}{2}, \qquad (2)$$

де J - момент інерції диска; ω - його кутова швидкість.
Робота, що здійснюється тілом, дорівнює

$$A = -FS = -\mu mgS, \qquad (3)$$

де μ - коефіцієнт тертя.
Підставивши співвідношення (1) і (2) в (3), отримаємо

$$\frac{J\omega^2}{2}+\frac{m\text{v}^2}{2}=\mu mgS\,. \qquad (4)$$

Для диска момент інерції дорівнює

$$J=\frac{1}{2}mR^2\,, \qquad (5)$$

де R - радіус диска.

Кутову швидкість обертання диска знайдемо із співвідношення

$$\omega=\frac{\text{v}}{R}\,. \qquad (6)$$

Звідси, підставивши вирази (5) і (6) у (4), отримаємо

$$\frac{1}{2}mR^2\frac{\text{v}^2}{2R^2}+\frac{m\text{v}^2}{2}=\mu mgS\,. \qquad (7)$$

Після низки перетворень це співвідношення набуде вигляду

$$\frac{\text{v}^2}{4}+\frac{\text{v}^2}{2}=\mu gS\,. \qquad (8)$$

Із виразу (8) знайдемо μ:

$$\mu=\frac{3\text{v}^2}{4gS}\,. \qquad (9)$$

Після підстановки числових значень величин у (9) отримаємо

$$\mu = \frac{3 \cdot 8^2}{4 \cdot 9,8 \cdot 18} = 0,27 .$$

Перевіримо одиниці отриманої величини

$$[\mu] = \frac{[v]^2}{[g] \cdot [S]} = \frac{(м/с)^2}{м/с^2 \cdot м} = 1 .$$

Відповідь: $\mu = 0,27$.

Приклад 3.5 Маховик у вигляді диска, маса якого $m = 20\,кг$ обертався із частотою $\nu = 480\,хв^{-1}$, а потім після припинення дії сили внаслідок тертя зупинився. Знайти момент M сили тертя у двох випадках: ***1*** маховик зупинився через $t = 50\,с$; ***2*** маховик до повної зупинки виконав $N = 200$ обертів. Радіус маховика $r = 20\,см$. Момент сили тертя вважати сталим.

Розв'язання

$M - ?$

$m = 20\,кг,$

$\nu = 480\,хв^{-1} = 8\,с^{-1},$

$r = 20\,см = 0,2\,м,$

$t = 50\,с,$

$N = 200.$

1 Згідно з основним законом динаміки обертального руху зміна моменту імпульсу ΔL обертового тіла дорівнює добутку моменту сили M , що діє на тіло, на час Δt дії цього моменту

$$\Delta L = M \Delta t . \qquad (1)$$

З іншого боку зміна моменту імпульсу визначається співвідношенням

$$\Delta L = J\omega_2 - J\omega_1 , \qquad (2)$$

де J - момент інерції маховика; ω_1 та ω_2 - початкова та кінцева кутові швидкості. Згідно з умовою задачі $\omega_2 = 0$, а $\Delta t = t$, тоді після підстановки (2) в (1) з урахуванням вищезазначеного отримаємо для моменту сили вираз

$$M = -\frac{J\omega_1}{t} . \qquad (2)$$

Момент інерції диска відносно його геометричної осі дорівнює

$$J = \frac{mR^2}{2} . \qquad (3)$$

Підставимо вираз (3) у формулу (2) та отримаємо

$$M = -\frac{mR^2\omega_1}{2t} .$$

Кутова швидкість пов’язана з частотою співвідношенням

$$\omega = 2\pi\nu , \qquad (4)$$

тоді

$$M = -\frac{mR^2\pi\nu}{t} . \qquad (5)$$

Підставимо числові значення у (5) та виконаємо розрахунки

$$M = -\frac{50\cdot 0{,}2^2\cdot 3{,}14\cdot 8}{50} \quad -1\left(Н\cdot м\right).$$

Виконаємо перевірку розмірності

$$\left[M\right] = -\frac{\left[m\right]\left[R\right]^2\left[v\right]}{\left[t\right]} = \frac{кг\cdot м^2\cdot с^{-1}}{с} \quad \frac{кг\cdot м^2}{с^2} \quad Н\cdot м\,.$$

