

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

ФІЗИКА

Конспект лекцій

для студентів напрямів підготовки:
6.050801 “Мікро- та наноелектроніка”,
6.050802 “Електронні пристрої та системи”,
6.050701 “Електротехніка та електротехнології”,
6.050201 “Системна інженерія”
усіх форм навчання

Частина 2

Суми
“Видавництво СумДУ”
2010

Фізика: Конспект лекцій /Укладач О.В. Лисенко. – Суми: Вид-во СумДУ, 2010. – Ч.2. – 242 с.

Кафедра загальної та теоретичної фізики

ЗМІСТ

	С.
ПЕРЕДМОВА	8
РОЗДІЛ 1 ЕЛЕКТРОМАГНІТИЗМ	9
ТЕМА 1 МАГНІТНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ	9
§ 1 Магнітне поле. Дослід Ерстеда. Закон Ампера. Напрямок і модуль вектора індукції магнітного поля. Принцип суперпозиції [13, 14]	9
§ 2 Сила Лоренца [5].....	11
§ 3 Рух зарядженої частинки в однорідному магнітному полі [9].....	12
§ 4 Закон Біо-Савара-Лапласа. Індукція магнітного поля, яке створене відрізком із струмом. Індукція нескінченно довгого прямого провідника зі струмом. Індукція на осі колового струму [5]	17
§ 5 Взаємодія двох нескінченно довгих паралельних провідників. Ампер – одиниця вимірювання сили струму [15]	20
§ 6 Сила, що діє на контур із струмом в однорідному магнітному полі. Момент сил, що діють на контур із струмом у магнітному полі. Вимірювання індукції магнітного поля за допомогою контуру зі струмом [5]	21
§ 7 Робота при переміщенні контуру зі струмом у магнітному полі [9]	24
§ 8 Теорема Гаусса для магнітного поля у вакуумі. Теорема про циркуляцію вектора магнітної індукції [5]	24
§ 9 Магнітне поле тороїда. Магнітне поле нескінченного соленоїда [5].....	26
ТЕМА 2 МАГНІТНЕ ПОЛЕ В РЕЧОВИНІ	28
§ 10 Намагнічування речовини. Гіпотеза Ампера. Намагніченість [5]	28
§ 11 Теорема Гаусса для індукції магнітного поля в речовині. Напруженість магнітного поля. Теорема про циркуляцію напруженості магнітного поля [5].....	28
§ 12 Магнітна проникність, магнітна сприйнятливість [5]	31
§ 13 Умови для векторів індукції та напруженості магнітного поля на межі двох магнетиків [5].....	33
§ 14 Гіромагнітне відношення. Дослід Ейнштейна і де Хааса [5]	34
§ 15 Типи магнетиків. Якісне пояснення магнітних властивостей речовини [5].....	36
ТЕМА 3 ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ	38
§ 16 Досліди Фарадея. Закон Фарадея. Правило Ленца [14].....	38
§ 17 Електрорушійна сила індукції (механізм виникнення) у рухомих і нерухомих контурах. Максвеллівське трактування закону електромагнітної індукції [5, 9].....	40
§ 18 Явище самоіндукції. Індуктивність. Індуктивність довгого соленоїда. ЕРС самоіндукції [5].....	42
§ 19 Явище взаємної індукції. Взаємна індуктивність. ЕРС взаємної індукції [5]	43
§ 20 Енергія магнітного поля. Енергія соленоїда [5].....	44
§ 21 Струм під час замикання та розмикання електричного кола [5].....	45
ТЕМА 4 РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА	48
§ 22 Вихрове електричне поле. Інтегральна й диференціальна форма закону електромагнітної індукції [5]	48
§ 23 Струм зміщення Максвелла [5, 9]	49
§ 24 Система фундаментальних рівнянь Максвелла в інтегральній і диференціальній формі. Матеріальні рівняння [9].....	52
РОЗДІЛ 2 КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ	54
ТЕМА 5 КОЛИВАЛЬНІ ПРОЦЕСИ.....	54
§ 25 Гармонічні коливання та їх характеристики. Диференціальне рівняння гармонічних коливань. Зміна енергії при гармонічному коливанні [5]	54
§ 26 Періоди коливань фізичного, математичного та пружинного маятників [5]	56
§ 27 Електричний коливальний контур. Частота коливань [5].....	59

§ 28 Векторна діаграма. Додавання двох гармонічних коливань одного напрямку й частоти [5]	60
§ 29 Биття [5].....	62
§ 30 Додавання взаємно перпендикулярних коливань. Фігури Ліссажу [5]	63
§ 31 Диференціальне рівняння загасаючих коливань [5].....	65
§ 32 Розв'язання диференціального рівняння загасаючих коливань. Коефіцієнт загасання, декремент загасання, логарифмічний декремент загасання, добротність [5].....	67
§ 33 Диференціальне рівняння вимушених коливань та його розв'язання [5].....	69
§ 34 Резонанс. Резонансна частота [5]	71
§ 35 Закон Ома для змінних струмів. Імпеданс. Ємнісний та індуктивний опори [2].....	73
ТЕМА 6 ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ.....	77
§ 36 Хвилі в пружному середовищі. Поперечні та поздовжні хвилі. Довжина хвилі. Рівняння біжучої хвилі. Фазова швидкість, хвильове число [5]	77
§ 37 Хвильове рівняння. Фазова швидкість поширення хвиль у твердому тілі й газі [5].....	81
§ 38 Густина енергії пружної хвилі [5]	82
§ 39 Вектор Умова. Інтенсивність [5]	84
§ 40 Звукові хвилі та їх застосування. Висота, тембр та гучність звуку. Рівень гучності. Ефект Доплера для звукових хвиль [5]	85
§ 41 Стоячі хвилі [5]	88
§ 42 Хвильовий пакет. Групова швидкість [5]	91
§ 43 Хвильове рівняння для електромагнітної хвилі. Фазова швидкість поширення електромагнітної хвилі [5]	93
§ 44 Напруженість електричних і магнітних полів у лінійно поляризованій електромагнітній хвилі [5]	94
§ 45 Вектор Пойтінга [5]	96
§ 46 Випромінювання диполя [5].....	97
§ 47 Ефект Доплера для електромагнітних хвиль [5].....	99
РОЗДІЛ 3 ХВИЛЬОВА ОПТИКА.....	100
ТЕМА 7 ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ СВІТЛА	100
§ 48 Інтерференція монохроматичного світла від двох джерел. Умови, при яких спостерігається інтерференція монохроматичного світла. Умови інтерференційного мінімуму й максимуму [5]	100
§ 49 Когерентність. Механізм випромінювання світла атомами. Час когерентності. Довжина когерентності. Радіус когерентності [5].....	103
§ 50 Дослід Юнга. Ширина інтерференційних смуг [10].....	104
§ 51 Дзеркала Френеля. Ширина інтерференційних смуг [5]	106
§ 52 Інтерференція світла при відбитті від тонких плівок. Різниця ходу променів. Смуги рівного нахилу. Смуги рівної товщини [5].....	107
§ 53 Кільця Ньютона. Радіуси темних і світлих кілець [5]	108
ТЕМА 8 ДИФРАКЦІЯ СВІТЛА.....	110
§ 54 Принцип Гюйгенса-Френеля [5].....	110
§ 55 Метод зон Френеля. Радіус зони Френеля. Амплітуда коливань світлової хвилі від точкового ізотропного джерела [5]	111
§ 56 Дифракція Френеля на круглому отворі. Амплітуда світлового вектора в центрі дифракційної картини. Характер дифракційної картини [5].....	115
§ 57 Дифракція Френеля на круглому диску. Амплітуда світлового вектора в центрі дифракційної картини. Характер дифракційної картини [5].....	117
§ 58 Дифракція Фраунгофера на щілині. Амплітуда й інтенсивність світла, максимуми й мінімуми [5].....	118

§ 59 Дифракція Фраунгофера на дифракційних решітках. Амплітуда й інтенсивність світла, максимуми й мінімуми [5]	121
§ 60 Дисперсія і роздільна здатність дифракційних решіток. Роздільна здатність об'єктива [5]	124
§ 61 Дифракція на просторових структурах. Закон Вульфа-Брегга. Рентгенівська спектроскопія. Рентгеноструктурний аналіз [5]	126
ТЕМА 9 ПОЛЯРИЗАЦІЯ СВІТЛА	129
§ 62 Поляризоване й природне світло. Поляризатор. Ступінь поляризації [5]	129
§ 63 Закон Малюса. Проходження природного світла через поляризатор [5]	131
§ 64 Поляризація світла при відбитті та заломленні. Закон Брюстера [5]	132
§ 65 Явище подвійної променезаломлюваності. Призма Ніколя. Чвертьхвильова пластинка. Явище дихроїзму [5, 10]	133
ТЕМА 10 ПОШИРЕННЯ СВІТЛА В РЕЧОВИНІ	136
§ 66 Дисперсія світла. Аномальна та нормальна дисперсія. Показник заломлення світла з погляду електронної теорії речовини [5]	136
РОЗДІЛ 4 КВАНТОВА ПРИРОДА ВИПРОМІНЮВАННЯ	139
ТЕМА 11 ТЕПЛОВЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ	139
§ 67 Теплове випромінювання, енергетична світність, поглинальна здатність та випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла. Зв'язок між випромінювальною здатністю як функцією частоти та випромінювальною здатністю як функцією довжини хвилі [6]	139
§ 68 Закон Кірхгофа. Універсальна функція Кірхгофа. Експериментальне дослідження універсальної функції Кірхгофа [6]	140
§ 69 Закон Стефана-Больцмана, формула Віна, закон зміщення Віна [6]	142
§ 70 Формула Релея-Джинса. Ультрафіолетова катастрофа [6]	143
§ 71 Гіпотеза Планка. Формула Планка [6]	146
ТЕМА 12 ФОТОНИ	148
§ 72 Гальмівне рентгенівське випромінювання. Короткохвильова межа рентгенівського випромінювання [6]	148
§ 73 Зовнішній фотоефект. Закони фотоефекту. Формула Ейнштейна для фотоефекту [6]	149
§ 74 Фотони. Дослід Боте. Властивості фотонів. Корпускулярно-хвильовий дуалізм світла [6]	152
§ 75 Ефект Комптона. Зміна довжини хвилі фотона при його розсіюванні на електроні [6]	153
РОЗДІЛ 5 ЕЛЕМЕНТИ АТОМНОЇ ФІЗИКИ ТА КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ	156
ТЕМА 13 БОРІВСЬКА ТЕОРІЯ АТОМА	156
§ 76 Дослід Резерфорда. Ядерна модель атома. Залежність кількості α -частинок в одиниці тілесного кута від кута розсіяння. Проблема стабільності атома з точки зору ядерної моделі атома [6]	156
§ 77 Постулати Бора. Правило квантування орбіт. Досліди Франка й Герца [6]	159
§ 78 Спектральні закономірності у випромінюванні атома водню. Терми. Комбінаційний принцип Рітца [6]	161
§ 79 Борівська теорія воднеподібного атома. Узагальнена формула Бальмера. Стала Рідберга. Недоліки теорії Бора [3]	162
ТЕМА 14 ХВИЛЬОВІ ВЛАСТИВОСТІ МІКРОЧАСТИНОК	164
§ 80 Гіпотеза де Бройля. Довжина хвилі де Бройля для електрона, що вільно рухається [6, 11]	164
§ 81 Досліди Девісона й Джермера. Досліди Томсона й Тартаковського [3]	165
§ 82 Статистична інтерпретація хвиль де Бройля [11]	167
§ 83 Співвідношення невизначеностей Гейзенберга [11]	168
ТЕМА 15 КВАНТУВАННЯ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН	170

§ 84 Хвильова функція. Фізична сутність ψ -функції. Стандартні умови для хвильової функції [6]	170
§ 85 Загальне й стаціонарне рівняння Шредінгера [6]	171
§ 86 Рівняння Шредінгера та квантування енергії [6]	173
§ 87 Частинка в одновимірній потенціальній ямі. Енергія і хвильова функція частинки в потенціальній ямі [6]	174
§ 88 Тунельний ефект. Коефіцієнт проходження [3]	176
§ 89 Оператори фізичних величин. Власні функції та власні значення. Принцип суперпозиції [6]	179
§ 90 Середні значення фізичних величин з точки зору операторного підходу. Оператори радіуса-вектора, імпульсу, енергії. Зв'язок між власними й середніми значеннями [11]	181
§ 91 Комутативність операторів. Умови, за яких дві фізичні величини можуть бути виміряні одночасно [11]	183
§ 92 Квантування моменту імпульсу. Модуль і одна з проєкцій моменту імпульсу. Азимутальне і магнітне квантові числа [6]	184
ТЕМА 16 ФІЗИКА АТОМІВ І МОЛЕКУЛ	186
§ 93 Атом водню з погляду квантової механіки. Квантові числа: n , l , m_l . Кратність виродження. Правило відбору [6]	186
§ 94 Магнетизм атомів. Дослід Штерна й Герлаха. Спін електрона [11]	190
§ 95 Принцип Паулі. Періодична система елементів Д.І. Менделєєва з погляду квантової механіки [3]	193
§ 96 Спонтанне й вимушене випромінювання. Коефіцієнти Ейнштейна [10]	197
§ 97 Інверсна заселеність. Лазери [10]	199
ТЕМА 17 ЗОННА ТЕОРІЯ ТВЕРДИХ ТІЛ	203
§ 98 Енергетичні зони в кристалах. Зона провідності, заборонена зона, валентна зона. Метали, напівпровідники, діелектрики з точки зору зонної теорії [3]	203
§ 99 Напівпровідники. Власні, домішкові напівпровідники. Рух електронів та дірок. Рівень Фермі. Залежність провідності власних напівпровідників від температури [3]	205
§ 100 Домішкова провідність напівпровідників. Донорні рівні, акцепторні рівні [3]	208
§ 101 Контакт електронного та діркового напівпровідників. Електричне поле p - n -переходу. Потенціальний бар'єр p - n -переходу. Вольт-амперна характеристика. Напівпровідниковий діод [3]	210
§ 102 Транзистор. База, емітер, колектор. Транзисторний підсилювач напруги [3]	212
РОЗДІЛ 6 ЕЛЕМЕНТИ ФІЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА Й ЕЛЕМЕНТАРНИХ ЧАСТИНОК	214
ТЕМА 18 АТОМНЕ ЯДРО І ЕЛЕМЕНТАРНІ ЧАСТИНКИ	214
§ 103 Склад і характеристика атомного ядра. Ізотопи, ізобари, ізотони, ізомери [6]	214
§ 104 Дефект маси й енергія зв'язку ядра. Залежність питомої енергії зв'язку ядра від масового числа [6]	216
§ 105 Краплинна й оболонкова моделі ядра [6]	217
§ 106 Ядерні сили [6]	218
§ 107 Закон радіоактивного розпаду. Середній час життя, період напіврозпаду, активність радіоактивної речовини. Види радіоактивного розпаду [6]	219
§ 108 Альфа-розпад. Енергія α -частинок. Теорія Гамова-Герні-Кондона [3, 11]	220
§ 109 Бета-розпад. Види бета-розпаду. Енергія β -частинок. Теорія Фермі. Слабка взаємодія [3, 11]	222

§ 110 Ядерні реакції. Енергія реакції. Гранична кінетична енергія. Компаунд-ядро. Реакція зриву. Реакція захоплення. Ефективний переріз ядерної реакції [3]	224
§ 111 Ділення ядер. Ланцюгова ядерна реакція. Ядерна бомба. Ядерний реактор [3].....	228
§ 112 Термоядерні реакції. Дейтерій-тритієвий синтез. Протонно-протонний цикл. Вуглецевий цикл [3].....	232
§ 113 Види взаємодій і класи елементарних частинок [3]	233
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	214
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК.....	237

ПЕРЕДМОВА

Поданий читачу конспект лекцій був створений автором у результаті викладання курсу фізики на фізико-технічному факультеті Сумського державного університету, починаючи з 2001 року.

У зв'язку з реорганізацією навчального процесу відповідно до основних тенденцій Болонського процесу зменшується обсяг аудиторних занять, частина навчального матеріалу виноситься на самостійне вивчення. Тому постає два питання: *який матеріал повинен бути обов'язково вивченим та яка мінімальна глибина його розуміння?* Поданий конспект лекцій дає відповіді на ці запитання.

Формуючи мінімально необхідний матеріал, автор використовував перш за все загальновідомі російськомовні курси фізики І.В.Савельєва [1–6] та Д.В.Сивухіна [7–11]. Для студентів, які бажають отримати більш глибоке розуміння викладених у конспекті питань, у заголовку кожного параграфа наведено посилання на рекомендовану літературу.

Під час написання конспекту лекцій було поставлено двоє завдань: *сформувати у студентів систему понять і законів фізики та сформувати вміння їх застосовувати до конкретних ситуацій (формування фізичного мислення).*

Для вирішення першого завдання у конспекті визначення фізичних понять, формулювання законів виділено напівжирним курсивом. Важлива інформація виділена курсивом. У кінці конспекту лекцій подано предметний покажчик, за допомогою якого легко знайти визначення потрібного терміна. Формування системи понять фізики, тобто розуміння «мови» фізики є найголовнішим завданням, яке повинно бути вирішене читачем у першу чергу.

Для вирішення другого завдання (формування фізичного мислення) у конспекті подано достатньо велику кількість доведень тих чи інших положень фізики. Майбутній інженер повинен уміти застосовувати принципи фізики до вирішення конкретних завдань. Для засвоєння матеріалу основну роль повинна відігравати логічна пам'ять, запам'ятовування повинно досягатися через глибоке розуміння. Над конспектом потрібно працювати «з олівцем у руках», обов'язково опрацьовуючи усі доведення, не обмежуючись тільки читанням матеріалу.

Структура конспекту лекцій обумовлена тим, що курс лекцій для студентів інженерних спеціальностей викладається протягом двох семестрів. Перша частина конспекту лекцій [12] охоплює матеріал першого семестру вивчення фізики. Матеріал, який поданий читачу в цій, другій, частині конспекту лекції, вивчається у другому семестрі навчання. Тут викладені розділи «Електромагнетизм», «Коливання та хвилі», «Хвильова оптика», «Квантова природа випромінювання», «Елементи атомної фізики та квантової механіки», «Елементи фізики атомного ядра й елементарних частинок».

РОЗДІЛ 1 ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

ТЕМА 1 МАГНІТНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ

§ 1 Магнітне поле. Дослід Ерстеда. Закон Ампера. Напрямок і модуль вектора індукції магнітного поля. Принцип суперпозиції [13, 14]

1 У природі трапляються деякі залізні руди, що мають властивість притягувати до себе невеликі залізні предмети, що знаходяться поблизу, наприклад, залізні ошурки або цвяхи. Якщо кусок такої руди підвісити на нитці, він орієнтується в напрямку з півночі на південь (рис. 1.1). Куски такої руди називають *природними магнітами*. Кусок заліза або сталі, що знаходиться поблизу магніту, сам намагнічується, тобто отримує здатність притягувати до себе інші залізні предмети.

2 Можна виготовити магніт у вигляді дуже довгого й тонкого стержня. Подібний магніт називають *магнітною стрілкою*. Часто магнітну стрілку виготовляють у вигляді витягнутого ромба (рис. 1.2). Якщо таку стрілку підвісити або укріпити на вістрі так, щоб вона могла вільно обертатися, то вона завжди встановлюється таким чином, щоб один з її полюсів був повернутий на північ, а інший – на південь. Так само орієнтується й будь-який магніт, що підвішений на тонкій, яка легко закручується, нитці. *Полюс магніту, що повертається на північ, називають північним полюсом, а інший полюс – південним.*

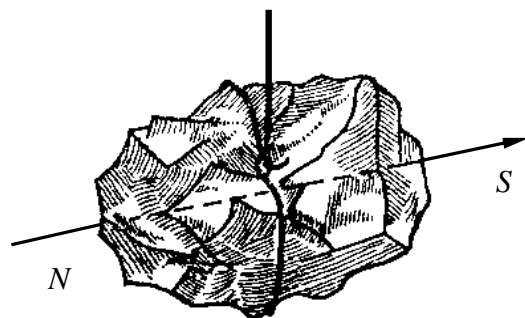


Рисунок 1.1 – Магнітна руда, що підвішена на нитці, орієнтується певним чином – з півночі на південь ($N \rightarrow S$)

Магнітні стрілки особливо зручні для виявлення магнітних властивостей природного або штучного магніту. Наближаючи до стрілки магніт, ми побачимо, що її північний полюс притягується до південного полюса магніту й відштовхується від північного (і навпаки). Таким чином, магнітна стрілка під дією магніту повертається відносно своєї осі.

3 Як показує дослід, взаємодія між магнітами здійснюється за допомогою магнітного поля. *Магнітне поле* – це матеріальний об'єкт, що орієнтує магнітну стрілку в просторі. З дослідів випливає, що магнітне поле має спрямований характер. Тому *магнітне поле характеризують*

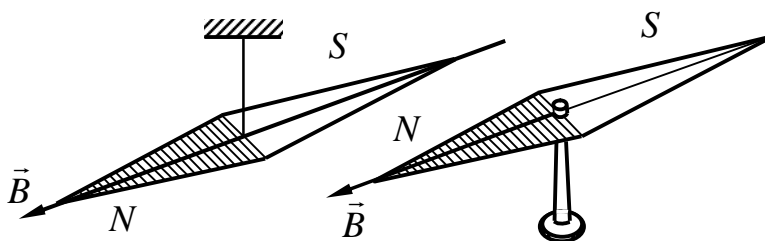


Рисунок 1.2 – Магнітні стрілки у вигляді витягнутого ромба: ліворуч – підвішена на нитці, праворуч – укріплена на вістрі

вектором магнітної індукції \vec{B} . За *напрямок вектора \vec{B}* , за визначенням, беруть напрям від південного полюса S до північного N магнітної стрілки, що вільно встановилася у магнітному полі (див. рис. 1.2).

4 Історичним у розумінні сутності магнітного поля став дослід Ерстеда (1820 р.). Ерстед розмістив над магнітною стрілкою прямолінійний провідник (рис. 1.3) паралельно стрілці. Стрілка могла вільно обертатися навколо вертикальної осі. Коли по провіднику пропускали електричний струм, магнітна стрілка відхилялася й встановлювалася перпендикулярно до провідника. При зміні напрямку струму стрілка поверталася на 180° . Те саме відбувалося, коли провідник переносили вниз і розміщували під стрілкою. Таким чином, *дослід Ерстеда доводить, що в просторі, який оточує електричний струм, створюється магнітне поле.*

5 У попередньому пункті ми говорили про те, що провідники зі струмом створюють навколо себе магнітне поле. Виявляється, що є й інша властивість, *магнітне поле діє на провідники зі струмом*. Для доведення цього виконаємо такий дослід. Два паралельних металевих стержні *A* й *B* розмістимо між полюсами магніту *N* й *S* (рис. 1.4). Легкий металевий стержень *C* опирається своїми кінцями на стержні *A* й *B* і може вільно переміщатися уздовж них. Стержні *A* й *B* приєднані до акумуляторної батареї *B* через комутатор *K*, за допомогою якого можна замикати й розмикати електричне коло, яке утворене провідниками *A*, *C* й *B*, а також змінювати напрям електричного струму в ньому.

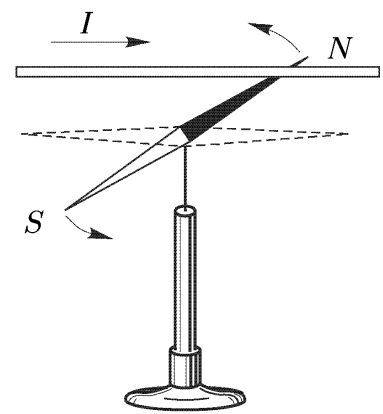


Рисунок 1.3 – Схема досліду Ерстеда

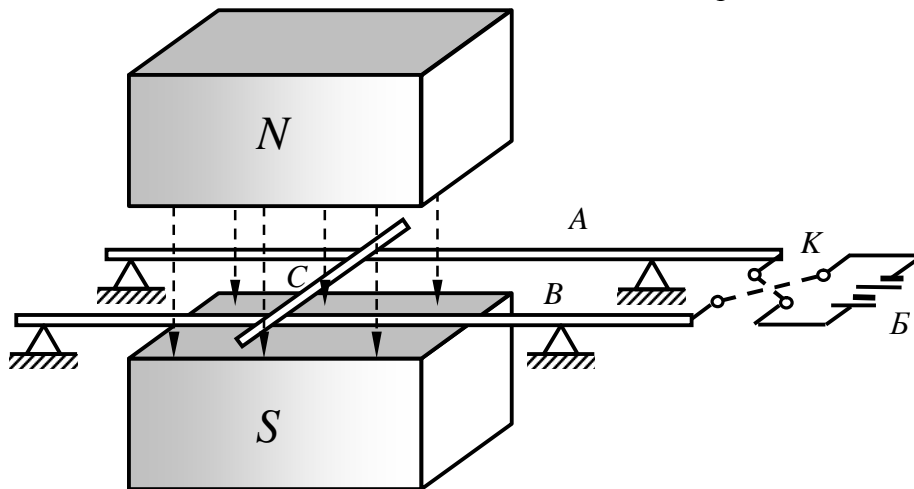


Рисунок 1.4 – Схема досліду, що демонструє вплив магнітного поля на провідник з електричним струмом

Дослід показує, що при замиканні ланцюга провідник *C* починає рухатись уздовж стержнів *A* й *B*. Напрямок переміщення провідника *C* залежить від напрямку електричного струму в ньому. На рис. 1.5 показані обидва можливих випадки. Якщо струм *I* у провіднику *C* проходить перпендикулярно до площини креслення «до нас» (такий струм позначають кружком із крапкою в його центрі), то провідник переміщається вправо (рис. 1.5а). Якщо струм *I* проходить в протилежному напрямку (такий струм позначають кружком із хрестом усередині нього), то провідник *C* рухається вліво (рис. 1.5б).

