Сумський державний університет

Теорія де Бройля. Рівняння Шредингера

Практичне заняття № 14

Повторення теоретичного матеріалу

Співвідношення де Бройля

$$W = \hbar\omega, \ \vec{p} = \hbar\vec{k},$$

де W – енергія частинки, що рухається; p – імпульс частинки; $\vec{k}$ – хвильовий вектор; $\left|\vec{k}\right| = k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$; $\hbar$ - стала Планка, поділена на 2π.

$h = 6.626\times10^{-34}$ Дж·с

$\hbar = 1.054\times10^{-34}$ Дж·с

Повторення теоретичного матеріалу

Зв'язок між імпульсом *p* частинки, що рухається, та довжиною хвилі де Бройля λ для двох випадків:

а) у класичному наближенні $\left(\mathrm{v} \ll c;\ p = m_0\mathrm{v}\right)$

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_0\mathrm{v}}},$$

де m_0 –маса спокою частинки;

б) у релятивістському випадку $\left(\mathrm{v} \approx c;\ p = \dfrac{m_0\mathrm{v}}{\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}}\right)$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_0\mathrm{v}}\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}.$$

Повторення теоретичного матеріалу

Зв'язок довжини хвилі де Бройля з кінетичною енергією W_K - частинки:

а) у класичному наближенні $\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2m_0 W_K}}$;

б) у релятивістському випадку $\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{W_K\left(W_K + 2W_0\right)}}$,

де W_0 – енергія спокою частинки $\left(W_0 = m_0 c^2\right)$.

Повторення теоретичного матеріалу

Співвідношення невизначеностей Гейзенберга:

а) для координати та імпульсу частинки

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar ,$$

де Δp_x – невизначеність проекції імпульсу частинки на вісь x; Δx – невизначеність її координати;

б) для енергії і часу

$$\Delta W \Delta t \geq \hbar ,$$

де ΔW – невизначеність енергії даного квантового стану; Δt – час перебування системи в цьому стані.

Повторення теоретичного матеріалу

Одновимірне часове рівняння Шредінгера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},$$

де i – уявна одиниця ($i = \sqrt{-1}$); m – маса частинки; $\psi(x,t)$ - хвильова функція, яка описує стан частинки.

$$\psi(x,t) = A\exp\frac{i}{\hbar}(px - Et),$$

де A – амплітуда хвилі де Бройля; p – імпульс частинки; E – повна енергія частинки.

21.4 Заряджена частинка, прискорена різницею потенціалів U =500 *В*, має довжину хвилі де Бройля λ =1,282 *пм*. Вважаючи заряд частинки таким, що дорівнює заряду електрона, визначити її масу.

$m - ?$

$U = 500\,В$

$\lambda = 1{,}282 \cdot 10^{-12}\,м$

$q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,Кл$

$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

$$A = qU = E_k$$

$$\begin{cases} qU = \dfrac{mv^2}{2} \\ \lambda = \dfrac{h}{mv} \Rightarrow v = \dfrac{h}{m\lambda} \end{cases}$$

$$qU = \frac{\cancel{m} h^2}{2m^{\cancel{2}}\lambda^2}$$

$$m = \frac{h^2}{2qU\lambda^2} = \frac{h^2}{2eU\lambda^2}.$$

$$m = \frac{(6{,}63 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 500\,(1{,}282 \cdot 10^{-12})^2} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,(кг).$$

21.3 Визначити, при якій швидкості руху довжина хвилі де Бройля для електрона дорівнює комптонівській довжині хвилі.

$v - ?$

$\lambda_C = 2{,}436$ пм

$\lambda = \lambda_c$

$m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0 v} \Rightarrow v = \frac{h}{m_0 \lambda}.$$

$$v = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 2{,}436 \cdot 10^{-12}} = 2{,}98 \cdot 10^{8} \, (м/с)$$

$\approx c$

Для релятив. випадку:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad p^2 = \frac{m_0^2 v^2 c^2}{c^2 - v^2}; \quad p^2 c^2 - p^2 v^2 = m_0^2 v^2 c^2$$

$$v^2 (m_0^2 c^2 - p^2) = p^2 c^2$$

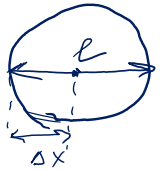
$$v = \sqrt{\frac{p^2 c^2}{m_0^2 c^2 - p^2}} = \frac{pc}{\sqrt{m_0^2 c^2 - p^2}}; \quad p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda_c}$$

$$v = \frac{hc}{\lambda_c \sqrt{m_0^2 c^2 - \frac{h^2}{\lambda_c^2}}}.$$

21.2 Кінетична енергія електрона в атомі водню приблизно дорівнює $W_K = 10\,eB$. Використовуючи співвідношення невизначеностей, оцінити мінімальні лінійні розміри атома.

l_{min} - ?

$W_K = 10\,eB = 1{,}6 \cdot 10^{-18}$ Дж



$10\,eB \to \ldots$ Дж

$10 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ (Дж)

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$$

$$\Delta x = \frac{l}{2}$$

$$\frac{l}{2} \Delta p_x \geq \hbar \Rightarrow l \geq \frac{2\hbar}{\Delta p_x}$$

$$\Delta p_x \leq p_x$$

$$W_k = \frac{mv^2}{2}, \quad p_x = mv \Rightarrow p_x = m \cdot \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2Wm^2}{m}} = \sqrt{2Wm}$$

$$v = \sqrt{\frac{2W}{m}}$$

$$l_{min} = \frac{2\hbar}{\sqrt{2Wm}}.$$

21.15 Середня кінетична енергія електрона в основному стані атома водню дорівнює $E_k = 13{,}6$ еВ. Використовуючи співвідношення невизначеностей, знайти найменшу похибку, з якою можна обчислити координату електрона в атомі.

21.17 Електрон з кінетичною енергією $E_k = 15\ eB$ міститься в металевій пилинці діаметром $d = 1$ мкм. Оцінити відносну похибку $\Delta v/v$, з якою може бути визначена його швидкість.

Задача для самостійного розв’язування

21.2 Кінетична енергія протона дорівнює його енергії спокою. Обчислити довжину хвилі де Бройля цього протона.