2 Умовою задачі задана кількість обертів, виконаних маховиком до зупинки, тому ми можемо визначити його кутове переміщення

$$\varphi = 2\pi N\,. \tag{6}$$

Застосуємо співвідношення між роботою, яка виконується при обертанні тіла та зміною кінетичної енергії

$$A = \frac{J\omega_2^{\;2}}{2} - \frac{J\omega_1^{\;2}}{2}\,,$$

або з урахуванням, що $\omega_2 = 0$:

$$A = -\frac{J\omega_1^{\;2}}{2}\,. \tag{7}$$

Робота при обертальному русі визначається за формулою

$$A = M\varphi\,. \tag{8}$$

Прирівняємо (7) та (8)

$$-\frac{J\omega_1^{\,2}}{2} = M\varphi ,$$

звідки знайдемо момент сили, врахувавши (3),(4) та (6):

$$M = -\frac{J\omega_1^{\,2}}{2\varphi} = -\frac{mR^2\left(2\pi\nu\right)^2}{2\cdot 2\cdot 2\pi N} = -\frac{mR^2\pi\nu^2}{2N} .$$

Підставимо числові значення та виконаємо розрахунки

$$M = -\frac{50\cdot 0{,}2^2\cdot 3{,}14\cdot 8^2}{400} = -1\left(H\cdot м\right).$$

Знак мінус показує, що момент сили тертя виконує гальмівну дію.

Перевіримо розмірність отриманих величин

$$\left[M\right] = -\frac{\left[m\right]\left[R\right]^2\left[\nu\right]^2}{\left[N\right]} = \frac{кг\cdot м^2\cdot\left(c^{-1}\right)^2}{1} = \frac{кг\cdot м^2}{c^2} = H\cdot м .$$

Відповідь: 1) $M = -1H$; 2) $M = -1H$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

3.1 Знайти момент інерції тонкого однорідного стрижня довжиною l і масою m відносно перпендикулярної осі, що проходить: а) через один із кінців стрижня; б) через середину стрижня; в) на відстані $a = \frac{1}{4}l$ від одного з кінців стрижня.

Відповідь: а) $J = \frac{ml^2}{3}$; б) $J = \frac{ml^2}{12}$; в) $J = \frac{7ml^2}{48}$.

3.2 Визначити момент інерції системи, яка складається з чотирьох точкових мас m, розташованих у вершинах квадрата із стороною a, відносно осі, що проходить через центр квадрата у випадку, коли вісь лежить в площині квадрата та утворює з діагоналлю гострий кут, не рівний 45^0.

Відповідь: $J = ma^2$.

3.3 Система складається з чотирьох кульок масами 1, 2, 3 г та 4 г, які містяться у вершинах квадрата із стороною 10 см. Визначити момент інерції системи відносно осі, перпендикулярної до площини квадрата та проходить через кульки: а) першу; б) другу; в) третю; г) четверту.

Відповідь: $а)\ J = 10,24\cdot 10^{-4}\ кг\cdot м^2;\ б)\ J = 9,66\cdot 10^{-4}\ кг\cdot м^2;$
$в)\ J = 11,41\cdot 10^{-4}\ кг\cdot м^2;\ г)\ J = 6,82\cdot 10^{-4}\ кг\cdot м^2.$

3.4 Система складається з чотирьох кульок масами 1, 2, 3г та 4 г, які розміщені на одній прямій. Відстань між сусідніми кульками 10 см. Визначити момент інерції системи відносно осі, перпендикулярної прямій, на якій містяться кульки і яка проходить через кульки: а) першу; б) другу; в) третю; г) четверту.

Відповідь: $а)\ J = 5\cdot 10^{-4}\ кг\cdot м^2;\ б)\ J = 2\cdot 10^{-4}\ кг\cdot м^2;$
$в)\ J = 1\cdot 10^{-4}\ кг\cdot м^2;\ г)\ J = 2\cdot 10^{-4}\ кг\cdot м^2.$

3.5 Знайти момент інерції та момент імпульсу Земної кулі відносно осі обертання.

Відповідь: $J = 9,7 \cdot 10^{37}\ кг \cdot м^2$; $L\ = 7 \cdot 10^{33}\ кг \cdot м^2 / с$.

3.6 Тонкий однорідний стрижень довжиною $l = 50$ см і масою $m = 400$ г обертається з кутовим прискоренням $\varepsilon = 3\ рад/с^2$ навколо осі, що проходить перпендикулярно до стрижня через його середину. Визначити обертальний момент M .

Відповідь: $M = 0,025\, Н \cdot м$.

3.7 Куля масою $m = 10\, кг$, радіус якої складає $R = 20\, см$, обертається навколо осі, що проходить через його центр. Рівняння обертання кулі має вигляд $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, де $B = 4\, рад/с^2$, $C \quad -1\, рад/с^3$. Знайти закон зміни моменту сил, які діють на кулю. Визначити момент сили в момент часу $t = 2\, с$.

Відповідь: $M = -0,64\, Н \cdot м$.