6 Дію магнітного поля на провідники зі струмом було виявлено Г. Ерстедом і А. Ампером. Ампер докладно дослідив це явище й дійшов висновку, що сила $d\vec{F}$, яка діє на малий провідник довжиною dl зі струмом I , що знаходиться у магнітному полі, визначається за такою формулою:

$$\boxed{d\vec{F} = k \cdot I [d\vec{l} \times \vec{B}]}. \quad (1.1)$$

У цій формулі \vec{B} – вектор індукції магнітного поля, який є характеристикою магнітного поля; вектор $d\vec{l}$ спрямований за напрямом електричного струму; k – коефіцієнт пропорційності, який у системі СІ дорівнює одиниці. Формулу (1.1) називають **законом Ампера (силою Ампера)**. Силу, що діє на провідник скінченної довжини, знаходимо за допомогою (1.1) шляхом

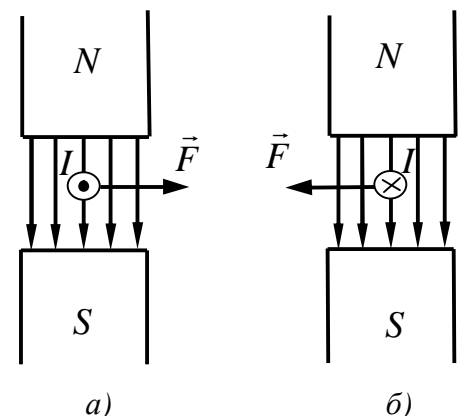


Рисунок 1.5 – Напрямок сили, що діє на провідник з електричним струмом

інтегрування за усією довжиною провідника.

Як випливає із закону Ампера (1.1), сила $d\vec{F}$ перпендикулярна як до напрямку проходження електричного струму $I d\vec{l}$, так і до вектора \vec{B} , а її величина пропорційна синусу кута між цими векторами (як відомо, $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\hat{\vec{a}}, \vec{b})$). Коли вектори $I d\vec{l}$ й \vec{B} паралельні, сила $d\vec{F}$ дорівнює нулю. Для визначення напрямку сили $d\vec{F}$ зручно використовувати **правило лівої руки** (рис. 1.6): якщо ліву долоню розмістити так, щоб витягнуті пальці показували напрям струму I , а лінії індукції магнітного поля \vec{B} входили в долоню, то відхилений великий палець покаже напрям сили $d\vec{F}$, що діє на провідник.

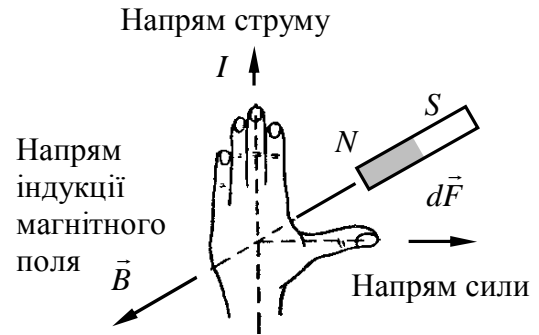


Рисунок 1.6 – До правила лівої руки

Як зазначалось вище, коефіцієнт пропорційності k у формулі (1.1) залежить тільки від вибору одиниць величин dl , B , I і $d\vec{F}$. У системі СІ цей коефіцієнт дорівнює одиниці $k=1$, індукція магнітного поля вимірюється в **теслах** (Тл).

7 Закон Ампера дозволяє визначити числове значення магнітної індукції B . Припустимо, що елемент провідника dl зі струмом I є перпендикулярним до напрямку магнітного поля ($\sin(\hat{dl}, \vec{B})=1$). У цьому випадку сила, що діє на елемент провідника зі струмом, буде максимальною, тобто

$$dF = IBdl \cdot \sin(\hat{dl}, \vec{B}) = IBdl = dF_{\max}.$$

Експериментально визначивши значення максимальної сили dF_{\max} , що діє на елемент провідника dl зі струмом I , можемо знайти **модуль вектора індукції магнітного поля**

$$B = \frac{1}{I} \frac{dF_{\max}}{dl}. \quad (1.2)$$

З формули (1.2) випливає, що магнітна індукція B чисельно дорівнює силі, що діє з боку поля на одиницю довжини провідника, по якому проходить електричний струм одиничної сили і який розміщений перпендикулярно до напрямку магнітного поля \vec{B} . Таким чином, **магнітна індукція є силовою характеристикою магнітного поля**. Напрямок вектора індукції магнітного поля \vec{B} , як говорилося вище, визначається напрямом від південного полюса S до північного N магнітної стрілки, що вільно встановилась у магнітному полі (див. рис. 1.2).

З формули (1.2) також неважко з'ясувати зв'язок між одиницею виміру індукції магнітного поля та іншими одиницями виміру в системі СІ: $1 \text{ Тл} = 1 \text{ Н}/(\text{А} \cdot \text{м})$.

8 Дослід свідчить, що для магнітного поля, як і для електричного, виконується **принцип суперпозиції**: поле \vec{B} , яке створюється декількома струмами, дорівнює векторній сумі полів \vec{B}_i , що створюються кожним струмом окремо

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i. \quad (1.3)$$

§ 2 Сила Лоренца [5]

1 Сила Ампера, що діє на провідник довжиною dl зі струмом I в магнітному полі з індукцією \vec{B} ,

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \times \vec{B}] \quad (2.1)$$

обумовлена тим, що магнітне поле діє на рухомі носії електричного струму. Від носіїв струму дія сили передається провіднику, по якому вони переміщуються. Знайдемо силу \vec{F}_m з боку магнітного поля, що діє на окремо взятий рухомий електричний заряд.

Для цього подамо силу струму I у вигляді

$$I = jS = nq\upsilon S,$$

де j – густина електричного струму; S – площа поперечного перерізу провідника; n , q та υ відповідно концентрація, заряд та швидкість носіїв електричного струму. Підставлення цього виразу в (2.1) дає

$$d\vec{F} = nq\upsilon S[d\vec{l} \times \vec{B}] = nqSdl[\vec{\upsilon} \times \vec{B}].$$

Тут використали, що напрями векторів $d\vec{l}$ та $\vec{\upsilon}$ збігаються. Добуток $nSdl$ дорівнює числу носіїв струму, що знаходяться на ділянці провідника dl . Розділивши $d\vec{F}$ на це число, знайдемо силу \vec{F}_m , що діє на заряд q , який рухається зі швидкістю $\vec{\upsilon}$, з боку магнітного поля

$$\boxed{\vec{F}_m = q[\vec{\upsilon} \times \vec{B}]}. \quad (2.2)$$

Ця формула визначає силу (будемо називати її магнітною), що діє в точці поля, де магнітна індукція дорівнює \vec{B} , на точковий заряд q , який рухається зі швидкістю $\vec{\upsilon}$. Модуль магнітної сили дорівнює

$$F_m = q\upsilon B \sin \alpha, \quad (2.3)$$

де α – кут між векторами $\vec{\upsilon}$ й \vec{B} . З (2.3) випливає, що на заряд, який рухається вздовж ліній поля, не діє магнітна сила (у цьому випадку $\alpha = 0$).

Магнітна сила завжди спрямована перпендикулярно до швидкості зарядженої частинки, як це випливає з (2.3). Тому вона роботи над частинкою не виконує. Отже, за допомогою магнітного поля енергію частинки змінити не можна.

У випадку, коли заряджена частинка знаходиться як в електричному, так і в магнітному полі, сила, що діє на заряджену частинку з боку електромагнітного поля, дорівнює

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{\upsilon} \times \vec{B}]}. \quad (2.4)$$

Цей вираз отримав Лоренц шляхом узагальнення експериментальних даних, і його називають **силою Лоренца**.

§ 3 Рух зарядженої частинки в однорідному магнітному полі [9]

Нижче подано два варіанти викладення цього питання. У першому варіанті використовуються більше фізичні ідеї. Другий варіант базується на точному математичному розв'язанні вихідних рівнянь. Бажано ознайомитися з обома підходами. Для підготовки до практичного заняття, модульного контролю, іспиту можна використати будь-який варіант за вашим вибором.

Перший варіант

Розглянемо рух зарядженої частинки в однорідному магнітному полі, початкова швидкість якої спрямована під кутом α до вектора індукції магнітного поля (див. рис. 3.1). Для цього використаємо другий закон Ньютона $m d\vec{\upsilon}/dt = \sum \vec{F}_i$ та формулу для магнітної складової сили Лоренца

$$\vec{F}_m = q[\vec{\upsilon} \times \vec{B}]. \quad (3a.1)$$

Виходячи з формули для магнітної складової сили Лоренца (3а.1), неважко з'ясувати, що ця сила завжди спрямована перпендикулярно до вектора швидкості частинки (згадайте властивості векторного добутку). Це означає, що робота магнітної складової сили Лоренца завжди дорівнює нулю:

$$A = \int \vec{F}_m \cdot d\vec{r} = \int \vec{F}_m \cdot \vec{v} dt = \int F_m v \cos(\vec{F}_m, \vec{v}) dt = \int F_m v \cdot 0 \cdot dt = 0.$$

Таким чином, магнітна складова сили Лоренца не змінює кінетичну енергію частинки, а отже, не змінює і модуль її швидкості. Вона тільки викривлює траєкторію.

Запишемо другий закон Ньютона з урахуванням магнітної складової сили Лоренца (3.1) і отримаємо

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (3а.2)$$

У цьому співвідношенні m , q – маса та заряд частинки, \vec{v} – її швидкість, \vec{B} – індукція магнітного поля. Спрямуємо вісь Z вздовж вектора \vec{B} (див. рис. 3.1). Тоді $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Подамо вектор швидкості у вигляді суми двох складових: $v_z\vec{e}_z$, спрямованої вздовж осі Z , та \vec{v}_\perp , перпендикулярної до осі Z :

$$\vec{v} = v_z\vec{e}_z + \vec{v}_\perp. \quad (3а.3)$$

Підставимо (3а.3) в (3а.2) і отримаємо

$$m \frac{d(v_z\vec{e}_z + \vec{v}_\perp)}{dt} = q[(v_z\vec{e}_z + \vec{v}_\perp) \times B\vec{e}_z],$$

або

$$m \frac{dv_z}{dt} \vec{e}_z + \frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = q[v_z\vec{e}_z \times B\vec{e}_z] + q[\vec{v}_\perp \times B\vec{e}_z] = 0 + q[\vec{v}_\perp \times \vec{B}].$$

Запишемо паралельну та перпендикулярну до осі Z компоненти отриманого рівняння:

$$m \frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = q[\vec{v}_\perp \times \vec{B}], \quad (3а.4)$$

$$m \frac{d(v_z\vec{e}_z)}{dt} = 0. \quad (3а.5)$$

Таким чином, система незалежних рівнянь (3а.4) та (3а.5) описує зміну швидкості частинки в магнітному полі з часом.

З рівняння (3а.5) та рис. 3а.1. випливає, що

$$v_z = v_{0z} \equiv v_0 \cos \alpha = const. \quad (3а.6)$$

Тобто **вздовж осі Z частинка рухається рівномірно.**

Розглянемо тепер детально рівняння (3а.4), яке описує рух частинки в площині, що перпендикулярна до осі Z . Модуль швидкості частинки в магнітному полі не змінюється (див. коментар до формули (3а.1)), тобто він є сталим у часі і дорівнює (див. рис. 3а.1)

$$v_\perp = v_{0\perp} = v_0 \sin \alpha. \quad (3а.7)$$

Сила $\vec{F}_m = q[\vec{v}_\perp \times \vec{B}]$ є також сталою за величиною, вона перпендикулярна до траєкторії частинки. Це означає, що і прискорення частинки $\vec{a}_{доц} = \vec{F}_m / m = q[\vec{v}_\perp \times \vec{B}] / m$ буде перпендикулярне до траєкторії руху, тобто нормальним, а також сталим за модулем. Відомо, що коли частинка рухається по колу, то її прискорення є доцентрове (нормальне) і стає за модулем, швидкість також є сталою за модулем. Звідси випливає, що **частинка в поперечній**

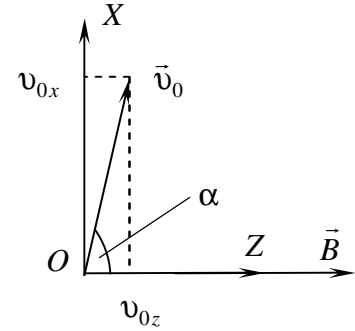


Рисунок 3.1

площині буде рухатись по колу. При цьому площина цього кола перпендикулярна до магнітного поля (осі Z).

Підставляючи в (3а.4) формулу доцентрового прискорення

$$|\vec{a}_{доц}| = \frac{v_{\perp}^2}{R} = |q[\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}] / m| = |qv_{\perp} B / m|,$$

неважко знайти радіус R цього кола

$$R = \frac{v_{\perp}}{|qB/m|} = \frac{mv_0 \sin \alpha}{|q| B}, \quad (3а.8)$$

циклічну частоту обертання (циклотронну частоту)

$$\omega = v_{\perp} / R = |q| B / m, \quad (3а.9)$$

період обертання

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{|q| B}. \quad (3а.10)$$

Аналізуючи формули (3а.9)-(3а.10), зазначимо, що період і частота обертання не залежать від швидкості частинки у нерелятивістському випадку. Використовуючи цю особливість, будують роботу прискорювача заряджених частинок, який називають **циклотроном**.

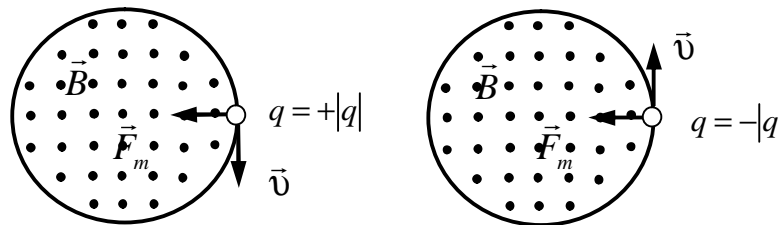


Рисунок 3.2

Визначивши напрям магнітної сили, а отже, і доцентрового прискорення, знайдемо напрям обертання частинки по колу (див. рис. 3.2, тут магнітне поле спрямоване до читача). Якщо заряд $q = +|q|$ є додатним, то напрями вектора \vec{B} та кутової швидкості $\vec{\omega}$ протилежні. Коли заряд $q = -|q|$ є від'ємним, то ці напрями збігаються.

Таким чином, частинка в поперечній площині до магнітного поля рухається рівномірно по колу, а вздовж магнітного поля рухається зі сталою швидкістю. Результуючий рух є рухом частинки по спіралі, вісь якої паралельна магнітному полю (див. рис. 3.3).

Визначимо крок спіралі як відстань, яку частинка проходить вздовж осі Z за період обертання $T = 2\pi/\omega$ (див. рис. 3.3):

$$h = T \cdot v_z = \frac{2\pi}{\omega} v_{0z} = \frac{2\pi m}{qB} v_0 \cos \alpha. \quad (3а.11)$$

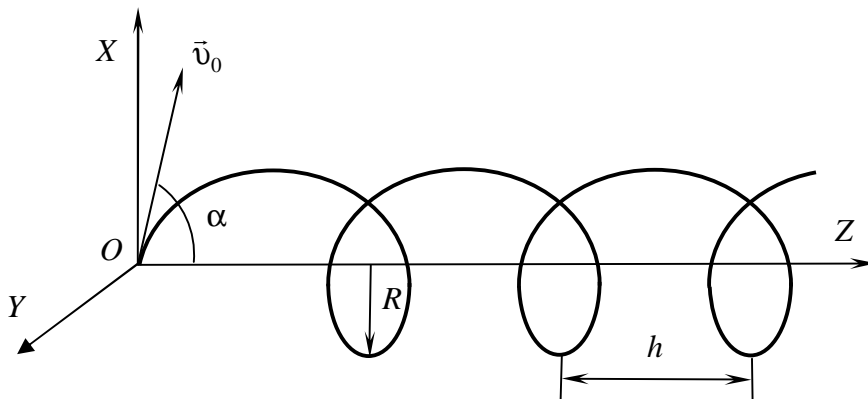


Рисунок 3.3

Таким чином, в однорідному магнітному полі заряджена частинка в загальному випадку рухається вздовж спіралі. Радіус та крок спіралі визначаються за формулами (3а.8) та (3а.11). Кутова частота обертання (кутова швидкість) подається співвідношенням (3а.9), період обертання – (3а.10).

Другий варіант

Розглянемо рух зарядженої частинки в однорідному магнітному полі, початкова швидкість якої спрямована під кутом α (див. рис. 3.1) до вектора індукції магнітного поля. Для цього використаємо другий закон Ньютона $m d\vec{v}/dt = \sum \vec{F}_i$ та формулу для магнітної складової сили Лоренца $\vec{F}_m = [\vec{v} \times \vec{B}]$ і отримаємо

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (3б.1)$$

У цьому співвідношенні m, q – маса та заряд частинки, \vec{v} – її швидкість, \vec{B} – індукція магнітного поля. Спрямуємо вісь Z вздовж вектора \vec{B} . Тоді $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Запишемо рівняння (3б.1) у проєкціях на осі X, Y, Z :

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{q}{m} v_y B, \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{q}{m} v_x B, \\ \frac{dv_z}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (3б.2)$$

З останнього рівняння системи (3б.2) випливає, що v_z є константою, тобто

$$v_z = v_{0z} = v_0 \cos \alpha$$

Тут враховано, що початкова швидкість частинки спрямована під кутом α до осі Z (див. рис. 3.1).

Якщо продиференціювати перше рівняння системи (3б.2) та в отриманий результат підставити друге рівняння системи (3б.2), то знайдемо

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x,$$

або

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega^2 v_x = 0. \quad (3б.3)$$

У рівнянні позначено

$$\omega = \frac{qB}{m}. \quad (3б.4)$$

Цю величину називають **циклотронною частотою**. Рівняння (3б.3) в математиці називають **диференціальним рівнянням гармонічних коливань**. Його розв'язок є

$$v_x = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (3б.5)$$

де A, φ_0 – сталі, які визначаються початковими умовами. Для того щоб впевнитись, що (3б.5) є розв'язком (3б.3), достатньо підставити (3б.5) в (3б.3). Далі з першого рівняння (3б.2) знаходимо

$$v_y = \frac{dv_x}{dt} \frac{1}{\left(\frac{q}{m} B\right)} = -A \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (36.6)$$

З'ясуємо сутність констант A та φ_0 . В початковий момент часу $t=0$ проекції швидкості v_x і v_y мають значення v_{0x}, v_{0y} . Підставляємо їх у (36.5) та (36.6) і отримуємо $v_{0x} = A \cos \varphi_0$, $v_{0y} = -A \sin \varphi_0$. Звідси знаходимо, що $\sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = A \sqrt{\cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0} = A$.

Зрозуміло, що $\sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = v_{0\perp}$ – модуль складової початкової швидкості частинки, яка перпендикулярна до осі Z . Таким чином, $A = v_{0\perp}$. Виберемо вісь X так, щоб в початковий момент часу $t=0$ швидкість \vec{v}_0 лежала в площині XZ . Тоді з рис. 3.1 знаходимо, що

$$v_{0x} = v_0 \sin \alpha, \quad v_{0y} = 0.$$

Це означає, що $\varphi_0 = 0$, $v_{0\perp} = v_0 \sin \alpha$. З урахуванням вищесказаного, рівняння (36.5) та (36.6) набувають вигляду

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0\perp} \cos(\omega t), \\ v_y &= -v_{0\perp} \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (36.7)$$

де $v_{0\perp} = v_0 \sin \alpha$.

Використаємо визначення швидкості і знайдемо залежність координат частинок від часу:

$$\begin{aligned} v_x = \frac{dx}{dt} = v_{0\perp} \cos(\omega t) &\Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_{0\perp} \cos(\omega t) dt \Rightarrow \\ x &= x_0 + \frac{v_{0\perp}}{\omega} \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (36.8)$$

$$\begin{aligned} v_y = \frac{dy}{dt} = -v_{0\perp} \sin(\omega t) &\Rightarrow \int_{y_0}^y dy = \int_0^t -v_{0\perp} \sin(\omega t) dt \Rightarrow \\ y &= y_0 + \frac{v_{0\perp}}{\omega} (\cos(\omega t) - 1), \end{aligned} \quad (36.9)$$

$$\begin{aligned} v_z = \frac{dz}{dt} = v_{0z} &\Rightarrow \int_{z_0}^z dz = \int_0^t v_{0z} dt \Rightarrow \\ z &= z_0 + v_{0z} \cdot t. \end{aligned} \quad (36.10)$$

Початок координатних осей вибираємо так, щоб $x_0 = 0, y_0 - \frac{v_{0\perp}}{\omega} = 0, z_0 = 0$. Це приводить до спрощення математичних співвідношень без зміни фізичної сутності. Тоді з (36.8)-(36.10) отримуємо

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_{0\perp}}{\omega} \sin(\omega t), \\ y &= \frac{v_{0\perp}}{\omega} \cos(\omega t), \\ z &= v_{0z} \cdot t. \end{aligned} \quad (36.11)$$

Порівнюючи перші два рівняння (36.11) з (36.1) та (36.2), робимо висновок, що частинка в площині XU рівномірно рухається по колу з радіусом

$$R = \frac{v_{0\perp}}{\omega} = \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega}. \quad (36.12)$$

Кутова частота обертання частинки по цьому колу визначається циклотронною частотою (36.4) $\omega = |q|B/m$.

Виходячи з третього рівняння системи (36.11), стверджуємо, що частинка рухається вздовж осі Z рівномірно. Суперпозиція рівномірного руху вздовж осі Z та рівномірного руху по колу в площині XU дасть рух частинки по спіралі (див. рис. 3.3).

Визначимо крок спіралі як відстань, яку частинка проходить вздовж осі Z за період обертання $T = 2\pi/\omega$ (див. рис. 3.3):

$$h = T \cdot v_z = \frac{2\pi}{\omega} v_{0z} = \frac{2\pi m}{qB} v_0 \cos \alpha. \quad (36.13)$$

Таким чином в однорідному магнітному полі заряджена частинка в загальному випадку рухається по спіралі. Радіус та крок спіралі визначаються формулами (36.12) та (36.13). Кутова частота обертання (кутова швидкість) дається співвідношенням (36.4), період обертання дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \cdot m}{qB}. \quad (36.14)$$

§ 4 Закон Біо-Савара-Лапласа. Індукція магнітного поля, яке створене відрізком із струмом. Індукція нескінченно довгого прямого провідника зі струмом. Індукція на осі колового струму [5]

Біо й Савар провели в 1820 р. дослідження магнітних полів, які створюються струмами, що проходять по тонких провідниках різної форми. Лаплас проаналізував експериментальні дані, отримані Біо й Саваром, і встановив залежність, яка отримала назву закону Біо-Савара-Лапласа. Відповідно до закону **Біо-Савара-Лапласа** індукція магнітного поля, яка створюється елементом струму $I d\vec{l}$, визначається за формулою

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}}, \quad (4.1)$$

де $d\vec{l}$ – вектор, модуль якого дорівнює елементарній довжині ділянки зі струмом I і спрямований у той бік, куди проходить струм (рис. 4.1); \vec{r} – вектор, що проведено від елемента струму в ту точку, у якій визначається $d\vec{B}$; r – модуль цього вектора; μ_0 – так звана магнітна стала, що дорівнює

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Тл} \cdot \text{м/А} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}, \quad (4.2)$$

де Гн (генрі) – одиниця індуктивності (про цю одиницю детально мова буде йти далі).

