Математичний та пружинний маятники. Рівняння коливань математичного маятника

Практичне заняття № 6

Сумський державний університет

Повторення теоретичного матеріалу

Математичний маятник - це система, яка складається з матеріальної точки, підвішеної на невагомій і нерозтяжній нитці.

Властивості математичного маятника

1 Малі коливання математичного маятника є вільними гармонічними коливаннями із власною циклічною частотою $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

2 Період малих коливань математичного маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \qquad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}.$$

Повторення теоретичного матеріалу

Пружинний маятник – це вантаж, що підвішений на пружині і здійснює гармонічні коливання під дією сили пружності пружини

Рівняння вільних коливань пружинного маятника

$$\boxed{a_x = -\omega_0^2 x},$$

Власна циклічна частота пружинного маятника;

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}}.$$

Період вільних коливань пружинного маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \qquad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\kappa}}}.$$

Повторення теоретичного матеріалу

При коливаннях періодично відбувається перехід потенціальної енергії в кінетичну й навпаки.

Кінетична енергія маятника визначається виразом

$$W_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi_0).$$

Потенціальна енергія маятника визначається

$$W_п = \frac{кx^2}{2} = \frac{кA^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi_0).$$

Повторення теоретичного матеріалу

Повна механічна енергія маятника в положеннях рівноваги й у крайніх точках дорівнює

$$\boxed{W = W_{к_{max}} = W_{п_{max}} = \frac{m\upsilon_{max}^2}{2} = \frac{кx_{max}^2}{2}}.$$

Повна механічна енергія дорівнює сумі його кінетичної та потенціальної енергій:

$$\boxed{W = W_к + W_п = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{кx^2}{2}}.$$

Підставивши в (3.5) вирази (3.1) і (3.2), одержимо

$$\boxed{W = \frac{m\omega^2 A^2}{2}}. = \frac{kA^2}{2}$$

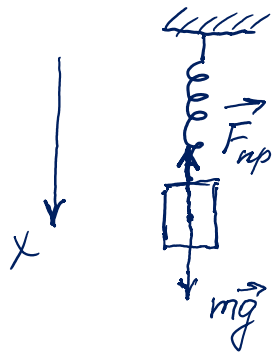
Повна механічна енергія коливного тіла прямо пропорційна його масі, квадрату частоти коливань і квадрату амплітуди.

Задача 1. До спіральної пружини підвішено вантаж, у результаті чого пружина розтягнулася на x=9 см. Яким буде період коливань вантажу, якщо його трохи відтягнути і відпустити?

$T - ?$

$x = 0{,}09\ м$

$g \approx 10\ \frac{м}{с^2}$



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\vec{F}_{пр} + m\vec{g} = 0$$

$$Ox:\ -F_{пр} + mg = 0$$

$$F_{пр} = mg$$

$$|F_{пр}| = |-kx|$$

$$kx = mg \Rightarrow k = \frac{mg}{x}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\cancel{m}x}{\cancel{m}g}} = 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}}$$

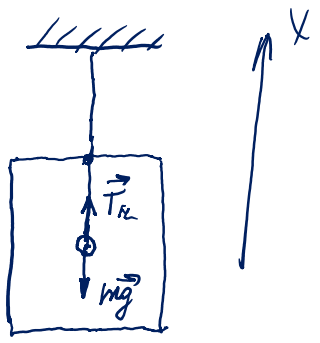
$$T = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \sqrt{\frac{0{,}09}{10}} \approx 0{,}6\ (с).$$

Задача 2. Математичний маятник довжиною *l*=1 м встановлений у ліфті. Ліфт підіймається з прискоренням *a*=2,5 м/с2. Визначити період коливань маятника.

$T - ?$

$l = 1$ м

$a = 2{,}5 \frac{м}{с^2}$

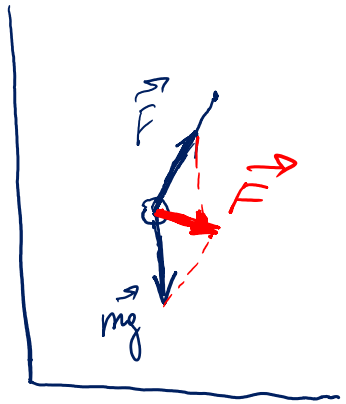


З II з-ну Ньютона:

$$m\vec{g} + \vec{T}_н = m\vec{a}$$

$$Ox: \; -mg + T_н = ma$$

$$T_н = ma + mg = m\underbrace{(a+g)}_{g_1}$$



тоді період колив.:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a+g}}$$

$$T = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \sqrt{\frac{1}{2{,}5 \cdot 10}} \approx 1{,}8 \text{ (с)}.$$

Задача 3. За однаковий час перший маятник здійснює 50 коливань, а другий 30. Знайти довжину кожного маятника, якщо довжина другого на 32 см більша, ніж першого.

$l_1 - ?\ l_2 - ?$

$N_1 = 50$

$N_2 = 30$

$t_1 = t_2 = t$

$\Delta l = l_2 - l_1 =$

$= 32\,см =$

$= 0{,}32\,м$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}} \qquad \Big|\ 1:2$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{l_1}{g}}}{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{l_2}{g}}} = \sqrt{\frac{l_1 \cancel{g}}{\cancel{g} l_2}} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}$$

$$T_1 = \frac{t}{N_1} \qquad T_2 = \frac{t}{N_2} \qquad \Big| \Rightarrow \qquad \frac{\cancel{t} N_2}{N_1 \cancel{t}} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}; \qquad \frac{N_2}{N_1} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}$$

$$t = T_1 N_1 \qquad t = T_2 N_2$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{N_1^2}{N_2^2}; \qquad \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{3\cancel{0}}{5\cancel{0}}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow \boxed{25 l_1 = 9 l_2}$$

$$l_2 - l_1 = 0{,}32 = \Delta l \Rightarrow l_2 = l_1 + \Delta l$$

$$25 l_1 = 9(l_1 + \Delta l)$$

$$25 l_1 = 9 l_1 + 9\Delta l$$

$$16 l_1 = 9\Delta l$$

$$16 l_1 = 9 \cdot 0{,}32 = 2{,}88$$

$$l_1 = \frac{2{,}88}{16} = 0{,}18\,(м)$$

$$l_2 = 0{,}18 + 0{,}32 = 0{,}5\,(м).$$

Задача 4. У скільки разів зміниться повна механічна енергія маятника, якщо його довжину зменшити у 3 рази та амплітуду збільшити у 2 рази?

моятем.

$\frac{E_1}{E_2} - ?$

$\frac{l_1}{l_2} = 3$

$\frac{A_2}{A_1} = 2$

$$\begin{cases} l_1 = 3l_2 \\ A_2 = 2A_1 \end{cases}$$

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$E = \frac{mA^2 g}{2l}$$

$$E_1 = \frac{mA_1^2 g}{2l_1} = \frac{mA_1^2 g}{2 \cdot 3l_2}$$

$$E_2 = \frac{mA_2^2 g}{2l_2} = \frac{m \cdot 4A_1^2 \cdot g}{2l_2}$$

$1 : 2$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\cancel{m}\cancel{A_1^2}\cancel{g} \cdot 2\cancel{l_2}}{2 \cdot 3\cancel{l_2} \cdot \cancel{m}4\cancel{A_1^2}\cancel{g}} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

$E_2 = 12\,E_1$ – збільш. у 12 р.

Задача для самостійного розв’язування

Вантаж, підвішений на пружині, коливається з амплітудою 4 см. Знайти повну енергію Е коливання, якщо жорсткість пружини 1 кН/м.