3.8 Вал масою $m = 100\, г$, радіус якого складає $R = 5\, см$, обертався із частотою $\nu = 8\, с^{-1}$. До циліндричної поверхні вала притисли гальмівну колодку з силою $F = 40\, Н$, під дією якої вал зупинився через $t = 40\, с$. Визначити коефіцієнт тертя μ між колодкою та валом.

Відповідь: $\mu = 0,31$.

3.9 Двигун рівномірно обертає маховик. Після вимкнення двигуна маховик протягом $t = 30\, с$ виконує $N = 120$ обертів і зупиняється. Момент інерції маховика $I = 0,3\, кг \cdot м^2$. Визначити потужність двигуна при рівномірному обертанні маховика.

Відповідь: $N = 26\, Вт$.

3.10 Яку роботу потрібно виконати, щоб збільшити частоту обертання маховика масою $m = 0,5\, кг$ від 0 до 120 $хв^{-1}$? Вважати, що маса маховика розподілена рівномірно по ободу. Тертям знехтувати.

Відповідь: $A = 22,2\, кДж$.

3.11 Махове колесо, яке має момент інерції $J = 245\, кг \cdot м^2$, під час обертання виконує $20\, об/с$. Через хвилину після того, як на колесо припинив діяти обертальний момент, воно зупинилося. Знайти: а)момент сил тертя; б) кількість обертів, які виконало колесо до зупинки після припинення дії сил.

Відповідь: $M = 513\,Н \cdot м$; $N = 600$ обертів.

3.12 Куля і суцільний циліндр однакової маси, виготовлені з одного і того самого матеріалу, котяться без ковзання з однаковою швидкістю. Визначити, у скільки разів кінетична енергія кулі менша за кінетичну енергію циліндра.

Відповідь: $\dfrac{W_{K_2}}{W_{K_1}} = 1,07$.

3.13 Диск масою $2\,кг$ котиться без ковзання по горизонтальній площині із швидкістю $4\,4\,м/с$. Знайти кінетичну енергію диска.

Відповідь: $W_K = 24\,Дж$.

3.14 Обруч і диск мають однакову масу і котяться без ковзання з однаковою лінійною швидкістю v. Кінетична енергія обруча дорівнює $40\,Дж$. Знайти кінетичну енергію диска.

Відповідь: $W_K = 29,4\,Дж$.

3.15 Махове колесо починає обертатися з кутовим прискоренням $\varepsilon = 0,5\dfrac{рад}{с^2}$. Через $t_1 = 15\,с$ після початку руху його момент імпульсу дорівнює $L = 73,5\,Н \cdot с \cdot м$. Знайти кінетичну енергію колеса через $t_2 = 20\,с$ після початку руху.

Відповідь: $W_K = 440\,Дж$.

3.16 Знайти відносну похибку, яка виникає, якщо під час визначення кінетичної енергії кулі, що котиться, не враховувати обертання кулі.

Відповідь: $\delta = 40\%$.

3.17 Знайти лінійні швидкості руху центрів мас: а) кулі; б) диска та обруча, які скочуються без ковзання з похилої площини висотою h.

Відповідь: $v_1 = \sqrt{\frac{10}{7} gh}$; $v_2 = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$; $v_3 = \sqrt{gh}$.

3.18 Тонкий однорідний стрижень довжиною $l = 1\ м$ може вільно обертатися навколо горизонтальної осі, що проходить через точку О на стрижні (рис. 5). Стрижень відхилили від вертикалі на кут α і відпустили. Визначити для початкового моменту часу кутове ε і тангенціальне a_τ прискорення точки В на стрижні. Розрахунок виконати для таких випадків: а) $a = 0$, $b = \frac{2}{3} l$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$; б) $a = \frac{l}{3}$, $b = l$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$; в) $a = \frac{l}{4}$, $b = \frac{l}{2}$, $\alpha = \frac{2}{3}\pi$.

Відповідь:

а) $\varepsilon = 14,7\ рад/с^2$, $a_\tau = g = 9,80\ м/с^2$; б) $\varepsilon = 12,7\ рад/с^2$, $a_\tau = 8,49\ м/с^2$; в) $\varepsilon = 14,6\ рад/с^2$, $a_\tau = 7,27\ м/с^2$.