Згідно з цим законом магнітне поле будь-якого струму може бути обчислене як векторна сума (суперпозиція) полів, які створюються окремими елементарними ділянками струму $I d\vec{l}$:

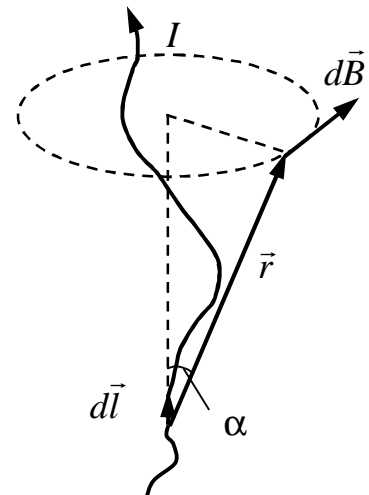


Рисунок 4.1 – Індукція $d\vec{B}$ магнітного поля, що створюється елементом $d\vec{l}$ провідника, по якому проходить струм I

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \int \frac{\mu_0 I [d\vec{l} \times \vec{r}]}{4\pi r^3}.$$

Модуль вектора $d\vec{B}$, виходячи з виразу (4.1), визначається співвідношенням

$$dB = \frac{\mu_0 I \cdot dl \cdot \sin \alpha}{4\pi r^2}, \quad (4.3)$$

де α – кут між векторами $d\vec{l}$ й \vec{r} .

2 Застосуємо закон Біо-Савара-Лапласа для обчислення індукції магнітного поля, яке створене відрізком із струмом, наприклад в точці O (див. рис. 4.2), яка знаходиться на відстані a від осі відрізка. При цьому вважаємо кути між напрямками векторів, проведених з кінців відрізка зі струмом до точки O і напрямком електричного струму I , відомими і такими, що дорівнюють відповідно α_1 й α_2 (див. рис. 4.2).

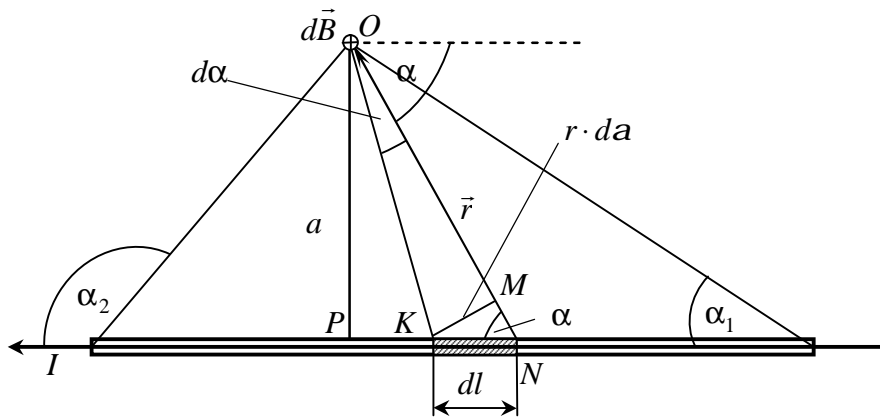


Рисунок 4.2 – До обчислення індукції магнітного поля, що створюється відрізком провідника зі струмом

Розіб'ємо відрізок із струмом I на елементарні ділянки dl (див. рис. 4.2). Відповідно до закону Біо-Савара-Лапласа елемент зі струмом $I d\vec{l}$ створює магнітне поле з індукцією $d\vec{B}$, що визначається формулою (4.1). Зауважимо, що вектори $d\vec{B}$ від усіх елементів струму $I \cdot d\vec{l}$ в точці O паралельні осі Z , яка перпендикулярна до площини рисунка (див. рис. 4.2). Тому відповідно до принципу суперпозиції при визначенні індукції магнітного поля \vec{B} у точці O можна перейти від геометричного до алгебраїчного підсумовування (інтегрування):

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \vec{e}_z \cdot \int d\vec{B} = \vec{e}_z \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \int \frac{\sin \alpha}{r^2} \cdot dl, \quad (4.4)$$

де $d\vec{B}$ – модуль вектора $d\vec{B}$ (див. формулу (4.3)); α – кут між векторами $d\vec{l}$ й \vec{r} .

Проаналізуємо вираз (4.4). Зрозуміло, що під знаком інтеграла у співвідношенні (4.4) кут α та довжина вектора r змінюються при переході від одного елемента довжини dl до іншого (див. рис. 4.2.). Тому перетворимо підінтегральний вираз так, щоб він залежав тільки від однієї змінної, наприклад кута α .

Неважко знайти зв'язок елемента dl з елементарним кутом $d\alpha$ та довжиною вектора r . З трикутника ΔKMN (див. рис. 4.2) випливає, що $dl \cdot \sin \alpha = KM$, а з трикутника ΔOKN – $KM = r \cdot d\alpha$. Звідси маємо $dl = r \cdot d\alpha / \sin \alpha$. Далі з трикутника ΔOPN можемо виразити довжину вектора r через відстань a та кут α : $r = a / \sin \alpha$. Тоді співвідношення (4.4) набуде вигляду

$$\vec{B} = \vec{e}_z \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{r} = \vec{e}_z \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot a} \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \cdot d\alpha.$$

Далі проведемо інтегрування і отримаємо шуканий вираз для індукції магнітного поля, що створюється відрізком провідника зі струмом:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot a} \cdot (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (4.5)$$

Застосуємо закон Біо-Савара-Лапласа для обчислення індукції магнітного поля, яке створене нескінченно довгим прямим провідником зі струмом (див. рис. 4.3). Для цього використаємо формулу для індукції магнітного поля від відрізка із струмом (4.5).

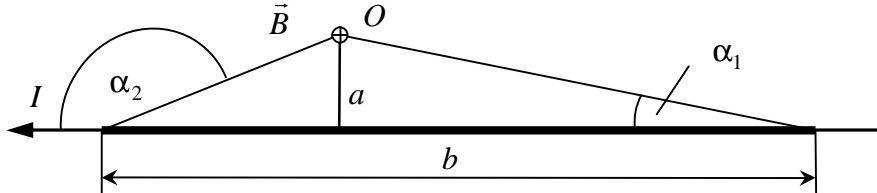


Рисунок 4.3 – До обчислення індукції магнітного поля, що створюється нескінченним тонким провідником зі струмом

З рис. 4.3 випливає, що коли довжина відрізка b буде прямувати до нескінченності, то кут α_1 буде прямувати до нуля, а кут α_2 – до 180° . Це означає, що коли відрізок перетвориться в нескінченно довгий провідник із струмом ($b = \infty$), кути будуть мати значення

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 180^\circ. \quad (4.6)$$

Тоді індукцію від нескінченно довгого тонкого провідника із струмом знайдемо, підставивши значення (4.6) в (4.5):

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot a} \cdot (1 - (-1)) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot a}, \text{ тобто } B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot a}. \quad (4.7)$$

Таким чином, отримали співвідношення (4.7), яке визначає індукцію магнітного поля від нескінченного тонкого провідника із струмом I . Слід зазначити, що **напрямок вектора \vec{B} можна визначити за правилом правого гвинта**: коли гвинт встановити паралельно струму й обернути його так, щоб поступальний рух гвинта був спрямований вздовж струму, то обертання шапочки гвинта буде визначати напрям силових ліній індукції магнітного поля.

Застосуємо закон Біо-Савара-Лапласа для обчислення індукції магнітного поля на осі колового струму (див. рис. 4.4).

Розіб'ємо круговий виток, по якому проходить струм I , на елементи довжини dl (див. рис. 4.4). Елемент довжини dl зі струмом I створює в точці O магнітне поле $d\vec{B}$, яке визначається законом Біо-Савара-Лапласа (4.1). Відповідно до цього закону вектор $d\vec{B}$ є перпендикулярним до радіуса-вектора \vec{r} й вектора $d\vec{l}$ (див. рис. 4.4), а його модуль відповідно до (4.3) дорівнює

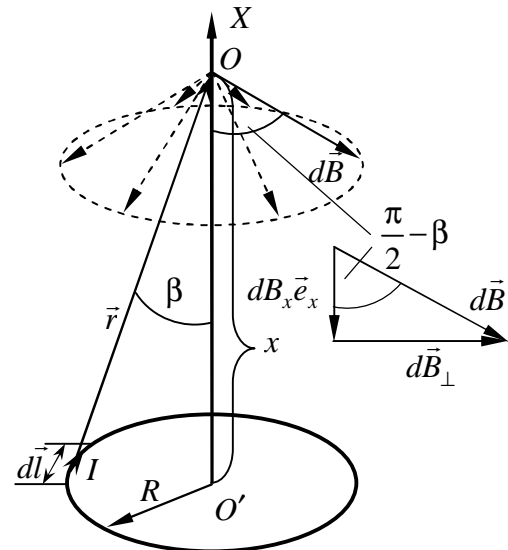


Рисунок 4.4

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl}{r^2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl}{r^2}. \quad (4.8)$$

Тут враховано, що кут α між векторами \vec{r} й $d\vec{l}$ дорівнює $\pi/2$.

Подамо вектор $d\vec{B}$ у вигляді суми двох векторів: вектора $B_x \vec{e}_x$, який спрямований паралельно осі X , та вектора $d\vec{B}_\perp$, який перпендикулярний до осі X (див. рис. 4.4).

Знайдемо векторну суму паралельних осі X компонент вектора $d\vec{B}$. Виходячи з рисунка 4.4, неважко знайти проекцію

$$dB_x = -dB \cdot \cos(\pi/2 - \beta) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin \beta}{r^2}. \quad (4.9)$$

У цій формулі кут β – кут між віссю X та вектором \vec{r} . Зазначимо, що для всіх елементів струму $I d\vec{l}$ кут β має одне і те саме значення (див. рис. 4.4)

$$\sin \beta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}. \quad (4.10)$$

Відповідно до принципу суперпозиції знаходимо результуючу проекцію B_x шляхом підсумовування усіх елементарних проекцій dB_x (або, в нашому випадку, їх інтегруванням)

$$\begin{aligned} B_x &= \int dB_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{r^2} \cdot \sin \beta \cdot \int_0^{2\pi R} dl = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{r^2} \cdot \sin \beta \cdot 2\pi R = \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{(R^2 + x^2)} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} \cdot 2\pi R = -\frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Знайдемо векторну суму перпендикулярних до осі X компонент вектора $d\vec{B}$ ($d\vec{B}_\perp$). Зазначимо – у цій сумі для кожного вектора $d\vec{B}_\perp$ можна знайти йому протилежний. Це означає, що сума усіх векторів $d\vec{B}_\perp$ буде дорівнювати нулю.

Таким чином, результуюча індукція магнітного поля \vec{B} від колового витка зі струмом буде визначатися співвідношенням

$$\boxed{\vec{B} = B_x \vec{e}_x = -\frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \vec{e}_x}. \quad (4.12)$$

§ 5 Взаємодія двох нескінченно довгих паралельних провідників. Ампер – одиниця вимірювання сили струму [15]

1 У 1820 р. Ампер експериментально встановив, що два прямі паралельні струми притягуються, а антипаралельні відштовхуються. Знайдемо силу взаємодії двох паралельних нескінченних струмів.

Розглянемо два нескінченно довгі паралельні провідники із струмами 1 і 2 (рис. 5.1). Індукція магнітного поля, що створюється нескінченно довгим провідником зі струмом I_1 в точці A на відстані R від провідника 1, визначається співвідношенням

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}. \quad (5.1)$$

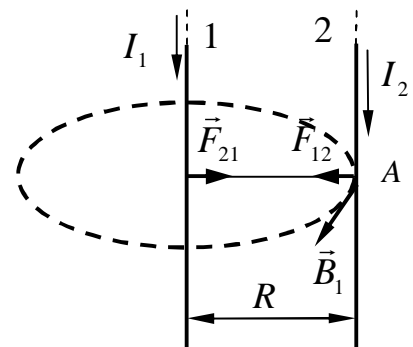


Рисунок 5.1

Напрямок вектора \vec{B}_1 можна визначити за **правилом правого гвинта**: коли гвинт встановити паралельно струму й обернути його так, щоб поступальний рух гвинта був спрямований вздовж струму, то обертання шапочки гвинта буде визначати напрям силових

ліній індукції магнітного поля. У точці А відповідно до правила правого гвинта, вектор індукції магнітного поля \vec{B}_1 спрямований «до нас» і перпендикулярний до провідника 2. Тому кут α між провідником 2 і індукцією магнітного поля \vec{B}_1 в точці А буде дорівнювати $\pi/2$. Тоді модуль сили Ампера, яка діє на відрізок довжиною l провідника 2 із струмом I_2 , зможемо знайти із закону Ампера

$$F_{12} = B_1 I_2 l \sin \alpha = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} l. \quad (5.2)$$

Зрозуміло, якщо струми I_1 і I_2 паралельні, то сила F_{12} за правилом лівої руки спрямована до провідника 1. Аналогічно можна показати, що на провідник 1 із струмом I_1 діє сила

$$F_{21} = \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi R} l,$$

але ця сила спрямована до провідника 2, тобто $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (струми притягуються).

Якщо змінити напрям I_1 (або I_2), то зміняться напрями \vec{F}_{12} і \vec{F}_{21} . Оскільки $|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|$, то в загальному випадку сила взаємодії двох паралельних струмів буде визначатися співвідношенням

$$\boxed{F = \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi R} l}. \quad (5.3)$$

2 Вивчення взаємодії двох прямих сталих паралельних струмів дає змогу встановити одиницю струму – ампер як одну з основних у СІ. **Ампер (А)** – сила сталого струму, який, проходячи по двох паралельних прямолінійних провідниках нескінченної довжини малого кругового перерізу, розміщених на відстані 1 м один від одного у вакуумі, утворює силу взаємодії між ними, яка дорівнює $2 \cdot 10^{-7}$ ньютон на кожний метр довжини.

З означення ампера і формули (5.3) знайдемо значення μ_0 :

$$2 \cdot 10^{-7} \text{ Н} = \frac{\mu_0 \cdot 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м}}{2\pi \cdot 1 \text{ м}}, \text{ звідки } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{А}^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \text{ (генрі на метр).}$$

§ 6 Сила, що діє на контур із струмом в однорідному магнітному полі. Момент сил, що діють на контур із струмом у магнітному полі. Вимірювання індукції магнітного поля за допомогою контуру зі струмом [5]

1 Знайдемо силу \vec{F} , що діє на контур із струмом в однорідному магнітному полі ($\vec{B} = \text{const}$). Згідно із законом Ампера на елемент контуру $d\vec{l}$ зі струмом I діє сила

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \times \vec{B}]. \quad (6.1)$$

Результуючу усіх сил, що діють на усі елементи контуру, тобто силу, яка діє на контур, знайдемо шляхом інтегрування (6.1):

$$\vec{F} = \oint I[d\vec{l} \times \vec{B}]. \quad (6.2)$$

Винесемо сталі величини I й \vec{B} з під знака інтеграла. У результаті отримаємо

$$\vec{F} = I \left[\left(\oint d\vec{l} \right) \times \vec{B} \right]. \quad (6.3)$$

Інтеграл $\oint d\vec{l}$ береться за замкненим контуром і тому він дорівнює нулю. Тоді з (6.3) випливає, що і сила дорівнює нулю $\vec{F} = 0$.

Таким чином, сила, що діє на контур зі струмом в однорідному магнітному полі, дорівнює нулю. Це справедливо для контурів будь-якої форми (у тому числі й неплоских) при довільному розміщенні контуру відносно напрямку поля. Істотною умовою для рівності нулю результуючої сили є лише однорідність поля.

У неоднорідному магнітному полі сила, що діє на контур із струмом, не дорівнює нулю. Її визначають таким співвідношенням:

$$\vec{F} = (\vec{p}_m \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}, \quad (6.4)$$

де $\vec{p}_m = I \cdot S \cdot \vec{n}$ магнітний момент контуру зі струмом, $\vec{\nabla} = \vec{e}_x \partial/\partial x + \vec{e}_y \partial/\partial y + \vec{e}_z \partial/\partial z$ – оператор набла.

2 Обчислимо результуючий обертальний момент сил \vec{M} , що діє на плоский контур із струмом I в однорідному магнітному полі з індукцією \vec{B} .

На рис. 6.1 показано прямокутний контур, орієнтований так, щоб вектор \vec{B} був паралельний двом з його сторонам. При зазначених напрямках струму й поля (див. рис. 6.1) на кожний елемент $d\vec{l}_1$ ділянки 1–2 діє спрямована за площину рисунка сила Ампера $d\vec{F}_1$, модуль якої дорівнює $IBdl_1$, а на кожний елемент $d\vec{l}_2$ ділянки 3–4 діє спрямована «на нас» сила Ампера $d\vec{F}_2$, модуль якої дорівнює $IBdl_2$. Ділянки 2–3 і 4–1 паралельні полю, тому сили на них не діють.

Результуюча \vec{F}_1 сил $d\vec{F}_1$ прикладена до середини ділянки 1–2 і має модуль, що дорівнює IBa . Аналогічно результуюча \vec{F}_2 сил $d\vec{F}_2$

прикладена до середини ділянки 3–4 і має модуль такої ж величини, що й \vec{F}_1 . Момент сил \vec{F}_1 й \vec{F}_2 відносно довільної осі X (див. рис. 6.1) дорівнює

$$M = IBa \cdot x_1 + IBa \cdot x_2 = IBa \cdot (x_1 + x_2) = IBa \cdot b = IBS.$$

Тут використано, що виходячи з геометричних міркувань $x_1 + x_2 = b$, $a \cdot b = S$, де S – площа контуру. Врахувавши взаємну орієнтацію векторів \vec{M} , \vec{B} і орту нормалі \vec{n} контуру зі струмом I , можна записати, що

$$\vec{M} = [IS\vec{n} \times \vec{B}]. \quad (6.5)$$

Вираз $IS\vec{n}$ є важливою характеристикою контуру площею S зі струмом I , який називають **магнітним моментом контуру**

$$\boxed{\vec{p}_m = IS\vec{n}}. \quad (6.6)$$

Вектор нормалі контуру \vec{n} має одиничну довжину, спрямований перпендикулярно до площини контуру і пов'язаний з напрямом електричного струму, що проходить по контуру, правилом правого гвинта. Як випливає з (6.6), *магнітний момент вимірюється в системі СІ в $A \cdot m^2$.*

Тоді формулу (6.5) з урахуванням визначення магнітного моменту можна записати у вигляді

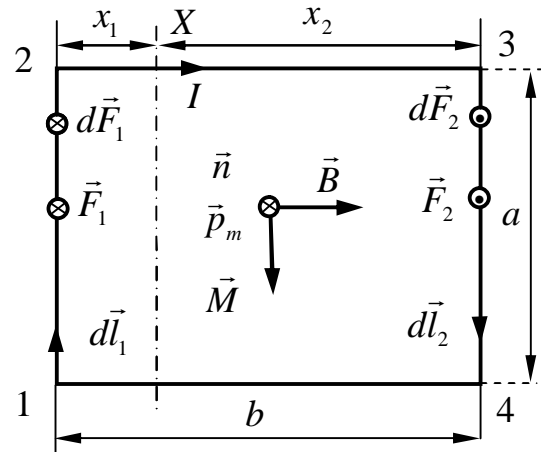


Рисунок 6.1 – Плоский контур зі струмом в однорідному магнітному полі, індукція \vec{B} якого паралельна стороні b контуру. Нормаль \vec{n} і сила \vec{F}_1 спрямовані «від нас», сила \vec{F}_2 спрямована «на нас»

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}], \quad (\vec{p}_m \perp \vec{B}). \quad (6.7)$$

Нагадаємо, що формула (6.7) отримана для випадку, коли вектор \vec{B} є паралельним площі цього контуру ($\vec{p}_m \perp \vec{B}$).

У випадку, коли вектори \vec{p}_m й \vec{B} паралельні (в цьому випадку вектор \vec{B} є перпендикулярним до площі контуру), сили, що діють на окремі елементи контуру, лежать в одній площині (площині контуру) і, отже, не можуть створити обертальний момент. Ці сили прагнуть розтягти (якщо \vec{p}_m й \vec{B} мають однаковий напрям) або стиснути (якщо \vec{p}_m й \vec{B} мають протилежні напрями) контур.

Розглянемо випадок, коли вектори \vec{p}_m й \vec{B} утворюють довільний кут α (рис. 6.2). Розкладемо магнітну індукцію \vec{B} на дві складові: \vec{B}_{\parallel} – паралельну й \vec{B}_{\perp} – перпендикулярну до вектора \vec{p}_m , і розглянемо дію кожної складової окремо. Компонента \vec{B}_{\parallel} буде обумовлювати сили, що розтягують або стискають контур. Компонента \vec{B}_{\perp} , що має модуль, який дорівнює $B \sin \alpha$, приведе до виникнення обертального моменту, який можна обчислити за формулою (6.7):

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}_{\perp}]. \quad (6.8)$$

Оскільки $[\vec{p}_m \times \vec{B}_{\parallel}] = 0$, формулу (6.8) можна написати у вигляді

$$\boxed{\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}]}. \quad (6.9)$$

Таким чином, отримали формулу (6.9), яка визначає результуючий обертальний момент сил, що діє на плоский контур із струмом I в однорідному магнітному полі з індукцією \vec{B} . Значимо, що ця формула є справедливою при будь-якій взаємній орієнтації векторів \vec{p}_m і \vec{B} . Можна довести, що вона є правильною для плоских контурів будь-якої форми, що знаходяться в однорідному магнітному полі.

3 Формулу (6.9) можна застосовувати й для неоднорідних магнітних полів. Необхідно тільки, щоб розміри контуру були малі. Тоді впливом неоднорідності поля на обертальний момент можна знехтувати. Такі контури й котушки можуть бути використані на практиці для вимірювання індукції магнітного поля. У цьому випадку їх називають *пробними*.

Якщо пробний контур помістити в магнітне поле, то під дією обертального моменту його магнітний момент \vec{p}_m встановиться уздовж індукції магнітного поля \vec{B} подібно, як це відбувається з магнітною стрілкою. Таким чином, самовільна орієнтація контуру зі струмом в магнітному полі дозволяє визначити напрям вектора індукції магнітного поля \vec{B} . Повернемо контур із цього положення на 90° . Обертальний момент у цьому випадку стане максимальним. Вимірявши максимальний обертальний момент сил M_{\max} контуру зі струмом, знаючи його магнітний момент, можемо знайти модуль індукції магнітного поля, використовуючи формулу (6.9):

$$\boxed{B = M_{\max} / p_m}. \quad (6.10)$$

Таким чином, використовуючи контур зі струмом, можна виміряти як напрям, так і модуль вектора індукції магнітного поля.

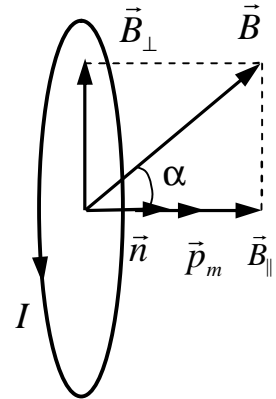


Рисунок 6.2 – Контур, нормаль \vec{n} до площини якого утворює з напрямом вектора \vec{B} кут α

§ 7 Робота при переміщенні контуру зі струмом у магнітному полі [9]

1 Розглянемо спочатку окремий випадок. Нехай паралельні провідники AN й CD (рис. 7.1) розміщені в однорідному сталому магнітному полі з індукцією \vec{B} , яке перпендикулярне до площини рисунка й спрямоване «до нас». Ліворуч знаходиться джерело струму, яке не показано на рисунку. По проводах може вільно переміщуватися провідний місток KL , що замикає струм I , який проходить по проводах, які розміщені ліворуч містка. Якщо l – довжина містка, то на нього магнітне поле діє із силою Ампера $F = IBl$. При переміщенні містка на відстань dx ця сила виконає роботу

$$dA = Fdx = IBldx = Id(BS),$$

де S – площа прямокутника $AKLC$. Величина BS є магнітним потоком через той самий прямокутник. Позначивши його через $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S$, отримаємо для елементарної роботи співвідношення

$$dA = Id\Phi, \quad (7.1)$$

а для скінченної роботи у випадку сталого електричного струму

$$A_{12} = I(\Phi_2 - \Phi_1). \quad (7.2)$$

Таким чином, **робота, яка виконується магнітним полем над струмом, дорівнює збільшенню магнітного потоку, помноженому на силу струму I** . При доведенні передбачалося, що струм I при переміщенні містка KL підтримувався постійним.