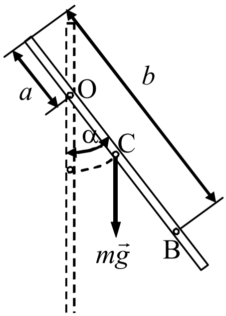

Рисунок 5

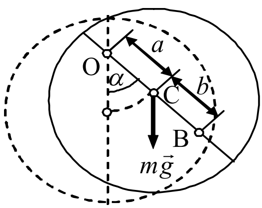

Рисунок 6

3.19 Однорідний диск радіусом $R = 10\ см$ може вільно обертатися навколо горизонтальної осі, яка перпендикулярна до площини диска і проходить через точку О на ньому (рис. 6). Диск відхилили на кут α і відпустили. Визначити для початкового моменту часу кутове ε і тангенціальне прискорення точки В, що розміщена на диску. Розрахунок провести для таких випадків: а) $a = R$, $b = \frac{R}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$; б) $a = \frac{R}{2}$, $b = R$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$; в) $a = \frac{2}{3}R$, $b = \frac{2}{3}R$, $\alpha = \frac{2}{3}\pi$.

Відповідь: а) $\varepsilon = 65{,}3\ рад/с^2, a_\tau = 9{,}8\ м/с^2$; б) $\varepsilon = 32{,}7\ рад/с^2$, $a_\tau = 4{,}9\ м/с^2$; в) $\varepsilon = 59{,}9\ рад/с^2$, $a_\tau = 7{,}99\ м/с^2$.

3.20 До кінців легкої нерозтяжної нитки, перекинутої через блок, підвішені вантажі масами $m_1 = 0{,}2\ кг$ і $m_2 = 0{,}3\ кг$. У скільки разів відрізняються сили, що діють на нитку по обидва боки від блока, якщо маса блока $m = 0{,}4\ кг$, а його вісь рухається вертикально вгору з прискоренням $a = 2\ м/с^2$? Силами тертя і проковзуванням нитки по блоку знехтувати.

Відповідь: у $n = 1{,}13$ разу.

3.21 На шків маятника Обербека (рис. 7) намотано нитку, до якої підвішений тягарець $M = 1\ кг$. Тягарець опускається з висоти $h = 1\ м$. Радіус шківа $r = 3\ см$. На хрестовині закріплено чотири тягарці масою $m = 250\ г$, кожний на відстані від осі $R = 30\ см$. Маса кожного стрижня $m_1 = 0{,}12\ кг$, довжина – $l = 0{,}4\ м$. Знайти кутове прискорення обертання маятника та прискорення, з яким опускається тягарець.

Відповідь: $\varepsilon = 0{,}26\ рад/с^2$; $a = 2{,}2\ м/с^2$.

3.22 Маховик, що має форму диска, радіусом $R = 40\ см$ і масою $m_1 = 48\ кг$ може обертатися навколо горизонтальної осі. До його циліндричної поверхні прикріплено кінець нерозтяжної нитки, а до другого кінця підвішений вантаж масою $m_2 = 0{,}2\ кг$ (рис. 8). Вантаж підняли, а потім відпустили. Упавши вільно з висоти $h = 2\ м$, вантаж натягнув нитку і завдяки цьому привів маховик в обертання? Яку кутову швидкість вантаж надав при цьому маховику?

Відповідь: $\omega = 0{,}13\ рад/с$.

3.23 Який шлях пройде диск, що котиться без проковзування, піднімаючись угору по похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 30^0$, якщо йому надана початкова швидкість $v_0 = 7 \ м/с$, паралельно похилій площині?

Відповідь: $s = 7,5 \ м$.

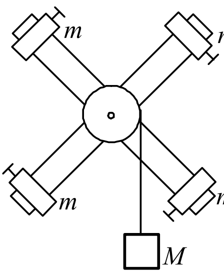

Рисунок 7

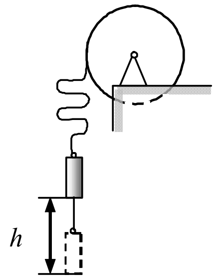

Рисунок 8

3.24 Через нерухомий блок масою $m = 0,2 \, кг$ перекинули шнур, до кінців якого підвісили вантажі масами $m_1 = 0,3 \, кг$ і $m_2 = 0,5 \, кг$. Визначити сили T_1 і T_2 натягу шнура по обидва боки блока та прискорення a вантажів під час їх руху. Маса блока рівномірно розподілена по ободу.

Відповідь: $T_1 = 3,53 \, Н$; $T_2 = 3,92 \, Н$; $a = 1,96 \ м/с^2$.

3.25 Із колодязя за допомогою коловорота піднімали відро з водою масою $m = 10 \ кг$. У момент, коли відро розміщувалося на висоті $h = 5 \ м$ від поверхні води, рукоятка звільнилася, і відро почало рухатися вниз. Визначити лінійну швидкість рукоятки в момент удару відра об поверхню води в колодязі, якщо радіус рукоятки $R = 30 \ см$, радіус вала коловорота $r = 10 \ см$, його маса $m_1 = 20 \ кг$. Тертям і масою троса, на якому підвішене відро, знехтувати.

Відповідь: $v = 21 \ м/с$.