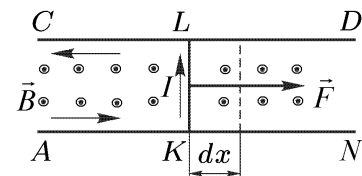


Рисунок 7.1

2 Формули (7.1) та (7.2) є правильними і в тому випадку, коли магнітне поле спрямовано довільно. Ці формули є правильними також і для будь-якого витка зі струмом при довільному переміщенні його в сталому неоднорідному магнітному полі. Виток може не тільки переміщуватися як ціле, але й довільно деформуватися. Для доведення достатньо подумки розбити виток на нескінченно малі елементи струму й розглянути нескінченно малі їх переміщення. При нескінченно малому переміщенні елемента струму магнітне поле, у якому він переміщується, може вважатися однорідним. До такого переміщення можна застосувати вираз (7.1) для елементарної роботи. Додаванням таких елементарних робіт для всіх елементів струму, на які розбитий виток, знову отримуємо вираз (7.1), у якому $d\Phi$ означає збільшення магнітного потоку через весь виток. Після цього перехід від формули (7.1) до формули (7.2) відбувається простим інтегруванням. Підкреслимо ще раз, що при переміщенні витка сила струму у ньому повинна підтримуватися сталою. Це досягається шляхом відповідного збільшення електрорушійної сили джерела.

§ 8 Теорема Гаусса для магнітного поля у вакуумі. Теорема про циркуляцію вектора магнітної індукції [5]

1 Як відомо, **елементарним потоком вектора \vec{A} через площу $d\vec{S}$ називають величину**

$$d\Phi = \vec{A} \cdot d\vec{S}.$$

Виходячи із цього визначення, можемо записати елементарний потік вектора індукції магнітного поля \vec{B} через площу $d\vec{S}$ у вигляді

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (8.1)$$

Магнітний потік через довільну площу S за визначенням дорівнює

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (8.2)$$

Однією з особливостей магнітного поля є те, що його силові лінії завжди замкнені, тобто не мають ні початку, ні кінця. Внаслідок цього потік вектора \vec{B} через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю (доводити це не будемо):

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (8.3)$$

Ця формула виражає **теорему Гаусса для вектора індукції магнітного поля \vec{B} в інтегральному вигляді**: потік вектора магнітної індукції через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю.

Теорема Гаусса є математичним виразом того, що в природі відсутні «магнітні заряди» – джерела магнітного поля, на яких би починалися або закінчувалися лінії магнітної індукції.

Значимо, що магнітний потік Φ вимірюється у веберах ($1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2$).

2 Для того щоб отримати теорему Гаусса в диференціальному вигляді, використаємо теорему Остроградського-Гаусса

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{A} \cdot dV, \quad (8.4)$$

де об'єм інтегрування V знаходиться в середині замкненої поверхні інтегрування S .

Виходячи з теореми Остроградського-Гаусса й (8.3), отримуємо для індукції магнітного поля

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{B} dV = 0,$$

або

$$\boxed{\text{div} \vec{B} = 0}. \quad (8.5)$$

Співвідношення (8.5) виражає **теорему Гаусса для вектора індукції магнітного поля \vec{B} в диференціальному вигляді**.

3 Тепер знайдемо циркуляцію вектора \vec{B} . Нагадаємо, що **циркуляцією вектора \vec{B} за визначенням називають інтеграл по замкнутому контуру Γ** :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l}, \quad (8.6)$$

де $d\vec{l}$ – елемент замкнутого контуру Γ , по якому виконують інтегрування.

Обчислимо циркуляцію вектора \vec{B} для випадку поля нескінченного прямого струму. Нехай замкнений контур Γ лежить у площині, яка перпендикулярна до провідника, по якому проходить такий електричний струм (рис. 8.1). У кожній точці контуру вектор \vec{B} спрямований за дотичною до кола, що проходить через цю точку. Через центр цього кола проходить електричний струм I і спрямований за площу рисунка. Подамо $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ у вигляді $B \cdot dl_B$ (dl_B – проекція $d\vec{l}$ на напрям вектора \vec{B}). З рисунка випливає, що dl_B дорівнює $b d\alpha$, де b – відстань від провідника зі струмом до $d\vec{l}$; $d\alpha$ – кут, на який повертається радіальна пряма при переміщенні уздовж контуру на відрізок dl . Підставимо в (8.6) це значення dl_B , вираз для індукції B нескінченно довгого провідника зі струмом й отримаємо

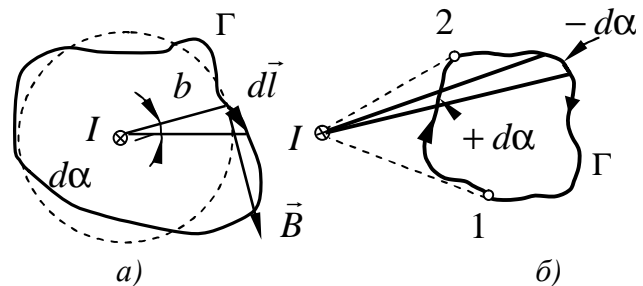


Рисунок 8.1 – До обчислення циркуляції для поля прямого струму. Струм перпендикулярний до площини рисунка і спрямований за рисунок

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = \oint_{\Gamma} B dl_B = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b} b d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\alpha.$$

При обході контуру Γ , що охоплює струм (рис. 8.1а), радіальна пряма увесь час повертається в одному напрямку, тому $\oint d\alpha = 2\pi$. Якщо струм не охоплюється контуром Γ (рис. 8.1б), то радіальна пряма повертається спочатку в одному напрямку (ділянка 1–2), а потім у протилежному (ділянка 2–1). Кути $d\alpha$, що відповідають поворотам у протилежні боки, відрізняються знаком. Тому $\oint d\alpha = 0$. Обидва результати можна виразити формулою

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I, \quad (8.7)$$

де I – струм, який охоплюється контуром Γ . Якщо контур Γ струму не охоплює, $I = 0$ і, отже, циркуляція також дорівнює нулю.

Знак циркуляції залежить від напрямку обходу контуру. Якщо цей напрям утворює з напрямом струму правогвинтову систему, то, як випливає з рис. 8.1а, вираз (8.7) додатний, у протилежному разі – від’ємний. Знак можна врахувати, вважаючи I алгебраїчною величиною, причому додатним потрібно вважати струм, напрям якого утворює із напрямом обходу контуру правогвинтову систему; струм протилежного напрямку буде від’ємним.

Ми отримали формулу (8.7) для прямого струму й плоского контуру. Однак можна довести, що ця формула є правильною й для неплоского контуру, і для струму, що проходить по провіднику довільної форми.

За допомогою принципу суперпозиції отриманий результат легко узагальнюється на випадок декількох струмів:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k \quad (8.8)$$

Формула (8.8) виражає **теорему про циркуляцію вектора індукції магнітного поля у вакуумі**: циркуляція вектора \vec{B} по довільному контуру Γ дорівнює алгебраїчній сумі струмів, що охоплюються контуром Γ , яка помножена на μ_0 .

Зазначимо, що формула (8.8) справедлива тільки для поля у вакуумі й за умовою відсутності змінних у часі електричних полів. *Поле, циркуляція якого не дорівнює нулю, називається вихровим*. Таким чином, магнітне поле є вихровим.

§ 9 Магнітне поле тороїда. Магнітне поле нескінченного соленоїда [5]

1 У вченні про магнітне поле сталих струмів теорема про циркуляцію магнітного поля

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k, \quad (9.1)$$

де $\sum_k I_k$ дорівнює алгебраїчній сумі струмів, що охоплюються контуром Γ , відіграє приблизно таку саму роль, що і теорема Гауса в електростатиці. За умови наявності симетрії у розподілі електричних струмів теорема про циркуляцію дозволяє достатньо просто визначити індукцію магнітного поля.

2 Тороїдом називається провідник, який навитий на каркас, що має форму тора (рис. 9.1). Застосуємо теорему про циркуляцію магнітного поля (9.1) для знаходження магнітного поля, яке створює електричний струм I , що проходить по тороїду. Візьмемо контур інтегрування Γ у вигляді кола радіуса r , центр якого збігається із центром тороїда (див. рис. 9.1). У наслідок симетрії розподілу електричних струмів вектор \vec{B} у кожній точці контуру Γ спрямований вздовж дотичної до нього. Отже, циркуляція вектора \vec{B} вздовж цього контуру дорівнює

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = B \cdot 2\pi r,$$

де \vec{B} – магнітна індукція у тих точках, де проходить контур Γ .

Якщо контур проходить усередині тороїда, він охоплює струм $\sum I_k = 2\pi R n I$, де R – радіус тороїда; n – число витків на одиницю його довжини. Тоді згідно з теоремою про циркуляцію магнітного поля (9.1) можемо записати

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot 2\pi R n I,$$

звідки знаходимо індукцію магнітного поля всередині тороїда

$$\boxed{B = \frac{R}{r} \mu_0 n I}. \quad (9.2a)$$

Коли контур проходить за межами тороїда, то він струмів не охоплює. Тому в цьому випадку $B \cdot 2\pi r = 0$. Отже, за межами тороїда поле дорівнює нулю

$$\boxed{B = 0}. \quad (9.2b)$$

Таким чином, поле зосереджене усередині тороїда. Зазначимо, що поле тороїда не є однорідним, у точках з різним значенням r індукція магнітного поля, як це впливає з (9.2a), є різною.

2 Соленоїдом називається провідник, який навитий на каркас, що має форму циліндра. Знайдемо індукцію магнітного поля нескінченно довгого соленоїда з відомим числом витків на одиницю його довжини n , по якому проходить струм I .

Перш за все зазначимо, що нескінченно довгий соленоїд є частинним випадком тороїда. Дійсно, коли радіус тороїда R збільшувати до нескінченності, то довільний відрізок тороїда перейде у соленоїд. Звідси впливає, що магнітне поле соленоїда можна знайти, використовуючи формулу для індукції магнітного поля тороїда (9.2).

Розглядаючи улаштування тороїда (див. рис. 9.1), неважко з'ясувати, що відстань від центра тороїда до його довільної точки r пов'язана з радіусом тороїда R таким співвідношенням:

$$r = R - h, \quad (9.3)$$

де h є відстанню від осі тороїда до його довільної точки (див. рис. 9.1). Підставимо (9.3) в (9.2), перейдемо до випадку $R \rightarrow \infty$ і отримаємо формулу для індукції магнітного поля всередині соленоїда

$$B = \mu_0 n I \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{R}{R - h} \right) = \mu_0 n I \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - h/R} \right) = \mu_0 n I \left(\frac{1}{1 - 0} \right) = \mu_0 n I.$$

Таким чином, індукція магнітного поля всередині соленоїда дорівнює

$$\boxed{B = \mu_0 n I}. \quad (9.4a)$$

Зрозуміло, що за межами соленоїда, як і у випадку тороїда, магнітне поле відсутнє, тобто

$$\boxed{B = 0}. \quad (9.4b)$$

Слід також відзначити, що як впливає з (9.4), у різних внутрішніх точках соленоїда магнітне поле має однакове значення як за модулем, так і за напрямом. Тобто всередині соленоїда магнітне поле є однорідним.

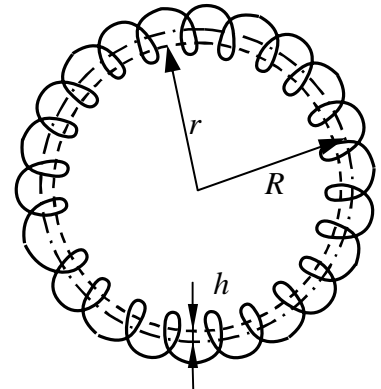


Рисунок 9.1 – Тороїд радіуса R . Штриховою лінією радіуса r показано контур інтегрування Γ

ТЕМА 2 МАГНІТНЕ ПОЛЕ В РЕЧОВИНІ

§ 10 Намагнічування речовини. Гіпотеза Ампера. Намагніченість [5]

1 Якщо в магнітне поле \vec{B}_0 , що створене у вакуумі, помістити будь-яку речовину, то магнітне поле зміниться. Це пояснюється тим, що всяка речовина є магнетиком, тобто здатна під дією магнітного поля *отримувати магнітний момент (намагнічуватися)*. Намагнічена речовина створює додаткове поле \vec{B}' , що разом з полем \vec{B}_0 утворює результуюче поле

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' . \quad (10.1)$$

Дійсне (мікроскопічне) поле в магнетик дуже змінюється в межах міжмолекулярних відстаней. Тому під індукцією \vec{B} розуміємо на увазі усереднене (макроскопічне) поле.

2 Для пояснення намагнічування тіл Ампер припустив (*гіпотеза Ампера*), що в молекулах речовини циркулюють кругові струми (молекулярні струми). Кожний такий струм має магнітний момент і створює в навколишньому просторі магнітне поле. За умови відсутності зовнішнього поля молекулярні струми орієнтовані безладно, тому результуюче поле, що обумовлене ними, в середньому дорівнює нулю. Внаслідок хаотичної орієнтації магнітних моментів окремих молекул сумарний магнітний момент тіла також дорівнює нулю. Під дією зовнішнього поля магнітні моменти молекул отримують переважну орієнтацію в одному напрямку, внаслідок чого речовина намагнічується – його сумарний магнітний момент стає відмінним від нуля. Магнітні поля окремих молекулярних струмів у цьому випадку вже не компенсують один одного, і тому виникає поле додаткове \vec{B}' . Гіпотеза Ампера, як виявилось пізніше, правильно описує намагнічування парамагнетиків.

3 Намагнічування речовини характеризують вектором намагніченості. **Вектором намагніченості** називають магнітний момент одиниці об'єму

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}_m , \quad (10.2)$$

де ΔV – фізично нескінченно малий об'єм, узятий біля деякої точки простору; \vec{p}_m – магнітний момент окремої молекули. Підсумовування виконується за всіма молекулами, що знаходяться в об'ємі ΔV .

Як впливає зі співвідношення (10.2) намагніченість у системі СІ вимірюється в амперах поділених на метр ($[J] = A \cdot m^2 / m^3 = A / m$).

§ 11 Теорема Гаусса для індукції магнітного поля в речовині. Напруженість магнітного поля. Теорема про циркуляцію напруженості магнітного поля [5]

1 Поле, яке створюється молекулярними струмами \vec{B}' , так само як і поле у вакуумі \vec{B}_0 не має джерел. Тому дивергенція результуючого поля у речовині

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' \quad (11.1)$$

дорівнює нулю:

$$\text{div} \vec{B} = \text{div} \vec{B}_0 + \text{div} \vec{B}' = 0 . \quad (11.2)$$

Таким чином, отримуємо *теорему Гаусса для індукції магнітного поля в речовині у диференціальному вигляді*

$$\boxed{\text{div} \vec{B} = 0} . \quad (11.3)$$

Використовуючи теорему Остроградського-Гаусса $\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{A} \cdot dV$, знаходимо *теорему Гаусса для індукції магнітного поля у речовині в інтегральному вигляді*

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{B} \cdot dV = \int_V 0 \cdot dV = 0,$$

або

$$\boxed{\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0} \quad (11.4)$$

Таким чином, для індукції магнітного поля у речовині теорема Гаусса записується у такому самому вигляді, як і для вакууму.

2 Знайдемо циркуляцію індукції магнітного поля \vec{B} у речовині. Як відомо, індукція \vec{B} дорівнює векторній сумі додаткового поля \vec{B}' , яке створюється молекулярними струмами, й поля, що створюється зовнішніми джерелами у вакуумі \vec{B}_0 (11.1). Використовуємо визначення циркуляції вектора та (11.1) й отримуємо

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \oint \vec{B}_0 d\vec{l} + \oint \vec{B}' d\vec{l}. \quad (11.5)$$

Відповідно до теореми про циркуляцію індукції магнітного поля у вакуумі можемо записати

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}_0 d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k, \quad (11.6)$$

де $\mu_0 \sum I_k$ – алгебраїчна сума макроскопічних струмів, що охоплюються контуром Γ , по якому виконується інтегрування, тобто алгебраїчна сума струмів, що проходять через довільну поверхню S , що обмежена контуром Γ .

Для поля \vec{B}' , яке створюється молекулярними струмами, повинно виконуватися аналогічне співвідношення:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}' d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_{\text{мол},k}, \quad (11.7)$$

де $\sum I_{\text{мол},k}$ – алгебраїчна сума молекулярних струмів, що проходять через поверхню S .

Підставимо вирази (11.6) і (11.7) у формулу (11.5) і отримаємо

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k + \mu_0 \sum_k I_{\text{мол},k}. \quad (11.8)$$

Тут ми зіштовхуємося з утрудненням: для того щоб знайти циркуляцію поля \vec{B} , потрібно знати суму молекулярних струмів, яка, у свою чергу, залежить від \vec{B} . Спосіб, що дозволяє обійти це утруднення полягає у такому: виявляється, можна знайти таку допоміжну величину, циркуляція якої визначається лише сумою макроскопічних струмів. Розглянемо це питання більш детально.

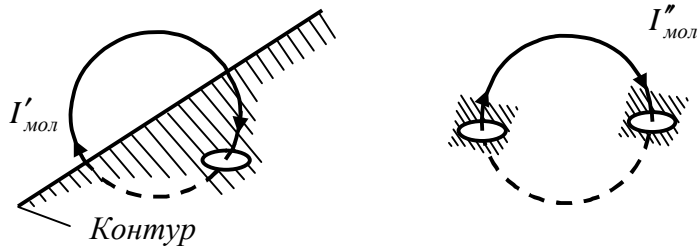


Рисунок 11.1 – Струм $I''_{\text{мол}}$ перетинає поверхню двічі в протилежних напрямках, тому його внесок у суму струмів дорівнює нулю. Струм $I'_{\text{мол}}$ перетинає поверхню тільки один раз

Обчислимо алгебраїчну суму молекулярних струмів, що проходять через поверхню, яка обмежена деяким контуром. З рис. 11.1 випливає, що в цю суму входять тільки ті молекулярні струми, які виявляються «нанизаними» на контур. Струми, які «не нанизані» на контур, або не перетинають поверхню зовсім, або перетинають поверхню двічі – один раз в одному напрямку, другий раз в іншому. Тому їх внесок в алгебраїчну суму струмів, які охоплюються контуром, дорівнює нулю.

З рис. 11.2 бачимо, що елемент контуру $d\vec{l}$, який утворює з напрямом намагніченості \vec{J} кут α , «нанизує» на себе тільки ті молекулярні струми, центри яких попадають усередину косої поверхні з об'ємом $S_{\text{мол}} \cos \alpha dl$ ($S_{\text{мол}}$ – площа, яка охоплюється окремим молекулярним струмом). Якщо n – число молекул в одиниці об'єму, то сумарний струм, що охоплюється елементом dl , дорівнює $I_{\text{мол}} n S_{\text{мол}} \cos \alpha dl$. Добуток $I_{\text{мол}} S_{\text{мол}}$ дорівнює магнітному моменту p_m окремого молекулярного струму. Отже, вираз $I_{\text{мол}} S_{\text{мол}} n$ являє собою магнітний момент одиниці об'єму, тобто дає модуль вектора \vec{J} , а $I_{\text{мол}} S_{\text{мол}} n \cos \alpha dl$ – проекцію вектора \vec{J} на напрям елемента $d\vec{l}$. Таким чином, сумарний молекулярний струм, «нанизаний» на елемент $d\vec{l}$, визначається виразом $J dl \cos \alpha = \vec{J} \cdot d\vec{l}$, а сума молекулярних струмів, «нанизаних» на весь контур (тобто сума молекулярних струмів, що проходять через поверхню, яка обмежена контуром), дорівнює

$$\sum_k I_{\text{мол},k} = \oint \vec{J} \cdot d\vec{l}.$$

Підставивши цей вираз в (11.8), прийдемо до рівності

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k + \mu_0 \oint \vec{J} \cdot d\vec{l}. \quad (11.9)$$

Розділивши цю рівність на μ_0 й об'єднавши разом обидві циркуляції, отримаємо формулу

$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = \sum_k I_k. \quad (11.10)$$

Величина, що знаходиться в дужках під знаком інтеграла, має таку властивість: її циркуляція визначається тільки макроскопічними струмами. Цю допоміжну величину називають **напруженістю магнітного поля** й позначають буквою \vec{H} . Таким чином,

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}. \quad (11.11)$$

З урахуванням (11.11) співвідношення (11.10) можна написати у вигляді

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \sum_k I_k. \quad (11.12)$$

Формула (11.12) виражає **теорему про циркуляцію вектора \vec{H}** : циркуляція вектора напруженості магнітного поля по деякому контуру Γ дорівнює алгебраїчній сумі макроскопічних струмів, які охоплюються цим контуром.

Напруженість магнітного поля \vec{H} є аналогом вектора індукції електричного поля \vec{D} . Спочатку вважалося, що в природі є подібні до електричних зарядів магнітні маси, і вчення про магнетизм розвивалося за аналогією з вченням про електрику. Тоді й були введені назви: «магнітна індукція» для \vec{B} й «напруженість поля» для \vec{H} . Згодом з'ясувалося, що магнітних мас у природі не існує й що величина, яку називають магнітною індукцією, у дійсності є аналогом не електричного зсуву \vec{D} , а напруженості електричного поля \vec{E} (відповідно \vec{H} – аналогом не \vec{E} , а \vec{B}). Однак змінювати вже усталену термінологію не стали, тим більше що внаслідок різної природи електричного й магнітного полів (електростатичне поле потенціальне, магнітне соленоїдальне) величини \vec{B} й \vec{D} мають досить багато подібного у своїх властивостях (наприклад, лінії \vec{B} , як і лінії \vec{D} , не мають розривів на межі двох середовищ).

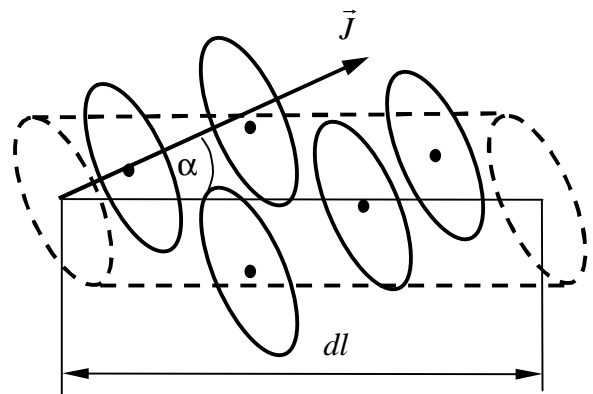


Рисунок 11.2 – Молекулярні струми, «нанизані» на елемент контуру $d\vec{l}$

У вакуумі $\vec{J} = 0$, тому \vec{H} перетворюється в \vec{B}/μ_0 , і формула (11.12) переходить у формулу для циркуляції магнітного поля у вакуумі.

Як впливає з визначення напруженості магнітного поля (11.11), величина \vec{H} вимірюється в амперах поділених на метр (А/м).

§ 12 Магнітна проникність, магнітна сприйнятливість [5]

1 Із причин, які з'ясуються пізніше, намагніченість прийнято зв'язувати не з магнітною індукцією, а з напруженістю поля. Вважаємо, що в кожній точці магнетика

$$\boxed{\vec{J} = \chi \vec{H}}, \quad (12.1)$$

де χ – характерна для даного магнетика величина, яка називається **магнітною сприйнятливістю**. Дослід показує, що для слабомагнітних (неферомагнітних) речовин при не занадто сильних полях χ не залежить від \vec{H} . Неважко з'ясувати, що розмірність \vec{H} збігається з розмірністю \vec{J} . Отже, χ – безрозмірна величина.

Підставивши у формулу, що виражає означення напруженості магнітного поля, вираз (12.1) для \vec{J} , отримуємо співвідношення

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H},$$

з якого знаходимо

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0(1+\chi)}. \quad (12.2)$$

Безрозмірна величина

$$\boxed{\mu = 1 + \chi} \quad (12.3)$$

називається **відносною магнітною проникністю**, або просто **магнітною проникністю речовини**.

На відміну від діелектричної сприйнятливості α , що може мати лише додатні значення (вектор поляризації \vec{P} в ізотропному діелектрику завжди спрямований вздовж поля \vec{E}), магнітна сприйнятливість χ буває як додатною, так і від'ємною. Тому магнітна проникність μ може бути як більшою, так і меншою від одиниці.

З урахуванням (12.3) формулі (12.2) можна надати вигляду

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu}. \quad (12.4)$$

Таким чином, напруженістю магнітного поля \vec{H} є вектор, що має такий самий напрям, що й вектор \vec{B} , але в $\mu_0 \mu$ разів менший за модулем. (В анізотропних середовищах вектори \vec{H} й \vec{B} в загальному випадку не збігаються за напрямом.)

2 З'ясуємо фізичний зміст магнітної проникності. Припустимо, що є однорідне магнітне поле у вакуумі, яке ми будемо характеризувати за допомогою або вектора \vec{B}_0 , або вектора $\vec{H}_0 = \vec{B}_0/\mu_0$. Внесемо в це поле (яке ми будемо називати зовнішнім) нескінченно довгий круглий стрижень із однорідного й ізотропного матеріалу й розмістимо його уздовж ліній \vec{B}_0 (рис. 12.1). Під дією поля молекулярні струми встановляться так, що їхні магнітні моменти розмістяться уздовж осі стержня, а площини струмів стануть перпендикулярними до цієї осі. Розглянемо молекулярні струми, що лежать в одному з поперечних перерізів

стержня. У будь-якій точці усередині стержня сусідні молекулярні струми проходять у протилежних напрямках, так що їх спільна дія дорівнює нулю. Некомпенсованими будуть лише ділянки струмів, що примикають до поверхні стержня. Таким чином, сумарна дія молекулярних струмів буде такою, яка викликала б макроскопічний струм, що проходить по поверхні стержня перпендикулярно до його осі. Позначимо лінійну густину цього струму через $j_{\text{лін}}$. Проходження такого струму можна описати за допомогою моделі соленоїда, в якому лінійна густина має таке саме значення, тобто $j_{\text{лін}}$. Це має місце, коли в цьому соленоїді добуток лінійної густини витків на силу струму буде дорівнювати $j_{\text{лін}}$, тобто $nI = j_{\text{лін}}$. Магнітна індукція усередині такого соленоїда визначається за формулою $B = \mu_0 nI$. Отже, магнітна індукція додаткового поля, яке створюється молекулярними струмами усередині стержня, дорівнює

$$B' = \mu_0 j_{\text{лін}}. \quad (12.5)$$

Відповідно до правила правого гвинта напрям \vec{B}' збігається з напрямом \vec{B}_0 (див. рис. 12.1).

За межами стержня \vec{B}' дорівнює нулю.

Виділимо подумки у стержні перпендикулярний до його осі шар товщиною dl (рис. 12.1). Молекулярні струми, які розміщені в цьому шарі, еквівалентні круговому струму сили $j_{\text{лін}} dl$. Згідно з означенням магнітний момент цього струму дорівнює

$$dp_m = j_{\text{лін}} S dl,$$

де S – площа поперечного перерізу стержня. Розділивши dp_m на об'єм шару $dV = S dl$, отримаємо згідно з означенням намагніченість стержня:

$$J = j_{\text{лін}}. \quad (12.6)$$

Таким чином, модуль намагніченості стержня дорівнює лінійній густині молекулярного струму, який обходить стержень. З урахуванням (12.6) формула (12.5) набирає вигляду

$$\vec{B}' = \mu_0 \vec{J} \quad (12.7)$$

(ми змогли написати формулу у векторному вигляді, оскільки вектори \vec{B}' й \vec{J} збігаються за напрямом).

Склавши вектори \vec{B}_0 й \vec{B}' , знайдемо магнітну індукцію результуючого поля усередині стержня:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{J}.$$

Підстановка цього виразу у формулу, яка є визначенням напруженості магнітного поля \vec{H} , дає напруженість поля усередині стержня:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - J = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \vec{H}_0.$$

Отже, напруженість поля у стержні виявляється такою, що збігається з напруженістю зовнішнього поля. Помноживши \vec{H} на $\mu_0 \mu$, отримаємо магнітну індукцію усередині стержня:

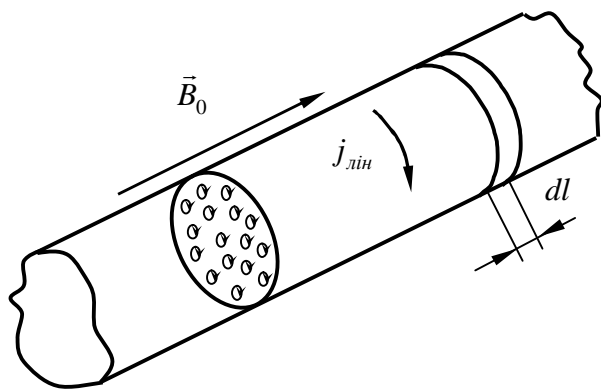


Рисунок 12.1 – Молекулярні струми в намагніченому стержні

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} = \mu_0 \mu \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \mu \vec{B}_0, \text{ тобто } \boxed{\vec{B} = \mu \vec{B}_0}. \quad (12.8)$$

Звідси випливає, що магнітна проникність μ показує, у скільки разів підсилюється поле в магнетик. У цьому полягає **фізичний зміст магнітної проникності**. Нагадаємо, що діелектрична проникність ϵ показує, у скільки разів послаблюється поле в діелектрику.

Відзначимо, що оскільки поле \vec{B}' відмінне від нуля тільки усередині стержня, магнітне поле поза стержнем залишається без змін.

Отриманий нами результат є правильним лише в тих випадках, коли однорідний і ізотропний магнетик заповнює об'єм, що обмежений поверхнями, які утворені лініями напруженості зовнішнього поля.

Значимо, що оскільки \vec{H} (на відміну від \vec{B}) при дотриманні зазначених вище умов не залежить від μ (а отже, і від χ), то доцільно розглядати залежність \vec{J} від \vec{H} , а не від \vec{B} (див. формулу (12.1)).

§ 13 Умови для векторів індукції та напруженості магнітного поля на межі двох магнетиків [5]

1 З'ясуємо, як змінюються вектори \vec{B} й \vec{H} при переході з одного середовища з магнітною проникністю μ_1 в інше з магнітною проникністю μ_2 . Розглянемо стаціонарний випадок, коли поля не змінюються з часом. Для вирішення вищесформульованої проблеми застосуємо теорему Гаусса для індукції магнітного поля в речовині

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (13.1)$$

та теорему про циркуляцію напруженості магнітного поля

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \sum_k I_k. \quad (13.2)$$

2 Розглянемо на межі двох магнетиків із проникностями μ_1 й μ_2 уявну циліндричну поверхню висотою h з основами S_1 й S_2 , які розміщені по різні боки від поверхні розділу (рис. 13.1). Потік вектора \vec{B} через цю замкнуту поверхню дорівнює

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = B_{1n_1} S_1 + B_{2n_2} S_2 + \langle B_n \rangle S_{\text{бічн}}. \quad (13.3)$$

Відповідно до теореми Гаусса (13.1) потік вектора \vec{B} через будь-яку замкнуту поверхню дорівнює нулю. Тому прирівнюємо до нуля вираз (13.3), виконаємо перехід $h \rightarrow 0$, і приходимо до співвідношення $B_{1n_1} = -B_{2n_2}$.

Якщо проектувати \vec{B}_1 й \vec{B}_2 на одну і ту саму нормаль, наприклад $\vec{n} = \vec{n}_1 = -\vec{n}_2$ (див. рис. 13.1), то отримаємо

$$\boxed{B_{1n} = B_{2n}}. \quad (13.4)$$

Замінивши у (13.4) складові \vec{B} відповідними складовими вектора \vec{H} , які помножені на $\mu_0 \mu$, отримаємо співвідношення

$$\mu_0 \mu_1 H_{1n} = \mu_0 \mu_2 H_{2n},$$

з якого випливає, що

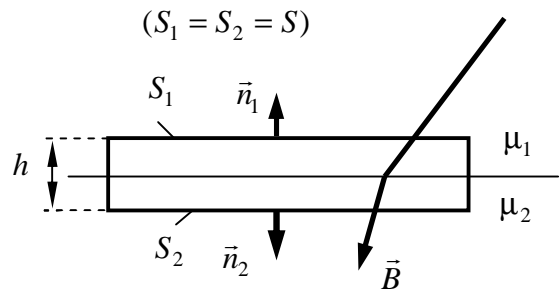


Рисунок 13.1

$$\boxed{\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}}. \quad (13.5)$$

Формули (13.4) та (13.5) показують, як змінюються нормальні складові векторів \vec{B} та \vec{H} на межі поділу двох магнетиків.

З Тепер розглянемо на межі магнетиків прямокутний контур (рис. 13.2) і обчислимо для нього циркуляцію \vec{H} . При малих розмірах контуру циркуляцію можна подати у вигляді

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = H_{1\tau} a - H_{2\tau} a + \langle H_l \rangle 2b, \quad (13.6)$$

де $\langle H_l \rangle$ – середнє значення \vec{H} на перпендикулярних до межі ділянках контуру. Якщо вздовж межі розділу не проходять макроскопічні струми $\sum I_k = 0$, то циркуляція вектора \vec{H} вздовж обраного контуру відповідно до теореми (13.2) буде дорівнювати нулю. Поклавши вираз (13.6) таким, що дорівнює нулю, й виконавши граничний перехід $b \rightarrow 0$, прийдемо до співвідношення

$$\boxed{H_{1\tau} = H_{2\tau}}. \quad (13.7)$$

Замінивши складові \vec{H} відповідними складовими вектора \vec{B} , що поділені на $\mu_0 \mu$, отримаємо співвідношення

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_0 \mu_1} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_0 \mu_2},$$

з якого випливає, що

$$\boxed{\frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}}. \quad (13.8)$$

Формули (13.7) та (13.8) показують, як змінюються нормальні складові векторів \vec{B} та \vec{H} на межі поділу двох магнетиків.

Підбиваючи підсумок, можна сказати, що при переході через межу розділу двох магнетиків нормальна складова вектора \vec{B} й тангенціальна складова вектора \vec{H} не змінюються. Тангенціальна ж складова вектора \vec{B} й нормальна складова вектора \vec{H} при переході через межу розділу перетерплюють розриви.

§ 14 Гіромагнітне відношення. Дослід Ейнштейна і де Хааса [5]

1 Природа молекулярних струмів стала зрозумілою після того, як дослідями Резерфорда було встановлено, що атоми всіх речовин складаються з додатно зарядженого ядра й від'ємно заряджених електронів, що рухаються навколо нього.

Рух електронів у атомах описується законами квантової механіки. Однак магнетизм речовин вдається задовільно пояснити, користуючись напівкласичною борівською моделлю, відповідно до якої електрони в атомах рухаються по стаціонарних кругових орбітах. Стабільність таких орбіт суперечить законам класичної фізики. Тому пояснити магнетизм речовини на основі чисто класичних уявлень неможливо. Вичерпне пояснення дає лише квантова механіка.

2 Розглянемо пояснення магнітних властивостей речовин на основі уявлення про стабільні електронні орбіти. Нехай електрон рухається зі швидкістю v по орбіті радіусом r (рис. 14.1). Через площадку, розміщену в будь-якому місці на шляху електрона, переноситься

за одиницю часу заряд e/T , де e – елементарний заряд, а T – період обертання електрона навколо ядра. Отже, рух електрона по орбіті є еквівалентним круговому струму з силою електричного струму $I = e/T$. Оскільки заряд електрона від’ємний, то напрям руху електрона й напрям струму протилежні. Магнітний момент струму, який створюється електроном, дорівнює

$$p_m = IS = (e/T)\pi r^2.$$

Добуток $2\pi r/T$ є швидкістю електрона v . Тому можна написати, що

$$p_m = evr/2. \quad (14.1)$$

Цей момент обумовлений рухом електрона по орбіті, у зв'язку з чим називається **орбітальним магнітним моментом електрона**. Напрямок вектора \vec{p}_m утворює з напрямом струму правогвинтову, а з напрямом руху електрона лівогвинтову систему (див. рис. 14.1). Електрон, який рухається по орбіті, має момент імпульсу

$$L = mvr, \quad (14.2)$$

де m – маса електрона. Вектор \vec{L} називається **орбітальним механічним моментом електрона**. Він утворює з напрямом руху електрона правогвинтову систему. Отже, напрями векторів \vec{p}_m і \vec{L} протилежні.

Відношення магнітного моменту елементарної частинки до її механічного моменту називається **гіромагнітним (магнітомеханічним) відношенням**. Для електрона, який рухається по орбіті, це відношення дорівнює

$$p_m / L = -e/2m. \quad (14.3)$$

Знак мінус вказує на те, що напрями моментів протилежні.

Знаслідок обертання навколо ядра електрон виявляється подібним до дзиги. Ця обставина лежить в основі так званих **магнітомеханічних явищ**, що полягають у тому, що намагнічування магнетика приводить до його обертання й, навпаки, обертання магнетика викликає його намагнічування. Існування першого явища було доведено експериментально Ейнштейном і де Хаасом, другого – Барнеттом.

В основі досліду Ейнштейна й де Хааса лежать такі міркування. Якщо помістити стержень із магнетика в паралельне його осі магнітне поле, то магнітні моменти електронів установаються за напрямом поля, а механічні моменти – проти поля. У результаті сумарний механічний момент електронів $\sum \vec{L}_e$ стане відмінним від нуля (у вихідному стані внаслідок хаотичної орієнтації окремих моментів він дорівнював нулю). Момент імпульсу системи стержень+електрони відповідно до закону збереження моменту імпульсу повинен залишитися сталим. Тому стержень отримує момент імпульсу, який протилежний до моменту імпульсу електронів, тобто дорівнює $(-\sum \vec{L}_e)$, і, отже, починає обертатися. Зміна напрямку поля на зворотне приведе до зміни напрямку обертання стержня.

Механічну модель цього досліду можна здійснити, посадивши людину на стілець, який може обертатися, і давши їй у руки масивне колесо, що обертається. Повернувши колесо віссю вгору, людина починає обертатися протилежно до напрямку обертання колеса. Повернувши колесо віссю донизу, людина починає обертатися в інший бік.

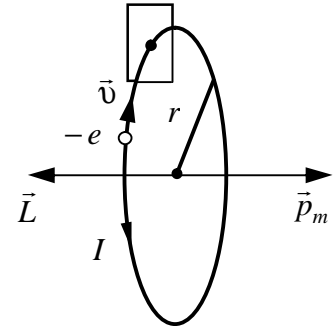


Рисунок 14.1 – Механічний і магнітний орбітальні моменти електрона

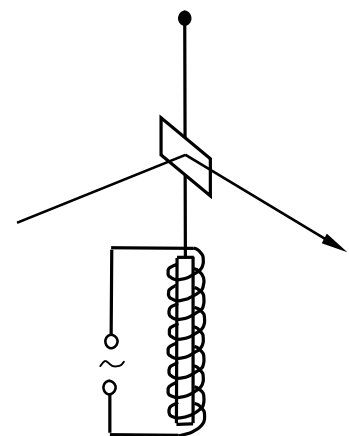


Рисунок 14.2 – Схема досліду Ейнштейна й де Хааса

Дослід Ейнштейна й де Хааса здійснювався таким чином (рис. 14.2). Тонкий залізний стержень підвішувався на пружній нитці й поміщався усередину соленоїда. Закручування нитки при намагнічуванні стержня сталим магнітним полем було дуже малим. Для посилення ефекту застосовувався метод резонансу – соленоїд живився змінним струмом, частота якого підбиралася такою, що дорівнювала власній частоті крутильних коливань стержня. В цих умовах амплітуда коливань досягала значень, які можна було виміряти, спостерігаючи зміщення світлового зайчика, що відбивався від дзеркальця, яке було закріплене на нитці. З даних досліду було обчислено гіромагнітне відношення, яке виявилось таким, що дорівнювало $(-e/m)$. Таким чином, з досліду Ейнштейна і де Хааса випливає: *знак заряду носіїв, які створюють молекулярні струми, збігся зі знаком заряду електрона; однак отримане гіромагнітне відношення перевищило значення (14.3) у два рази.*

4 Надалі з'ясувалося, що, крім орбітальних моментів (14.1) і (14.2), електрон має власні механічний L_s і магнітний p_{ms} моменти, для яких гіромагнітне відношення дорівнює

$$p_{ms} / L_s = -e / m , \quad (14.4)$$

тобто збігається зі значенням, яке було отримане у дослідах Ейнштейна й де Хааса. Звідси випливає, що магнітні властивості заліза обумовлені не орбітальними, а власними магнітними моментами електронів.

Існування власних моментів електрона спочатку намагалися пояснити, розглядаючи електрон як заряджену кульку, що обертається навколо своєї осі. Відповідно до цього власний механічний момент електрона отримав назву **спін** (від англійського *to spin* – обертатися). Однак незабаром з'ясувалося, що таке уявлення приводить до низки суперечностей, і від гіпотези про електрона, який обертається відносно своєї осі, довелося відмовитися. Було визнано, що **власний механічний момент (спін) і пов'язаний з ним власний (спіновий) магнітний момент є такими ж невід'ємними властивостями електрона, як його маса й заряд.**

§ 15 Типи магнетиків. Якісне пояснення магнітних властивостей речовини [5]

1 Типи магнетиків. Абсолютно усі речовини мають магнітні властивості і тому вони є *магнетиками*. За своїми магнітними властивостями залежно від знаку та числового значення магнітної сприйнятливості всі магнетики розділяються на три групи.

1 *Діамагнетики* характеризуються від'ємною магнітною сприйнятливістю $\chi = \mu - 1 < 0$ (при цьому магнітна проникність є меншою за одиницю $\mu < 1$, $\mu \approx 1$), її модуль набагато менший за одиницю $|\chi| = |\mu - 1| \ll 1$.

2 *Парамагнетики* характеризуються додатною магнітною сприйнятливістю $\chi = \mu - 1 > 0$ (при цьому магнітна проникність є більшою за одиницю $\mu > 1$, $\mu \approx 1$), її модуль набагато менший за одиницю $|\chi| = |\mu - 1| \ll 1$.

3 *Феромагнетики* характеризуються додатною магнітною сприйнятливістю $\chi = \mu - 1 > 0$, її модуль набагато більший за одиницю $|\chi| = |\mu - 1| \gg 1$, $\mu \approx 10^2 - 10^6$.

Окрім числових значень, ці види магнетиків відрізняються за своїми властивостями.

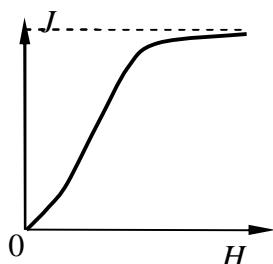


Рисунок 15.1

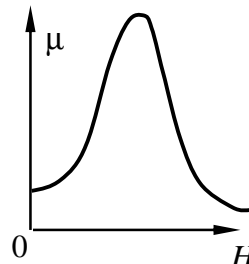


Рисунок 15.2

Діамагнетики та парамагнетики за відсутності магнітного поля завжди не намагнічені. Вони характеризуються лінійною однозначною залежністю намагніченості від напруженості магнітного поля $J = \chi \cdot H$, при цьому $\chi = const$ (для діамагнетиків $\chi < 0$, для парамагнетиків $\chi > 0$).

Феромагнетики за умови відсутності магнітного поля можуть бути намагніченими. Вони мають нелінійну залежність намагніченості від напруженості магнітного поля $J(H)$ (див. рис. 15.1), при цьому магнітна проникність залежить від напруженості магнітного поля $\mu = \mu(H)$ (див. рис. 15.2).

Друга відмінність феромагнетиків полягає в тому, що для них залежність індукції магнітного поля B (характеризує магнітне поле всередині речовини) від напруженості магнітного поля H (характеризує зовнішнє магнітне поле) або J від H є неоднозначною, а визначається попередньою історією намагнічування феромагнітного зразка. Це явище називається *магнітним гістерезисом*. Візьмемо феромагнітний зразок у ненамагніченому стані й будемо намагнічувати його, збільшуючи магнітне поле від нуля до якогось значення H_1 . Залежність $B = B(H)$ зобразиться кривою OA_1 (рис. 15.3). Потім будемо зменшувати H від $+H_1$ до $-H_1$.

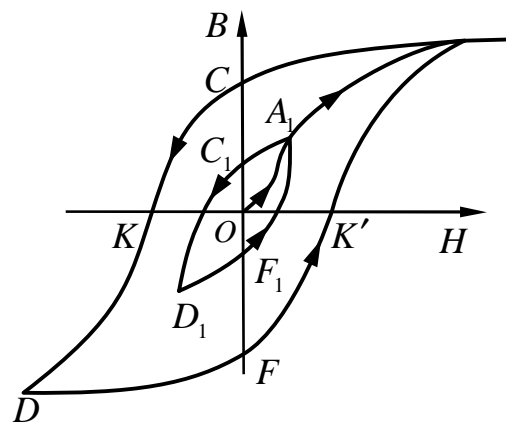


Рисунок 15.3

Крива намагнічування, як показує дослід, не буде проходити по попередньому шляху A_1O , а пройде вище, – по шляху $A_1C_1D_1$. Якщо далі змінювати поле від $-H_1$ до $+H_1$ то крива намагнічування пройде нижче й повернеться в попередню точку A_1 . Вийде замкнута крива $A_1C_1D_1F_1A_1$, яка називається *петлею гістерезису*. Якщо вихідну криву OA_1 довести до точки A , де намагнічування вже досягло насичення, то описаним вище шляхом можемо отримати *найбільшу, або граничну, петлю гістерезису ACDF*. З цієї кривої видно, що при $H = 0$ індукція B не дорівнює нулю, а зображується відрізком $OC = B_r$. Ця індукція магнітного поля B_r отримала назву *залишкової*. З наявністю такого залишкового намагнічування зв'язане існування *сталих магнітів*. Для того щоб розмагнітити зразок, необхідно довести криву намагнічування до точки K або K' . Цим точкам відповідає напруженість магнітного поля $H_c = |OK|$. Цю напруженість магнітного поля H_c називають *коерцитивною силою* феромагнетику. Значення залишкової індукції й коерцитивної сили для різних феромагнетиків змінюється у широких межах. Для м'якого заліза петля гістерезису вузька (коерцитивна сила мала), для сталі й усіх матеріалів, що йдуть на виготовлення постійних магнітів, – широка (коерцитивна сила велика).

Третя відмінність феромагнетиків від парамагнетиків і діамагнетиків полягає в тому, що для довільного феромагнетику існує визначена температура $T = T_K$, яку називають *температурою Кюрі*, при переході через яку феромагнетик стає парамагнетиком.

2 Якісне пояснення магнітних властивостей речовини. Теорія магнітних властивостей речовини будується на базі квантово-механічних уявлень. Тут ми розглянемо ці властивості наближено з якісної точки зору.

Парамагнетизм спостерігається у речовинах, атоми яких мають ненульові магнітні моменти за умови відсутності зовнішнього магнітного поля. Кожний атом, який має ненульовий магнітний момент створює в навколишньому середовищі додаткове магнітне поле. Коли зовнішнє магнітне поле відсутнє, атоми хаотично рухаються і їх магнітні моменти орієнтовані неупорядковано. Результуюче додаткове магнітне поле, що створюється цими атомами дорівнює нулю. Коли ж парамагнетик вносять у зовнішнє магнітне поле ($\vec{B}_0 \neq 0$), то магнітні моменти атомів орієнтуються вздовж вектора індукції цього магнітного

поля. Тому результуюче додаткове магнітне поле вже не дорівнює нулю ($\vec{B}' \neq 0$). Воно накладається на зовнішнє магнітне поле, а це приводить до зміни загального магнітного поля в речовині ($\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' \neq \vec{B}_0$). Так, виникає намагнічування парамагнетиків. Про цей механізм намагнічування говорять як про гіпотезу Ампера. Парамагнітні властивості мають такі речовини, як хлорне залізо, кисень, алюміній, платина.

Діамагнетизм спостерігається у таких речовинах, у яких атоми за умови відсутності зовнішнього магнітного поля не мають магнітного моменту. Коли такі атоми розміщують у зовнішньому магнітному полі, то на електрони атома починає діяти магнітна складова сили Лоренца. У результаті цього виникає додатковий рух електрона, що приводить до виникнення додаткового магнітного поля, яке спрямоване у протилежний бік від зовнішнього. Так виникає намагнічування діамагнетиків. Зрозуміло, що цей механізм намагнічування має місце як у парамагнетиків, так і у феромагнетиків. Але їх вклад у намагнічування у порівнянні з іншими механізмами намагнічування у парамагнетиках та феромагнетиках дуже малий. Діамагнітні властивості мають азот, вода, срібло, вісмут.

Феромагнетизм спостерігають у залізі, нікелі, кобальті та деяких інших речовинах у кристалічному стані. Відповідальними за магнітні властивості феромагнетиків є не магнітні моменти орбітального руху електронів як у парамагнетиках і діамагнетиках, а власні магнітні моменти електронів (спінові магнітні моменти). У феромагнітних речовинах взаємодія спінових магнітних моментів є істотною. У результаті цієї взаємодії спінові магнітні моменти орієнтуються паралельно один одному, виникають *області спонтанного намагнічування*. Ці області називають **доменами**. Феромагнетик, як правило, має велику кількість доменів. Під час нагрівання вони можуть руйнуватися. За умови відсутності зовнішнього магнітного поля домени орієнтуються хаотично і додаткового магнітного поля не створюють. При внесенні феромагнетика у магнітне поле домени орієнтуються вздовж поля, створюють власне додаткове магнітне поле. Так намагнічується феромагнетик.

ТЕМА 3 ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ

§ 16 Досліди Фарадея. Закон Фарадея. Правило Ленца [14]

У 1831 році Фарадей виявив, що у замкненому провідному контурі при зміні потоку магнітної індукції через поверхню, яка обмежена цим контуром, виникає електричний струм. Це явище отримало назву **електромагнітної індукції**, а електричний струм, що виникає при цьому, – **індукційним**.

1 Досліди Фарадея. Принципова схема установки Фарадея, наведена на рис. 16.1. На дерев'яний стержень M намотано два довгі ізольовані мідні провідники. Кінці одного з них через ключ K приєднані до батареї гальванічних елементів B , а кінці іншого – до гальванометра G . При незмінній силі струму в першому колі гальванометр показував відсутність струму в другому електричному колі. Однак при замиканні й розмиканні ключа K стрілка гальванометра злегка відхилилася й потім швидко поверталася в положення рівноваги, що свідчило про виникнення в провіднику 2 короточасного струму, який Фарадей назвав **індукційним струмом**. Напрями індукційних струмів при замиканні й розмиканні ключа K були прямо протилежними. Замінивши ключ K реостатом, Фарадей помітив, що при зміні сили струму I_1 в першому провіднику, в другому, як і раніше, наводиться індукційний струм, напрям якого залежить від того, зменшується I_1 або збільшується.

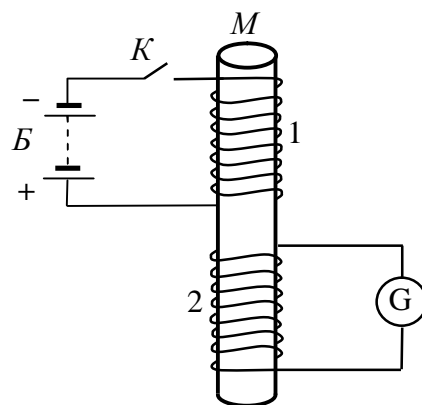


Рисунок 16.1

Зміна струму I_1 супроводжувалась одночасною зміною його магнітного поля. Тому незрозуміло було, що ж є причиною виникнення індукційного струму: зміна струму I_1 або його магнітного поля у тій частині простору, де знаходиться другий провідник? Відповідь на це питання була отримана Фарадеєм за допомогою таких дослідів. Потрібно взяти дві котушки (рис. 16.2), одна з яких, K_1 , замикається на батарею B ; у цій котушці проходить постійний струм $I_1 = const$. Котушка K_2 замкнена на гальванометр. Якщо котушку K_1 наближати до K_2 , то в останній виникає індукційний струм I_2 , напрям якого показаний на рис. 16.2. При віддаленні котушки K_1 від K_2 струм I_2 також виникає, але має протилежний напрям. Аналогічна картина спостерігається при віддаленні або наближенні котушки K_2 до нерухомої котушки K_1 . Нарешті, струм I_2 відсутній, коли взаємне розміщення котушок не змінюється.

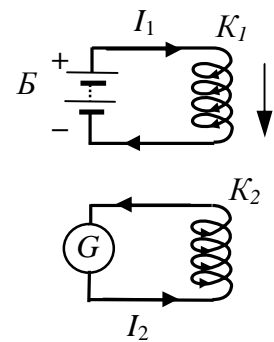


Рисунок 16.2

Ці досліди чітко показали, що причиною виникнення індукційного струму I_2 є зміна магнітного поля, яке пронизує котушку K_2 . Щоб остаточно переконатися в цьому, Фарадей провів ще один дослід. Котушка зі струмом була замінена довгим магнітом (рис. 16.3). При переміщенні магніту уздовж осі котушки K_2 було виявлене виникнення в ній індукційного струму, напрям якого залежав від того, яким полюсом був повернутий до котушки магніт і віддалявся він від неї або наближався до неї. Результати дослідів повністю підтвердили зроблений вище висновок про причину виникнення індукційного струму.

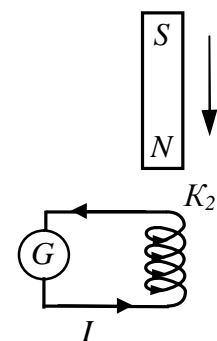


Рисунок 16.3

2 Закон Фарадея (закон електромагнітної індукції). Відкрите Фарадеєм явище, як зазначалося вище, отримало назву електромагнітної індукції. Електричний струм у замкненому колі може виникнути тільки під дією сторонніх сил. Отже, в замкненому контурі, що знаходиться у змінному магнітному полі, з'являються сторонні сили, які індуковані змінним магнітним полем. Енергетичною мірою сторонніх сил, як відомо, є електрорушійна сила (ЕРС), або у випадку, що розглядається, **ЕРС електромагнітної індукції \mathcal{E}_i** .

Подальші дослідження індукційного струму в контурах різної форми й розмірів показали, що ЕРС \mathcal{E}_i електромагнітної індукції в контурі пропорційна швидкості зміни магнітного потоку Φ , що проходить через поверхню, яка обмежена цим контуром (**закон Фарадея**):

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (16.1)$$

При цьому ЕРС електромагнітної індукції не залежить від того, чим саме викликана зміна магнітного потоку: деформацією контуру, його переміщенням у магнітному полі або зміною самого поля.

3 Правило Ленца. Професор Петербурзького університету Е.Х.Ленц досліджував зв'язок між напрямом індукційного струму й характером зміни магнітного потоку, який був причиною появи такого струму. В 1834 р. він встановив такий закон (**правило Ленца**): при будь-якій зміні магнітного потоку через поверхню, яка обмежена замкненим контуром, в останньому виникає індукційний струм такого напрямку, що його магнітне поле протидіє зміні магнітного потоку. Правилу Ленца обумовлений знак «-» в законі Фарадея (16.1). При цьому слід взяти до уваги, що вектор нормалі до поверхні, яка обмежена контуром, та напрям обходу цього контуру пов'язані між собою правилом правого гвинта.

Так, при наближенні магніту до котушки, яка замкнена на гальванометр, (див. рис. 16.3) в ній наводиться індукційний струм, що своєю магнітною дією перешкоджає наближенню магніту й пов'язаному з цим зростанню магнітного потоку через витки котушки. При віддаленні магніту від котушки в ній наводиться струм протилежного напрямку, що своєю магнітною дією також перешкоджає руху магніту. Легко перевірити, що усередині котушки вектори магнітної індукції поля магніту й поля індукційного струму в першому випадку спрямовані в протилежні боки, а в другому – в один й той самий бік.

4 Закон Фарадея для складного контуру. Нехай контур, у якому індукується ЕРС, складається не з одного витка, а з N витків, наприклад, являє собою соленоїд. Оскільки витки з'єднуються послідовно, то загальна ЕРС \mathcal{E}_i у такому складному контурі буде дорівнювати сумі ЕРС, що індукуються у кожному з витків окремо:

$$\mathcal{E}_i = -\sum \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(\sum \Phi). \quad (16.2)$$

Величину

$$\boxed{\Psi = \sum \Phi} \quad (16.3)$$

називають **потокозчепленням або повним магнітним потоком**. Його вимірюють у тих самих одиницях, що й магнітний потік Φ , тобто у веберах ($1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2$). Якщо потік, що пронизує кожний з витків, однаковий, то

$$\Psi = N\Phi. \quad (16.4)$$

ЕРС, яка індукується в такому складному контурі, визначається за формулою

$$\boxed{\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt}}. \quad (16.6)$$

§ 17 Електрорушійна сила індукції (механізм виникнення) у рухомих і нерухомих контурах. Максвеллівське трактування закону електромагнітної індукції [5, 9]

1 Електрорушійна сила індукції (механізм виникнення) у рухомих контурах. Можна за допомогою логічних міркувань знайти зв'язок між ЕРС індукції \mathcal{E}_i й швидкістю зміни магнітного потоку Φ , тобто закон Фарадея

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (17.1)$$

Виконаємо це. Звернемо увагу при цьому на механізм виникнення явища електромагнітної індукції.

Розглянемо контур, який знаходиться в однорідному та постійному магнітному полі, індукція якого є перпендикулярною до площини контуру (див. рис. 17.1). Нехай перемичка 1–2 рухається зі швидкістю \vec{v} . З тією самою швидкістю переміщуються разом з перемичкою й носії струму – електрони. У результаті цього на кожний електрон із зарядом e діє магнітна сила

$$\vec{F}_m = e[\vec{v} \times \vec{B}], \quad (17.2)$$

що спрямована уздовж перемички. Дія цієї сили є еквівалентною дії на електрон стороннього поля з напруженістю

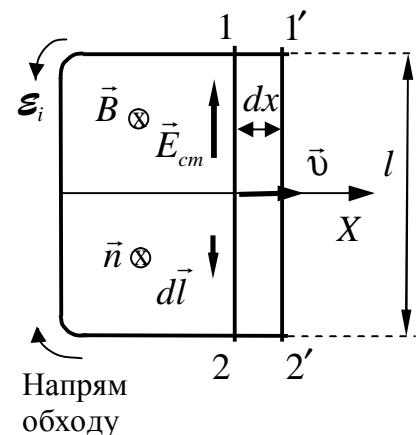


Рисунок 17.1 – Перемичка 1–2 довжини l переміщується з сталою швидкістю \vec{v} . Вибираємо напрям нормалі \vec{n} так, щоб цей вектор був спрямований за креслення. Напрямок ($d\vec{l}$) обходу контуру вибираємо так, щоб він утворював з \vec{n} правогвинтову систему

$$\vec{E}_{cm} = \vec{F}_m / e = [\vec{v} \times \vec{B}].$$

Це поле неелектростатичного походження. Його циркуляція по контуру дає значення ЕРС, яка індукується у контурі:

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E}_{cm} d\vec{l} = \oint [\vec{v} \times \vec{B}] d\vec{l} = \int_1^2 [\vec{v} \times \vec{B}] d\vec{l} \quad (17.3)$$

(підінтегральна функція відмінна від нуля лише на ділянці, яка утворена перемичкою 1–2).

Вектори \vec{v} й \vec{B} взаємно перпендикулярні, а вектори $[\vec{v} \times \vec{B}]$ й $d\vec{l}$ спрямовані у протилежні боки. Тому формула (17.3) спрощується:

$$\mathcal{E}_i = - \int_1^2 v B dl = -v B l = - \frac{dx}{dt} B l = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (17.4)$$

Тут ми подали v у вигляді dx/dt , добуток $B l dx$ являє собою збільшення магнітного потоку $d\Phi$ через контур за час dt . У результаті отримуємо з (17.4) закон Фарадея (17.1).

Таким чином, у випадку, коли провідник рухається у постійному магнітному полі, ЕРС індукції виникає за рахунок дії магнітної складової сили Лоренца.

2 Максвеллівське трактування закону електромагнітної індукції. Коли провідник рухається у постійному магнітному полі, індукційний струм викликається магнітною складовою сили Лоренца $\vec{F}_m = e[\vec{v} \times \vec{B}]$. Яка ж сила збуджує індукційний струм у нерухомому провіднику, що знаходиться у змінному магнітному полі? Відповідь була дана Максвеллом. Відповідно до трактування Максвелла *будь-яке змінне магнітне поле збуджує у навколишньому просторі вихрове електричне поле*. Останнє і є причиною виникнення індукційного струму в провіднику. Сила, з якою діє вихрове електричне поле з напруженістю \vec{E}_e на електричний заряд $\vec{F}_e = q\vec{E}_e$, має неелектростатичний характер, тобто вона є сторонньою силою. Напруженість поля сторонніх сил в цьому випадку буде дорівнювати напруженості вихрового електричного поля $\vec{E}_{cm} = \vec{F}_e / q = \vec{E}_e$. Тоді ЕРС вихрового поля буде дорівнювати $\mathcal{E}_i = \oint \vec{E}_{cm} d\vec{l} = \oint \vec{E}_e d\vec{l}$. Підставляємо замість \mathcal{E}_i отриманий вираз у закон Фарадея (17.1) і приходимо до **максвеллівського формулювання закону електромагнітної індукції**: *будь-яка зміна магнітного поля у часі збуджує в навколишньому просторі вихрове електричне поле \vec{E}_e ; циркуляція вектора напруженості \vec{E}_e цього поля по будь-якому нерухомому замкнутому контуру Γ визначається виразом*

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}_e d\vec{l} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (17.5)$$

де Φ – магнітний потік, що пронизує контур Γ . Ми тут використали для позначення швидкості зміни магнітного потоку знак частинної, а не повної похідної. Цим ми хочемо підкреслити, що контур Γ повинен бути нерухомим.

Між максвеллівським та фарадеївським розумінням явища електромагнітної індукції є істотне розходження. Відповідно до формулювання Фарадея електромагнітна індукція полягає у *збудженні електричного струму*. Для її спостереження необхідна наявність замкнутого провідника. Максвелл, навпроти, бачить сутність електромагнітної індукції насамперед у *збудженні вихрового електричного поля*, а не струму. Електромагнітна індукція може спостерігатися й тоді, коли в просторі взагалі немає ніяких провідників. Поява індукційного струму в замкнутому провіднику при внесенні останнього в змінне магнітне поле є лише одним з проявів вихрового електричного поля, що виникає в результаті зміни поля магнітного. Але вихрове електричне поле може виконувати й інші дії, наприклад поляризувати діелектрик, викликати пробій конденсатора, прискорювати й гальмувати заряджені частинки і т.п. Експерименти повністю підтверджують гіпотезу Максвелла.

3 У загальному випадку, коли провідник рухається і магнітне поле змінюється, індукційний струм збуджується як електричною силою $e\vec{E}$, так і магнітною силою $e[\vec{v}\times\vec{B}]$. Поєднуючи обидві сили, можна сказати, що у всіх випадках індукційний струм викликається повною силою Лоренца

$$\vec{F} = e(\vec{E} + [\vec{v}\times\vec{B}]). \quad (17.6)$$

Яка частина індукційного струму викликається електричною, а яка магнітною складовою сили Лоренца – це залежить від вибору системи відліку. Дійсно, чисто електричне поле (без магнітного) створюється системою нерухомих зарядів. Однак якщо заряди нерухомі відносно деякої інерціальної системи відліку, то відносно інших інерціальних систем ці заряди рухаються і, отже, створюють не тільки електричне, але й магнітне поле. Нерухомий провідник з постійним струмом створює постійне магнітне поле. Однак відносно інших інерціальних систем цей провідник рухається. Тому створюване ним магнітне поле в будь-якій точці буде змінюватися і, отже, породжувати вихрове електричне поле. Таким чином, поле, яке відносно деякої системи відліку є чисто електричним або чисто магнітним, відносно інших систем відліку являє собою сукупність електричного і магнітного полів, які утворюють єдине електромагнітне поле.

§ 18 Явище самоіндукції. Індуктивність. Індуктивність довгого соленоїда. ЕРС самоіндукції [5]

1 Електричний струм I , який проходить у будь-якому контурі, створює повний магнітний потік Ψ , що пронизує цей контур (див. рис. 18.1). Зміна сили струму ΔI буде супроводжуватися зміною індукції магнітного поля ΔB , а отже, і зміною магнітного потоку $\Delta\Psi$. Внаслідок зміни магнітного потоку в контурі індуктується ЕРС, яка, в свою чергу, впливає на зміну сили струму. **Це явище називається самоіндукцією.**

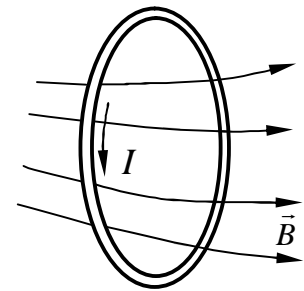


Рисунок 18.1

2 Відповідно до закону Біо-Савара-Лапласа індукція магнітного поля пропорційна силі струму, яке створює це поле. Звідси випливає, що струм I у контурі й повний магнітний потік Ψ , який створюється цим струмом у тому самому контурі, пропорційні один одному:

$$\boxed{\Psi = LI}. \quad (18.1)$$

Коефіцієнт пропорційності L між силою струму й повним магнітним потоком називається **індуктивністю контуру**.

Пропорційність потоку Ψ силі струму I має місце тільки в тому випадку, коли магнітна проникність μ середовища, яким оточений контур, не залежить від напруженості поля H , тобто за умови відсутності феромагнетиків. У протилежному разі μ є складною функцією від I , і залежність Ψ від I також буде складною оскільки $B = \mu_0\mu H$. Однак формулу (18.1) поширюють і на цей випадок, вважаючи індуктивність L функцією від I . При незмінній силі струму повний потік може змінюватися також за рахунок зміни форми й розмірів контуру.

Таким чином, індуктивність залежить від геометрії контуру (тобто від його форми й розмірів), а також від магнітних властивостей (від μ) середовища навколо контуру. Якщо контур жорсткий і поблизу нього відсутні феромагнітні тіла, індуктивність є сталою величиною.

Одиницею індуктивності є генрі (Гн), що дорівнює індуктивності такого провідника, у якому при силі струму 1 А в ньому виникає зчеплений з ним повний магнітний потік 1 Вб (1 Гн=1 Вб/(1 А)).

3 *Визначимо індуктивність довгого соленоїда.* Розглянемо соленоїд такої довжини, щоб його можна було вважати нескінченним. При проходженні через нього струму I усередині соленоїда збуджується однорідне поле з індукцією $B = \mu_0 \mu n I$ (див. відповідні формули для магнітного поля нескінченного соленоїда). Потік через кожний з витків дорівнює $\Phi = BS$, а повний магнітний потік, який зчеплений із соленоїдом:

$$\Psi = N\Phi = nlBS = \mu_0 \mu n^2 l S I, \quad (18.2)$$

де l – довжина соленоїда; S – площа поперечного перерізу; n – число витків на одиницю довжини (добуток nl дає повне число витків N соленоїда).

Порівняння формул (18.1) і (18.2) дає для індуктивності дуже довгого соленоїда вираз

$$L = \mu_0 \mu n^2 l S = \mu_0 \mu n^2 V, \quad (18.3)$$

де $V = Sl$ – об'єм соленоїда.

4 Зміни сили струму в контурі супроводжуються виникненням електрорушійної сили самоіндукції \mathcal{E}_s , що визначається формулою

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right). \quad (18.4)$$

Якщо при змінах сили струму індуктивність залишається сталою (що можливо тільки за умови відсутності феромагнетиків), вираз для **ЕРС самоіндукції** спрощується:

$$\mathcal{E}_s = -L\frac{dI}{dt}. \quad (18.5)$$

Знак мінус у цій формулі обумовлений правилом Ленца, відповідно до якого індукційний струм спрямований так, щоб протидіяти причині, яка його викликає. У цьому випадку причиною, що викликає \mathcal{E}_s , є зміна сили струму в електричному колі. Візьмемо за додатний напрям обходу за годинниковою стрілкою. За цієї умови сила струму буде додатною, коли струм проходить в контурі за годинниковою стрілкою, і від'ємною, коли струм проходить проти годинникової стрілки. Аналогічно \mathcal{E}_s буде додатною, коли вона діє в напрямку за годинниковою стрілкою, і від'ємною, коли вона діє в напрямку проти годинникової стрілки.

§ 19 Явище взаємної індукції. Взаємна індуктивність. ЕРС взаємної індукції [5]

1 Розглянемо два розміщені поруч контури 1 і 2 (рис. 1.19). Електричний струм силою I_1 , який проходить у контурі 1 , створює у контурі 2 повний магнітний потік

$$\Psi_2 = L_{21}I_1. \quad (19.1)$$

Поле, яке створює цей потік, зображено на рисунку суцільними лініями. При змінах струму I_1 в контурі 2 індукуються ЕРС

$$\mathcal{E}_{i2} = -L_{21}dI_1/dt \quad (19.2)$$

(ми припускаємо, що контури не деформуються й феромагнетики поблизу них відсутні).

Аналогічно при проходженні у контурі 2 струму силою I_2 виникає у контурі 1 потік

$$\Psi_1 = L_{12}I_2 \quad (19.3)$$

(поле, яке створює цей потік, зображено штриховими лініями). При змінах струму I_2 в контурі 1 індукуються ЕРС

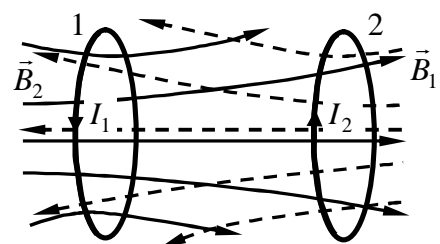


Рисунок 19.1

$$\mathcal{E}_{i1} = -L_{12} dI_2 / dt . \quad (19.4)$$

Контурів 1 і 2 називаються **зв'язаними**, а явище виникнення ЕРС в одному з контурів при змінах сили струму в іншому називається **взаємною індукцією**.

Коефіцієнти пропорційності L_{12} й L_{21} називаються **взаємною індуктивністю** контурів. З відповідного розрахунку можемо отримати, що за умови відсутності феромагнетиків ці коефіцієнти дорівнюють один одному:

$$L_{12} = L_{21} . \quad (19.5)$$

Вони залежать від форми, розмірів і взаємного розміщення контурів, а також від магнітної проникності навколишнього середовища. Вимірюється взаємна індуктивність у тих самих одиницях, що й індуктивність, тобто в генрі (Гн).

§ 20 Енергія магнітного поля. Енергія соленоїда [5]

1 Розглянемо електричне коло, яке зображене на рис. 20.1. Коли ключ замкнено, то у соленоїді встановиться струм I , який створює в його середині магнітне поле. Якщо розімкнути ключ, то в соленоїді виникне ЕРС індукції, і завдяки їй через опір R буде деякий час проходити, поступово зменшуючись, електричний струм. Робота, що виконана струмом за час dt , дорівнює

$$dA = \mathcal{E}_s I dt = - \frac{d\Psi}{dt} I dt = -I d\Psi . \quad (20.1)$$

Ця робота йде на збільшення внутрішньої енергії опору R , обмотки соленоїда й з'єднувальних проводів (тобто на їх нагрівання). Виконання роботи супроводжується ослабленням магнітного поля. Оскільки ніяких інших змін у тілах, що оточують електричне коло, не відбувається, то приходимо до висновку, що магнітне поле є носієм енергії, за рахунок якої й відбувається робота (20.1). Таким чином, позначивши енергію магнітного поля через W , можна написати, що

$$dW = -dA = I d\Psi \quad (20.2)$$

(робота dA дорівнює зменшенню енергії, тобто $(-dW)$).

Відомо, що напруженість поля в соленоїді $H = nI$, де n – число витків на одиницю довжини. Звідси отримуємо

$$I = H / n . \quad (20.3)$$

Пов'язаний з соленоїдом потік $\Psi = NSB = nlSB$, де l – довжина; S – площа поперечного перерізу соленоїда. Отже

$$d\Psi = nlS dB . \quad (20.4)$$

Підставивши у вираз (20.2) значення (20.3) і (20.4) для I й $d\Psi$, отримаємо співвідношення

$$dW = lSH dB = HdB \cdot V , \quad (20.5)$$

де V – об'єм соленоїда.

Відомо, що поле нескінченно довгого (практично – дуже довгого) соленоїда є однорідним й відмінним від нуля тільки всередині соленоїда. Тому енергія магнітного поля зосереджена всередині соленоїда й розподілена по його об'єму з сталою густиною $w = W / V$. З (20.5) випливає, що

$$dw = HdB . \quad (20.6)$$

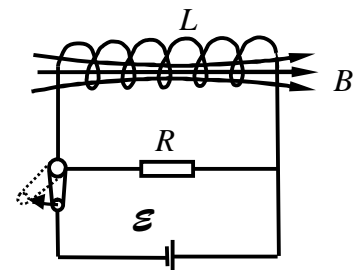


Рисунок 20.1 – Після розмикання ключа через індуктивність і опір проходить струм, обумовлений ЕРС самоіндукції. Цей струм нагріває елементи кола за рахунок енергії магнітного поля пов'язаного з соленоїдом

Ми отримали вираз для збільшення dw густини енергії магнітного поля, що відповідає збільшенню dB магнітної індукції. Щоб знайти повну густину енергії, потрібно проінтегрувати вираз (20.6) у межах від 0 до B :

$$w = \int_0^B H dB. \quad (20.7)$$

Ми отримали формули (20.6) і (20.7), розглядаючи однорідне поле. Однак ці формули є правильними й для неоднорідного поля.

Замінивши H через $B/(\mu_0\mu)$, отримаємо вираз

$$w = \int_0^B \frac{B dB}{\mu_0\mu}. \quad (20.8)$$

Проникність μ у загальному випадку є функцією B (через зв'язок з H). У випадку, коли μ не залежить від H , проникність можна винести за знак інтеграла:

$$w = \frac{1}{\mu_0\mu} \int_0^B B dB = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}.$$

Взявши до уваги, що $B = \mu_0\mu H$, вираз для густини енергії магнітного поля можна написати трьома способами:

$$\boxed{w = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{HB}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}}. \quad (20.9)$$

Підкреслимо, що ці формули є правильними тільки в тому випадку, коли μ не залежить від H , тобто для діа- і парамагнетиків. Таким чином, *отримали співвідношення (20.9), які визначають густину енергії магнітного поля*. Щоб знайти повну енергію магнітного поля у будь-якому просторі, потрібно провести інтегрування

$$W = \int w dV \quad (20.10)$$

у межах цього простору.

2 У випадку соленоїда магнітне поле є однорідним, і тому (20.10) спрощується:

$$W = w \cdot V. \quad (20.11)$$

Підставимо у (20.11) перший вираз з (20.9), у якому використаємо відомий зв'язок між напруженістю магнітного поля в соленоїді та силою струму $H = nI$. Тоді енергію W магнітного поля соленоїда можна записати у вигляді

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 \mu n^2 I^2 V = \frac{1}{2} LI^2. \quad (20.12)$$

Тут використали, що індуктивність соленоїда дорівнює $L = \mu_0 \mu n^2 V$. Формула (20.12) є правильною не тільки для соленоїда, але й для провідника будь-якої форми. Таким чином, *провідник з індуктивністю L , по якому проходить струм силою I , має енергію*

$$\boxed{W = \frac{LI^2}{2}}. \quad (20.13)$$

§ 21 Струм під час замикання та розмикання електричного кола [5]

За правилом Ленца, струми, що виникають внаслідок самоіндукції, спрямовані так, щоб протидіяти змінам струму у колі. Це приводить до того, що встановлення струму при

замиканні кола й зменшення струму при розмиканні кола відбувається не миттєво, а поступово.

1 Знайдемо характер зміни струму при розмиканні кола. Нехай у колі, що зображено на рис. 21.1, ключ K спочатку замикають. Тоді через індуктивність L буде проходити постійний струм силою

$$I = \mathcal{E} / R' \quad (21.1)$$

(опором джерела струму нехтуємо).

При розмиканні ключа струм у колі 1-2-3-4 не може зникнути миттєво тому, що в індуктивності виникає ЕРС самоіндукції, яка спрямована так, щоб протидіяти зменшенню струму.

Якщо індуктивність постійна, то сила струму в колі після розмикання ключа буде задовольняти закон Ома для замкнутого кола

$$I(R + R') = \mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt},$$

яке можна подати у вигляді

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R + R'}{L} I = 0. \quad (21.2)$$

Це – лінійне однорідне диференціальне рівняння першого порядку. Розділивши змінні, отримаємо рівняння

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R + R'}{L} dt,$$

інтегрування якого приводить до виразу

$$\ln I = -\frac{R + R'}{L} t + \ln(const)$$

(тут доцільно сталу інтегрування позначити через $\ln(const)$). Потенціювання цього виразу дає, що

$$I = const \cdot \exp\left(-\frac{R + R'}{L} t\right). \quad (21.3)$$

Функція (21.3) є загальним розв'язком диференціального рівняння (21.2). Значення константи визначається з початкових умов. При $t = 0$ сила струму в індуктивності має значення (21.1). Отже, $const = I_0 = \mathcal{E} / R'$. Підставивши це значення в (21.3), прийдемо до формули

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R'} \exp\left(-\frac{R + R'}{L} t\right). \quad (21.4)$$

Таким чином, після відключення джерела ЕРС сила струму в колі не стає миттєво нульовою, а зменшується за експоненціальним законом. Графік зменшення струму наведено на рис. 21.2 (крива 1). Швидкість зменшення визначається величиною

$$\tau = \frac{L}{R + R'}, \quad (21.5)$$

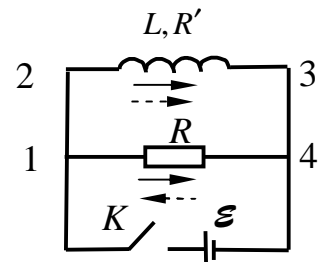


Рисунок 21.1 – Коло складається з котушки з індуктивністю L й опором R' і безіндуктивним опором R . Напрями струмів у різних ділянках кола до розмикання ключа K показані суцільними стрілками, після розмикання – штриховими

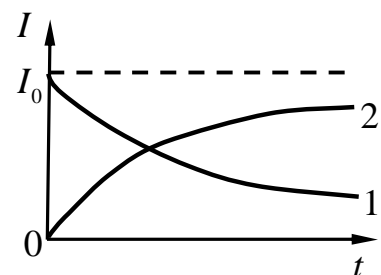


Рисунок 21.2 – Графік зміни струму при розмиканні (крива 1) і замиканні (крива 2) кола

що має розмірність часу, яку називають *сталюю часу кола*. Замінивши в (21.4) $(R + R')/L$ через $1/\tau$, отримуємо формулу

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R'} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (21.6)$$

Відповідно до цієї формули τ є час, протягом якого сила струму зменшується в e разів. З (21.5) бачимо, що чим більша індуктивність кола й менший її опір, тим більша стала часу τ й тим повільніше зменшується струм у колі.

2 Проаналізуємо отриманий результат. Згідно з (21.4) ЕРС самоіндукції після розмикання кола визначається виразом

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E} \frac{R + R'}{R'} \exp\left(-\frac{R + R'}{L} t\right).$$

У початковий момент

$$\mathcal{E}_s \approx \mathcal{E} \frac{R + R'}{R'} > \mathcal{E}. \quad (21.7)$$

З (21.7) випливає, що у випадку, коли $R \gg R'$, ЕРС самоіндукції значно перевищує ЕРС \mathcal{E} , що діяла в колі до його розмикання. Якщо розірвати просте (послідовне) коло, то місце розриву буде мати дуже великий опір R . Відповідно до (21.7) у колі виникне висока індуктована напруга, що створює іскру або дугу в місці розриву.

3 Знайдемо характер зміни струму при замиканні кола. Розглянемо коло, яке зображене на рис. 21.3. Після замикання ключа K доти, поки сила струму не досягне сталого значення

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R + R'}, \quad (21.8)$$

у колі, крім ЕРС \mathcal{E} , буде діяти ЕРС самоіндукції. Таким чином, сила струму буде визначатись законом Ома для замкненого кола

$$I(R + R') = \mathcal{E} + \mathcal{E}_s = \mathcal{E} - LdI/dt,$$

звідки

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R + R'}{L} I = \frac{\mathcal{E}}{L} \quad (21.9)$$

(опором джерела ЕРС нехтуємо).

Ми прийшли до лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку, що відрізняється від рівняння (21.2) лише тим, що в правій частині замість нуля в ньому стоїть стала величина. З теорії диференціальних рівнянь відомо, що загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння можна отримати, додавши будь-яке його частинне розв'язання до загального розв'язку відповідного однорідного рівняння. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд (21.3). Легко переконатися безпосередньо підстановкою у тому, що вираз (21.8) є частинним розв'язком рівняння (21.9). Отже, загальним розв'язком рівняння (21.9) буде функція

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R'} + \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{R + R'}{L} t\right) \quad (21.10)$$

(рекомендуємо перевірити підстановкою, що функція (21.10) задовольняє рівняння (21.9).)

У початковий момент сила струму дорівнює нулю. Підстановка в (21.10) $I = 0$ і $t = 0$ приводить до значення константи, що дорівнює $(-\mathcal{E}/(R + R'))$. Отже,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R'} \left[1 - \exp\left(-\frac{R + R'}{L} t\right) \right]. \quad (21.11)$$

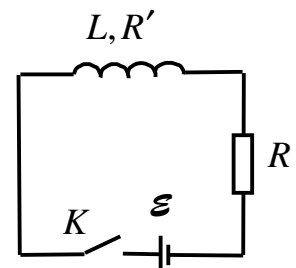


Рисунок 21.3 – Коло, що складається з послідовно включеної індуктивності (L, R') , опору R й джерела ЕРС \mathcal{E}

З урахуванням (21.5) і (21.8) цій формулі можна надати вигляду

$$I = I_0 [1 - \exp(-t/\tau)]. \quad (21.12)$$

Функції (21.11) і (21.12) описують зростання струму у колі після під'єднання до неї джерела ЕРС. Графік функції (21.12) наведено на рис. 21.2 (крива 2).

ТЕМА 4 РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА

§ 22 Вихрове електричне поле. Інтегральна й диференціальна форма закону електромагнітної індукції [5]

1 Як ми вже знаємо, Максвелл узагальнив закон електромагнітної індукції Фарадея. Сутність узагальнення полягає у введенні вихрового електричного поля, яке створюється змінним у часі магнітним полем. Закон електромагнітної індукції за Максвеллом має таке формулювання: *будь-яка зміна магнітного поля з часом збуджує в навколишньому просторі вихрове електричне поле. Циркуляція вектора напруженості \vec{E}_e цього поля по будь-якому нерухомому замкненому контуру Γ визначається виразом*

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}_e d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (22.1)$$

де Φ – магнітний потік, що пронизує контур Γ . Ми тут використали для позначення швидкості зміни магнітного потоку знак частинної, а не повної похідної. Цим ми хочемо підкреслити, що контур Γ повинен бути нерухомим.

Таким чином, Максвелл припустив, що магнітне поле, яке змінюється з часом, обумовлює появу у просторі вихрового електричного поля з напруженістю \vec{E}_e . Вихрове поле \vec{E}_e істотно відрізняється від електростатичного потенціального поля \vec{E}_n , яке створюється нерухомими електричними зарядами. Як відомо, електростатичне поле \vec{E}_n є консервативним (потенціальним), його лінії напруженості починаються й закінчуються на електричних зарядах. З умови консервативності поля \vec{E}_n випливає, що робота, яка виконується цим полем над зарядом q при його переміщенні по будь-якій замкненій траєкторії Γ , дорівнює нулю. Тобто

$$\oint_{\Gamma} q\vec{E}_n d\vec{l} = 0, \text{ або } \oint_{\Gamma} \vec{E}_n d\vec{l} = 0. \quad (22.2)$$

Як бачимо, циркуляція потенціального електричного поля по довільному замкненому контуру Γ дорівнює нулю. Циркуляція ж вектора напруженості вихрового електричного поля \vec{E}_e згідно з (22.1) відмінна від нуля. Отже, поле \vec{E}_e , як і магнітне поле, є вихровим. Лінії напруженості поля \vec{E}_e замкнені або прямують до нескінченності.

Отже, електричне поле може бути як потенціальним (\vec{E}_n), так і вихровим (\vec{E}_e). У загальному випадку електричне поле може складатися з потенціального поля \vec{E}_n , яке створюється зарядами, і вихрового поля \vec{E}_e , обумовленого магнітним полем, що змінюється з часом:

$$\vec{E} = \vec{E}_n + \vec{E}_e. \quad (22.3)$$

Циркуляція сумарного електричного поля з урахуванням (22.1) і (22.2) буде дорівнювати

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = \oint_{\Gamma} \vec{E}_n d\vec{l} + \oint_{\Gamma} \vec{E}_e d\vec{l} = \oint_{\Gamma} \vec{E}_e d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (22.4)$$

Врахуємо визначення потоку магнітного поля $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$ й той факт, що у випадку нерухомої поверхні інтегрування операції диференціювання за часом і інтегрування по поверхні можна поміняти місцями $\partial\Phi/\partial t = \partial\left(\int_S \vec{B} d\vec{S}\right)/\partial t = \int_S \partial\vec{B}/\partial t \cdot d\vec{S}$. Тоді рівняння (22.4) набере вигляду

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (22.5)$$

Підкреслимо, у співвідношенні (22.5) площа інтегрування S «надіта» на контур інтегрування Γ . Рівняння (22.5) виражає закон електромагнітної індукції в інтегральній формі, воно є одним з основних в електромагнітній теорії Максвелла. В основі цього рівняння лежить ідея про створення вихрового електричного поля змінним за часом магнітним полем.

2 Запишемо закон електромагнітної індукції в диференціальній формі.

Використовуючи теорему Стокса для векторного поля \vec{A}

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{l} = \oint_S \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S}, \quad (22.6)$$

нескладно перетворити рівняння (22.5), що виражає закон електромагнітної індукції в інтегральній формі, в рівняння, яке має диференціальну форму:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S},$$

або

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (22.7)$$

Рівняння (22.7) виражає закон електромагнітної індукції в диференціальній формі, воно є одним з основних в електромагнітній теорії Максвелла.

§ 23 Струм зміщення Максвелла [5, 9]

1 З'ясуємо вигляд законів електромагнетизму, які є вірними у випадку змінних електромагнітних полів. Такі закони були встановлені Максвеллом. До рівнянь, запропонованих Максвеллом, можна прийти шляхом послідовного узагальнення дослідних фактів. Слід вирішити, які з отриманих раніше рівнянь можуть бути збережені, які повинні бути відкинуті і які потрібно доповнити. Є один керівний принцип, що дозволяє просунутися у цьому напрямку. Варто виключити з основних такі рівняння, в основі яких лежить уявлення про безпосередню дію на відстані. До них відносять закони Кулона, Біо-Савара-Лапласа та ін. Ці закони несумісні з експериментально підтвердженим уявленням про скінченну швидкість поширення взаємодій, а тому не можуть залишатися правильними у всіх випадках. Потрібно зберегти тільки такі рівняння, які не суперечать уявленням теорії поля. Відзначимо, що коли рівняння задовольняє вимоги теорії поля, то його можна подати як в інтегральному, так і диференціальному вигляді. Максвелл висунув гіпотезу, яка потім експериментально була підтверджена, що загальними законами електродинаміки (тобто справедливими й для постійних, і для змінних у часі полів) є такі закони:

§ теорема Гаусса для електричного поля в діелектрику в інтегральному

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \quad (23.1)$$

і диференціальному вигляді

$$\text{div} \vec{D} = \rho; \quad (23.2)$$

§ теорема Гаусса для магнітного поля в інтегральному

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (23.3)$$

і диференціальному вигляді

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad (23.4)$$

§ закон електромагнітної індукції в інтегральному

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \quad (23.5)$$

і диференціальному вигляді

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (23.6)$$

До основних рівнянь електродинаміки він також приєднав і закон збереження електричного заряду. У диференціальній формі він має вигляд рівняння неперервності електричного заряду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}) = 0. \quad (23.7)$$

Тут ρ – густина електричного заряду в деякій точці простору, \vec{j} – густина електричного струму в тій самій точці простору.

2 Теорему про циркуляцію магнітного поля у речовині в інтегральній формі

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \sum_k I_k, \quad (23.8)$$

яка нами була отримана для стаціонарного випадку, можна перетворити до диференціального вигляду. Для цього використаємо теорему Стокса

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \oint_S \operatorname{rot} \vec{H} \cdot d\vec{S}, \quad (23.9)$$

а також те, що струми, які охоплюються контуром Γ , можна знайти як інтеграл від густини електричного струму по поверхні S , що обмежена контуром інтегрування Γ :

$$\sum_k I_k = \int_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (23.10)$$

Тобто підставивши (23.9) та (23.10) в (23.8), отримаємо

$$\oint_S \operatorname{rot} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{j} d\vec{S}, \text{ або } \boxed{\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}}. \quad (23.11)$$

Вираз (23.11) являє собою диференціальну форму теореми (23.8).

3 З'ясуємо, чи є правильною теорема про циркуляцію магнітного поля в речовині (23.8), (23.11) у полів, які змінюються з часом.

Для цього розглянемо магнітне поле, яке створюється струмом, що проходить при розрядці зарядженого конденсатора (рис. 23.1). Цей струм змінюється з часом. Лінії струму мають розрив у проміжку між обкладками конденсатора. Застосуємо до цього випадку теорему про циркуляцію магнітного поля (23.8). Циркуляція $\oint \vec{H} d\vec{l}$, що

стоїть у лівій частині рівняння (23.8), залежить тільки від форми й розміщення контуру Γ . Вона є цілком визначеною величиною. З іншого боку сума струмів $\sum I_k$, що стоїть в правій

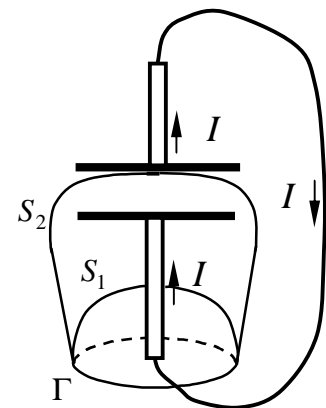


Рисунок 23.1 – Процес розрядки конденсатора

частині того самого рівняння, такої властивості не має. Покажемо це. Для визначення $\sum I_k$ потрібно подумки натягнути на контур Γ деяку поверхню інтегрування й знайти струм, який пронизує цю поверхню. Виберемо поверхню інтегрування S_1 такою, щоб вона перетинала провідник зі струмом (див. рис. 23.1). У цьому випадку

$$\sum_k I_k = I. \quad (23.12)$$

Якщо ж ми виберемо за поверхню інтегрування поверхню S_2 , що проходить між обкладками конденсатора, яка не перетинає провідник зі струмом, то знайдемо, що

$$\sum_k I_k = 0. \quad (23.13)$$

Отримана нами суперечність між (23.12) і (23.13) вказує на те, що у випадку змінних з часом полів рівняння (23.8), а отже, і (23.11) виявляються неправильними.

На несправедливості рівності (23.11) для випадку нестационарних полів указують також такі міркування. Візьмемо дивергенцію від обох частин рівняння (23.11):

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{H}) = \operatorname{div}\vec{j}.$$

Відомо, що дивергенція ротора завжди дорівнює нулю: $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{H}) = 0$. Звідси випливає, що дивергенція вектора \vec{j} також повинна завжди дорівнювати нулю: $(\operatorname{div}\vec{j} = 0)$. Однак цей висновок суперечить рівнянню (23.7), з якого випливає $\operatorname{div}\vec{j} = -\partial\rho/\partial t \neq 0$. Дійсно, при нестационарних процесах густина заряду ρ може змінюватися з часом (це, зокрема, відбувається з густиною заряду на обкладках конденсатора при його розрядці). У цьому випадку згідно з (23.7) дивергенція \vec{j} не дорівнює нулю.

4 Щоб рівняння (23.8) і (23.11) були правильними для змінних у часі полів, Максвелл увів у праву частину рівняння (23.11) ще один доданок. Природно, що цей доданок повинен мати розмірність густини струму. Максвелл назвав його **густиною струму зміщення**. Таким чином, відповідно до припущення Максвелла рівняння (23.11) повинне мати вигляд

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{зм}}. \quad (23.14)$$

Суму струму провідності й струму зміщення називають **повним струмом**. Густина повного струму дорівнює

$$\vec{j}_{\text{повн}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{зм}}. \quad (23.15)$$

Якщо взяти дивергенцію від обох частин рівняння (23.14), то отримаємо

$$\operatorname{div}\vec{j} + \operatorname{div}\vec{j}_{\text{зм}} = 0, \quad (23.16)$$

де враховано, що $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{H}) = 0$.

Замінивши в (23.16) $\operatorname{div}\vec{j}$, згідно з (23.7) через $(-\partial\rho/\partial t)$ отримаємо для дивергенції густини струму зміщення вираз

$$\operatorname{div}\vec{j}_{\text{зм}} = \frac{\partial\rho}{\partial t}. \quad (23.17)$$

Щоб зв'язати струм зміщення з величинами, що характеризують зміну електричного поля з часом, використаємо співвідношенням (23.2). Продиференціювавши співвідношення (23.2) за часом, отримаємо, що

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}\vec{D} = \frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

Тепер змінимо в лівій частині порядок диференціювання за часом і за координатами. У результаті прийдемо до рівності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right).$$

Підставлення цього виразу у формулу (23.17) дає,

$$\operatorname{div} \vec{j}_{zm} = \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right).$$

Звідси

$$\boxed{\vec{j}_{zm} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}. \quad (23.18)$$

Таким чином, відповідно до (23.18) густина струму зміщення дорівнює похідній за часом від індукції електричного поля. Підставивши вираз (23.18) у формулу (23.14), прийдемо до рівняння

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}. \quad (23.19)$$

яке є одним з основних у теорії Максвелла.

Підкреслимо, що термін «струм зміщення» є умовним. По суті, струм зміщення – це доданок, який пов'язаний з похідною від електричного поля за часом. Підставою для того, щоб назвати «струмом» величину (23.12), є лише те, що розмірність цієї величини збігається з розмірністю густини струму. Із всіх фізичних властивостей, які має струм провідності, струм зміщення має тільки одне – здатність створювати магнітне поле.

Введення струму зміщення «зрівняло в правах» електричне й магнітне поля. З явища електромагнітної індукції випливає, що змінне у часі магнітне поле породжує електричне поле. З рівняння (23.19) випливає, що змінне у часі електричне поле, створює магнітне поле.

5 Проінтегрувавши по поверхні праву й ліву частини рівняння (23.19), використавши теорему Стокса нескладно перейти до інтегрального вигляду теореми (23.19) (порівняйте з (23.8))

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}}. \quad (23.20)$$

§ 24 Система фундаментальних рівнянь Максвелла в інтегральній і диференціальній формі. Матеріальні рівняння [9]

1 Відкриття струму зміщення дозволило Максвеллу створити єдину теорію електричних і магнітних явищ. Ця теорія пояснила всі відомі на той час експериментальні факти й передбачила ряд нових явищ, існування яких підтвердилось з часом. Основним наслідком теорії Максвелла був висновок про існування електромагнітних хвиль, які поширюються зі швидкістю світла. Теоретичне дослідження властивостей цих хвиль привело Максвелла до створення електромагнітної теорії світла.

Основу теорії утворюють рівняння Максвелла. У вченні про електромагнетизм ці рівняння відіграють таку саму роль, як закони Ньютона в механіці або основні закони (принципи) у термодинаміці.

У систему фундаментальних рівнянь Максвелла входить чотири рівняння. В інтегральній формі вони мають такий вигляд:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}; \quad (24.1)$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}; \quad (24.2)$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q; \quad (24.3)$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (24.4)$$

Диференціальна форма цих рівнянь:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (24.5)$$

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (24.6)$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho; \quad (24.7)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0. \quad (24.8)$$

Рівняння (24.1) та (24.5) – теорема про циркуляцію магнітного поля, яка була доповнена Максвеллом струмом зміщення. Фізична сутність цих рівнянь: електричні струми та змінне у часі електричне поле створюють магнітне поле.

Рівняння (24.2) та (24.6) – закон електромагнітної індукції. Фізична сутність цих рівнянь: змінне у часі магнітне поле створює вихрове електричне поле.

Рівняння (24.3) та (24.7) – теорема Гаусса для електричного поля у речовині. Фізична сутність цих рівнянь: електричні заряди є джерелами електричного поля.

Рівняння (24.4) та (24.8) – теорема Гаусса для магнітного поля. Фізична сутність цих рівнянь: магнітні заряди у природі відсутні.

До фундаментальних рівнянь не включено рівняння неперервності, яке виражає закон збереження електричного заряду, тому, що це рівняння є наслідком рівнянь (24.1) і (24.3) (або (24.5) й (24.7)).

2 Фундаментальні рівняння Максвелла у формі (24.1)-(24.4) або (24.5)-(24.8) не утворюють ще повної системи рівнянь електромагнітного поля. Серед них два векторних рівняння і два скалярних. Якщо їх записати у координатній формі, то отримаємо всього вісім рівнянь, що пов'язують 16 величин: п'ятнадцять складових векторів \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{H} , \vec{j} і скаляр ρ . Ясно, що для 16 величин вісім рівнянь недостатньо. Фундаментальні рівняння Максвелла не містять ніяких сталих, що характеризують властивості середовища, у якій збуджено електромагнітне поле. Необхідно доповнити ці рівняння такими співвідношеннями, у які входили б величини, що характеризують індивідуальні властивості середовища. Ці співвідношення називають *матеріальними рівняннями*.

Найбільш прості матеріальні рівняння у випадку слабких електромагнітних полів, що порівняно повільно змінюються у просторі й часі. У цьому випадку для ізотропних неферромагнітних і несегнетоелектричних середовищ матеріальні рівняння можуть бути записані у такому вигляді:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (24.9)$$

де ϵ , μ , σ – сталі, що характеризують електромагнітні властивості середовища. Вони називаються діелектричною й магнітною проникністю й електричною провідністю середовища.

Сукупність фундаментальних і матеріальних рівнянь складають *повну систему рівнянь Максвелла*. Ця система повністю описує електромагнітне поле. Вона дозволяє за відомими початковими і граничними умовами визначити електромагнітне поле й причому єдиним способом.

РОЗДІЛ 2 КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

ТЕМА 5 КОЛИВАЛЬНІ ПРОЦЕСИ

§ 25 Гармонічні коливання та їх характеристики. Диференціальне рівняння гармонічних коливань. Зміна енергії при гармонічному коливанні [5]

1 Загальні відомості про коливання. *Коливаннями називаються рухи або процеси, що так чи інакше повторюються у часі.* Таку властивість мають, наприклад, рух маятника годинника, коливання струни або ніжок камертона, напруга між обкладками конденсатора в контурі радіоприймача й т.п.

Коливання часто зустрічаються в природі й техніці. Коливання можуть бути різної природи, наприклад, механічними, електромагнітними і т.д.

Залежно від характеру впливу на коливальну систему розрізняють вільні (або власні) коливання, вимушені коливання, автоколивання й параметричні коливання.

Вільними, або власними називаються такі коливання, що відбуваються в системі, яка надана сама собі, після виведення її з положення рівноваги. Прикладом можуть бути коливання кульки, яка підвішена на нитці (маятник). Для того щоб викликати коливання, можна або штовхнути кульку, або, відвівши убік, відпустити її.

Вимушеними називаються такі коливання, у процесі яких на коливальну систему діє зовнішня періодична сила. Прикладом є коливання моста, які виникають при проходженні по ньому людей, що крокують у ногу.

Автоколивання, як і вимушені коливання, супроводжуються впливом на коливальну систему зовнішньої сили, однак моменти часу, коли здійснюються ці впливи, задаються самою коливальною системою, тобто система сама керує зовнішнім впливом. Прикладом автоколивальної системи є годинник, у яких маятник отримує поштовхи за рахунок енергії піднятої гирі або закрученої пружини. При цьому ці поштовхи відбуваються в моменти проходження маятника через середнє положення.

При **параметричних коливаннях** за рахунок зовнішнього впливу відбувається періодична зміна будь-якого параметра системи. Наприклад, періодично може змінюватися довжина нитки, до якого підвішена кулька, що виконує коливання, або ємність конденсатора, яка включена в коливальний контур.

Найпростішими є **гармонічні коливання**, тобто такі коливання, при яких коливальна величина змінюється з часом за законом синуса або косинуса. Цей вид коливань особливо важливий через такі причини: по-перше, коливання в природі й техніці часто мають характер, дуже близький до гармонічних коливань, і, по-друге, періодичні процеси іншої форми (з іншою залежністю від часу) можуть бути подані як суперпозиція декількох гармонічних коливань.

2 Гармонічні коливання та їх характеристики. У випадку гармонічних коливань зміни з часом коливальної величини x описуються формулою

$$\boxed{x = A \cos(\omega_0 t + \alpha)} \text{ або } \boxed{x = A \sin(\omega_0 t + \alpha)}. \quad (25.1)$$

Надалі ми будемо віддавати перевагу запису гармонічних коливань за допомогою косинуса.

Величина x характеризує зміщення величини, що коливається, від положення рівноваги і називається **зміщенням**.

Найбільше значення величини, що коливається, називається **амплітудою коливань**. Амплітуда A – стала додатна величина. Надалі, крім букви A , ми будемо позначати амплітуду символом коливальної величини з індексом m , наприклад, x_m .

Величина $(\omega_0 t + \alpha)$, що стоїть під знаком косинуса (або синуса), називається **фазою коливань**.

Стала величина α – значення фази в момент часу $t = 0$ – називається **початковою фазою коливань**. Через те що значення x не змінюється при додаванні або відніманні з фази цілого числа 2π , завжди можна виконати умову, щоб початкова фаза була за модулем менше π . Тому, як правило, розглядаються тільки значення α , що лежать у межах від $-\pi$ до $+\pi$.

Найменший проміжок часу, через який коливальна величина повертається у вихідне положення, називається **періодом коливань** T . Оскільки косинус – періодична функція з періодом 2π , то однаковим станам коливальної системи, що повторюються через період T , відповідає зміна фази на 2π . Звідси знаходимо, що

$$[\omega_0(t+T) + \alpha] = (\omega_0 t + \alpha) + 2\pi,$$

або

$$\boxed{T = 2\pi / \omega_0}. \quad (25.2)$$

Кількість коливань в одиницю часу називається **частотою коливань** ν . Очевидно, що частота ν пов'язана з періодом коливань T співвідношенням

$$\boxed{\nu = 1/T}. \quad (25.3)$$

Частоту вимірюють в системі СІ в 1/с, або герцах (Гц), $1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}$.

З (25.2) випливає, що

$$\boxed{\omega_0 = 2\pi/T}. \quad (25.4)$$

Величину ω_0 з співвідношення (25.1) називають **круговою, або циклічною, частотою**. Вона пов'язана зі звичайною частотою ν співвідношенням

$$\boxed{\omega_0 = 2\pi\nu}. \quad (25.5)$$

3 Диференціальне рівняння гармонічних коливань. Розглянемо тіло, що виконує коливання уздовж осі X . У цьому випадку вираз

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (25.6)$$

визначає зміщення тіла відносно положення рівноваги.

Продиференціюємо (25.6) за часом і отримаємо вираз для проекції швидкості тіла на вісь X :

$$v_x = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi/2). \quad (25.7)$$

Із цієї формули випливає, що швидкість також змінюється за гармонічним законом, причому амплітуда швидкості дорівнює $A\omega_0$. З порівняння виразів (25.6) і (25.7) випливає, що швидкість випереджає зміщення за фазою на $\pi/2$.

Продиференціюємо (25.7) ще раз за часом і знайдемо вираз для проекції прискорення на вісь X :

$$a_x = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi). \quad (25.8)$$

Порівнюючи (25.8) з (25.6), можна зробити висновок, що прискорення й зміщення знаходяться у протилежних фазах (різниця відповідних фаз дорівнює π). Це означає, що в той момент, коли зміщення досягає найбільшого додатного значення, прискорення досягає найбільшого за модулем від'ємного значення і навпаки.

Замінімо у (25.8) $A \cos(\omega_0 t + \alpha)$ через x (див. (25.6)) і отримаємо

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x, \text{ або } \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}. \quad (25.9)$$

Співвідношення (25.9) називають **диференціальним рівнянням гармонічних коливань**. Очевидно, що функція (25.6) є загальним розв'язком цього рівняння. Величини A й α – довільні сталі, значення яких для кожного конкретного коливання визначаються з початкових умов. У всіх випадках, коли з'ясується, що деяка величина x задовольняє

рівнянню $\ddot{x} + bx = 0$ (де $b > 0$), можна стверджувати, що ця величина змінюється з часом за гармонічним законом, причому корінь із b дає кругову частоту коливань.

4 Зміна енергії при гармонічному коливанні. Визначимо силу \vec{F} , що діє на тіло масою m , яке виконує гармонічні коливання. Відповідно до другого закону Ньютона проекція сили на вісь X дорівнює $F_x = m\ddot{x}$. Скориставшись співвідношенням (25.9), отримаємо, що

$$F_x = -m\omega_0^2 x = -kx, \quad (25.10)$$

де

$$k = m\omega_0^2. \quad (25.11)$$

Таким чином, сила пропорційна зміщенню. Знак мінус означає, що напрями сили й зміщення протилежні. Умові (25.10) задовольняє сила пружності. Тому сили, що мають вигляд (25.10), незалежно від їх природи називають **квазіпружними**.

Квазіпружна сила обумовлює наявність у тіла потенціальної енергії

$$W_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (25.12)$$

Кінетична енергія тіла

$$W_k = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (25.13)$$

Як відомо, повна енергія системи дорівнює сумі потенціальної та кінетичної енергій. Склавши вирази (25.12) і (25.13) і взявши до уваги рівність (25.11), отримуємо для повної енергії системи вираз

$$W = W_k + W_p = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} (\cos^2(\omega_0 t + \alpha) + \sin^2(\omega_0 t + \alpha)) = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cdot 1 = \frac{kA^2}{2} = const. \quad (25.14)$$

Таким чином, у процесі коливань повна енергія системи залишається постійною, відбувається перетворення кінетичної енергії в потенціальну й навпаки.

§ 26 Періоди коливань фізичного, математичного та пружинного маятників [5]

1 Пружинний маятник. *Пружинним маятником* називається система, що складається з тіла маси m , яке підвішене на невагомій пружині жорсткості k (рис. 26.1). У стані рівноваги сила тяжіння mg , яка діє на тіло масою m , врівноважується пружною силою $k\Delta l_0$:

$$mg = k\Delta l_0, \quad (26.1)$$

де Δl_0 – видовження пружини. Будемо характеризувати зміщення тіла від положення рівноваги координатою x , причому вісь X направимо вертикально вниз, а нуль осі розмістимо у положенні рівноваги (див. рис. 26.1). Якщо змістити тіло в положення, яке характеризується координатою x , то видовження пружини стане дорівнювати $\Delta l_0 + x$ і проекція на вісь X результуючої сили, що діє на тіло, набуде значення

$$F_x = mg - k(\Delta l_0 + x).$$

Врахувавши умову (26.1), отримаємо, що

$$F_x = -kx. \quad (26.2)$$

Отже, результуюча сили тяжіння й пружної сили має характер квазіпружної сили.

Змістимо тіло на відстань $x = A$ від положення рівноваги і відпустимо. Під дією квазіпружної сили тіло почне рухатися у напрямку положення рівноваги з усе зростаючою швидкістю \dot{x} . При цьому потенціальна енергія системи буде зменшуватись, але натомість з'явиться все зростаюча кінетична енергія $W_k = m\dot{x}^2 / 2$ (масою пружини нехтуємо). Пройшовши через положення рівноваги, тіло буде рухатися далі за інерцією. Цей рух припиниться тоді, коли кінетична енергія повністю перетвориться в потенціальну, тобто коли зміщення тіла стане дорівнювати $(-A)$. Потім такі ж перетворення енергії будуть відбуватися при русі тіла у зворотному напрямку. Якщо тертя в системі відсутнє, енергія системи повинна зберігатися, й тіло буде рухатися в межах від $x = A$ до $x = -A$ необмежено довго.

Знайдемо рівняння, яке описує рух тіла у пружинному маятнику. Для цього використаємо рівняння другого закону Ньютона з урахуванням (26.2) і отримаємо

$$m\ddot{x} = -kx,$$

або

$$\ddot{x} + (k/m)x = 0 \quad (26.3)$$

$(k/m) > 0$. Ми прийшли до диференціального рівняння гармонічних коливань. Відомо, що розв'язком цього рівняння є функція

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (26.4)$$

де циклічна частота

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}. \quad (26.5a)$$

Таким чином, тіло буде виконувати гармонічні коливання відносно положення рівноваги, які описуються співвідношенням (26.4). Частота цих коливань визначається (26.5a) і буде тим більша, чим більша жорсткість пружини k й чим менша маса тіла m . Період коливань пружинного маятника можна знайти, використовуючи формулу (26.5a),

$$T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{m/k}. \quad (26.5b)$$

2 Математичний маятник. *Математичним маятником* називають систему, яка складається з невагомої нитки, що не розтягується, до якої підвішене тіло, яке можна вважати матеріальною точкою. Досить гарним наближенням математичного маятника є невелика важка кулька, яка підвішена на довгій тонкій нитці.

Відхилення маятника від положення рівноваги природно характеризувати кутом φ , який утворює нитка з вертикаллю (рис. 26.2). Тіло рухається під дією сили тяжіння $m\vec{g}$ та сили натягу нитки \vec{F}_n . При відхиленні маятника від положення рівноваги на кут φ виникає момент сили тяжіння відносно осі обертання O , модуль якого дорівнює $mg l \sin \varphi$ (m – маса, а l – довжина маятника, $l \sin \varphi$ – плече сили $m\vec{g}$). Плече сили натягу нитки при цьому дорівнює нулю тому, що лінія сили \vec{F}_n проходить через точку обертання O . Звідси випливає, що і момент сили натягу нитки також дорівнює нулю. Таким чином, результуючий момент сил визначається моментом сили тяжіння. Дія моменту сил спрямована так, щоб повернути

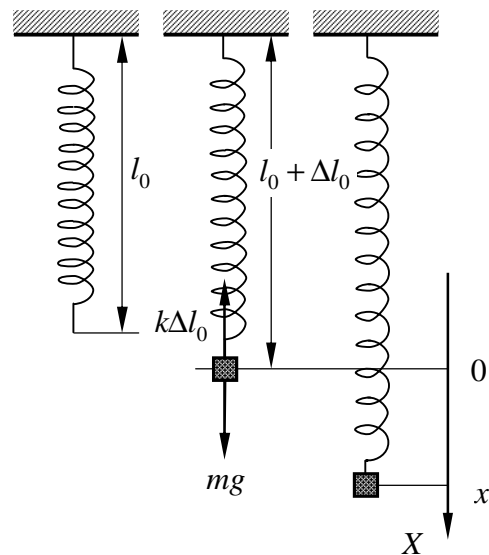


Рисунок 26.1 – Пружинний маятник: l_0 – довжина недеформованої пружини; Δl_0 – видовження пружини, що відповідає положенню рівноваги; x – зміщення кульки від положення рівноваги

маятник у положення рівноваги. Подібне відбувається і у випадку квазіпружної сили. Через це результуючому моменту M й кутовому зміщенню φ потрібно приписувати протилежні знаки. Отже, вираз для результуючого моменту сили, що діє на математичний маятник, має вигляд

$$M = -mgl \sin \varphi. \quad (26.6)$$

Використаємо для маятника рівняння динаміки обертального руху $I\beta = M$. Позначивши кутове прискорення через $\beta = \ddot{\varphi}$, і, врахувавши, що момент інерції матеріальної точки дорівнює $I = ml^2$, отримуємо співвідношення

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi,$$

яке можна звести до вигляду

$$\ddot{\varphi} + (g/l) \sin \varphi = 0. \quad (26.7)$$

У випадку малих коливань $\varphi \ll 1$ і $\sin \varphi \approx \varphi$. Тоді рівняння (26.7) набере вигляду

$$\ddot{\varphi} + (g/l) \varphi = 0. \quad (26.8)$$

Таким чином, ми знову прийшли до диференціального рівняння гармонічних коливань. Його розв'язком є функція

$$\varphi = \varphi_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (26.9)$$

де φ_m – амплітуда коливань (найбільший кут, на який відхиляється маятник від положення рівноваги). Отже, при малих коливаннях кутове відхилення математичного маятника змінюється з часом за гармонічним законом.

З порівняння рівнянь (26.8) і рівняння гармонічних коливань отримуємо для циклічної частоти математичного маятника вираз

$$\omega_0 = \sqrt{g/l}, \quad (26.10)$$

з якого випливає, що частота коливань математичного маятника залежить тільки від довжини маятника й прискорення вільного падіння й не залежить від маси маятника. Період коливань математичного маятника буде дорівнювати

$$T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{l/g}. \quad (26.11)$$

Чим довший маятник, тим повільніше він коливається.

3 Фізичний маятник. *Фізичним маятником називається тверде тіло, що може обертатися під дією сили тяжіння відносно нерухомої осі, що не проходить через центр тяжіння тіла.* При відхиленні маятника від положення рівноваги на кут φ виникає момент сили, що прагне повернути маятник у положення рівноваги. Цей момент дорівнює

$$M = -mgl \sin \varphi, \quad (26.12)$$

де m – маса маятника, а l – відстань від точки підвісу O до центра мас маятника C (рис. 26.3). Знак мінус пов'язаний з тим, що момент сили діє так, щоб повернути тверде тіло у положення рівноваги.

Позначивши момент інерції маятника відносно осі, що проходить через точку підвісу O , через I , можна написати

$$I\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi. \quad (26.13)$$

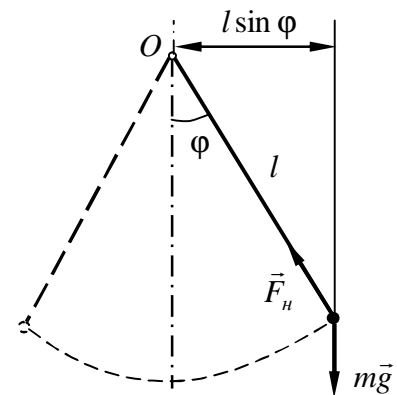


Рисунок 26.2 – Математичний маятник: $l \sin \varphi$ – плече сили $m\vec{g}$; плече сили \vec{F}_n дорівнює нулю тому, що лінія сили \vec{F}_n проходить через точку обертання O

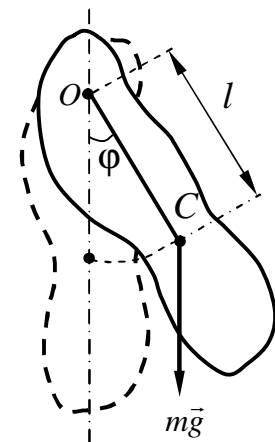


Рисунок 26.3 – Фізичний маятник: l – відстань від точки підвісу до центра мас C

У випадку малих коливань ($\varphi \ll 1$, $\sin \varphi \approx \varphi$) рівняння (26.13) переходить у диференціальне рівняння гармонічних коливань:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (26.14)$$

де

$$\omega_0 = \sqrt{mgl / I}. \quad (26.15)$$

З формул (26.14) і (26.15) випливає, що при малих відхиленнях від положення рівноваги фізичний маятник виконує гармонічні коливання, частота яких залежить від маси маятника, моменту інерції маятника відносно осі підвісу й відстані від точки O підвісу до центра мас C маятника. Використовуючи (26.15) неважко знайти період коливань фізичного маятника:

$$T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{I / mgl}. \quad (26.16)$$

За теоремою Штейнера момент інерції маятника I може бути поданий у вигляді

$$I = I_C + ml^2,$$

де I_C – момент інерції відносно осі, яка паралельна осі підвісу й проходить через центр мас C . Тоді циклічна частота (26.15) й період коливань (26.16) можуть бути подані у вигляді

$$\omega_0 = \sqrt{mgl / (I_C + ml^2)}, \quad T = 2\pi \sqrt{(I_C + ml^2) / (mgl)}. \quad (26.17)$$

§ 27 Електричний коливальний контур. Частота коливань [5]

1 При розгляді електричних коливань ми маємо справу зі струмами, що змінюються у часі. Закон Ома й правила Кірхгофа були встановлені для постійного струму. Однак вони залишаються справедливими й для миттєвих значень змінних струмів і напруг, якщо тільки їх зміни відбуваються не занадто швидко. Електромагнітні збурювання поширюються вздовж електричного кола з величезною швидкістю, що дорівнює швидкості світла c . Якщо за час $t = l/c$ (l – довжина кола, c – швидкість світла), який необхідний для передачі збурення в найвіддаленішу точку кола, сила змінного струму майже не змінюється, то миттєві значення сили струму у всіх перерізах кола можна вважати однаковими. Струми, що задовольняють таку умову, називаються **квазістаціонарними**. Для періодично змінних струмів умова квазістаціонарності має вигляд

$$t = l/c \ll T,$$

де T – період коливальних процесів. Миттєві значення квазістаціонарних струмів задовольняють закон Ома. Отже, для них справедливі й правила Кірхгофа. При вивченні електричних коливань ми будемо припускати, що розглянуті нами струми є квазістаціонарними.

2 Коливальним контуром називається коло, що складається з котушки з індуктивністю L і конденсатора з ємністю C .

Знайдемо рівняння коливань у контурі, в якому опір дорівнює нулю ($R = 0$). Застосуємо закон Ома для ділянки кола 1-3-2 (див. рис. 27.1):

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_s. \quad (27.1)$$

Різницю потенціалів на конденсаторі визначимо із співвідношення

$$\varphi_1 - \varphi_2 = q_1 / C = (-q) / C. \quad (27.2)$$

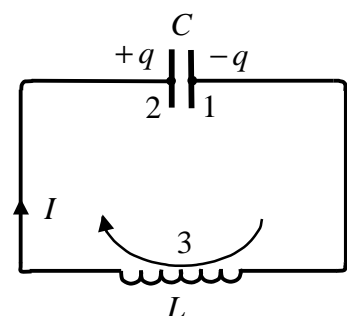


Рисунок 27.1

Тут використали, що заряд пластини конденсатора $I \ q_1 = -q$ (див. рис. 27.1).

Сила струму I є додатною, коли напрям струму співпадає з напрямом обходу ділянки кола 1-3-2, тобто за годинниковою стрілкою. В цьому разі заряд на пластині конденсатора $q_2 = q$ пов'язаний з силою струму в ділянці кола наступним співвідношенням

$$I = +dq / dt = +\dot{q}. \quad (27.3)$$

Знак «+» обумовлений тим, що, коли струм I є додатним, заряд $q_2 = q$ збільшується ($\dot{q} > 0$).

Підставимо в (27.1) закон самоіндукції $\mathcal{E}_s = -LdI / dt$, співвідношення (27.2) й (27.3), умову $R = 0$ й отримуємо

$$0 = -q / C - L \ddot{q}. \quad (27.4)$$

Далі, виконавши прості перетворення, прийдемо до диференціального рівняння гармонічних коливань

$$\ddot{q} + (1/(LC))q = 0. \quad (27.3)$$

Таким чином, заряд на обкладках конденсатора змінюється за гармонічним законом

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (27.4)$$

с частотою

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (27.5)$$

Ця частота називається власною частотою контуру. Для періоду коливань знаходимо так звану формулу Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (27.6)$$

Зрозуміло, що напруга на конденсаторі та сила струму в коливальному контурі також змінюються за гармонічним законом.

§ 28 Векторна діаграма. Додавання двох гармонічних коливань одного напрямку й частоти [5]

1 Розгляд багатьох питань, зокрема додавання декількох гармонічних коливань одного напрямку й однакової частоти, значно полегшується й стає наочним, якщо зображувати коливання графічно у вигляді векторів на площині. Схема, в якій коливання зображуються графічно у вигляді векторів на площині, називається **векторною діаграмою**.

Візьмемо вісь X , уздовж якої будемо відкладати коливальну величину x (рис. 28.1). З узятій на осі точки O відкладемо вектор довжиною A , що утворює із віссю X кут α . Якщо обертати цей вектор з кутовою швидкістю ω_0 відносно точки O , то проекція кінця вектора \vec{A} на вісь X буде змінюватись за законом

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (28.1)$$

Таким чином, гармонічне коливання може бути заданим за допомогою вектора, довжина якого дорівнює амплітуді коливання, а напрям утворює з віссю X кут, що дорівнює початковій фазі коливань. Схема, яка зображена на рис. 28.1, є векторною діаграмою гармонічного коливання (28.1).

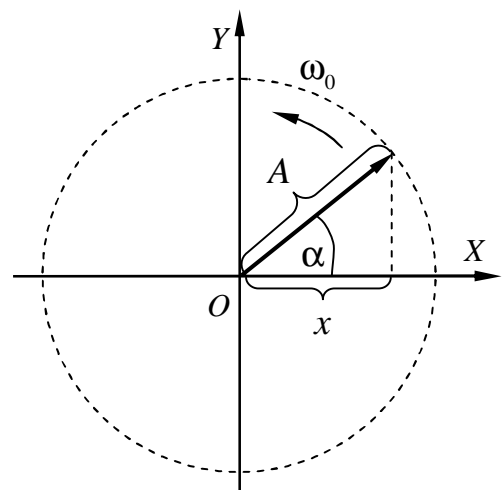


Рисунок 28.1 – Векторна діаграма гармонічного коливання з амплітудою A й початковою фазою α

2 Розглянемо додавання двох гармонічних коливань одного напрямку й однакової частоти. Знайдемо параметри результуючого коливання x , яке буде сумою коливань x_1 і x_2 , які визначаються функціями

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1), \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (28.2)$$

З фізичних міркувань зрозуміло, що результуюче коливання

$$x = x_1 + x_2 \quad (28.3)$$

буде гармонічним коливанням з частотою коливань ω_0 (як і коливання x_1 та x_2), амплітудою A та початковою фазою α :

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (28.4)$$

Таким чином, задача про додавання двох гармонічних коливань одного напрямку й однакової частоти зводиться до знаходження невідомої амплітуди A й невідомої початкової фази α результуючого коливання x .

Використаємо метод векторних діаграм. Подамо обидва коливання за допомогою векторів \vec{A}_1 і \vec{A}_2 (рис. 28.2). Побудуємо за правилами додавання векторів результуючий вектор \vec{A} . З рисунка випливає, що проекція цього вектора на вісь X дорівнює сумі проекцій векторів, що додаються: $x = x_1 + x_2$, що збігається з (28.3). Отже, вектор \vec{A} пов'язаний з результуючим коливанням x . Цей вектор обертається з тією ж кутовою швидкістю ω_0 , як і вектори \vec{A}_1 й \vec{A}_2 . Тобто, сума x_1 і x_2 є гармонічним коливанням із частотою ω_0 , амплітудою A й початковою фазою α .

Визначимо невідомі амплітуду A й початкову фазу α результуючого коливання x , виходячи з геометричних міркувань (див. рис. 28.2). Розглянемо трикутник $\triangle OMK$, застосуємо теорему косинусів і одержимо

$$\boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos[\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)] = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}. \quad (28.5)$$

Тут використали, що кут $\angle OMK = \pi - (\alpha_2 - \alpha_1)$. Далі позначивши через y_1 , y_2 та x_1 , x_2 проекції векторів \vec{A}_1 , \vec{A}_2 , відповідно на осі Y , X неважко знайти з трикутника $\triangle OMK$ на рис. 28.2, що

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}}. \quad (28.6)$$

Співвідношення (28.5) та (28.6) є розв'язанням поставленої вище задачі. Таким чином, метод векторних діаграм дозволяє додавання гармонічних функцій (коливань) замінити додаванням векторів.

Формули (28.2) і (28.3) можна, звичайно, отримати із тригонометричних міркувань, розв'язавши тригонометричне рівняння

$$A \cos(\omega_0 t + \alpha) = A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2) \quad (x = x_1 + x_2)$$

відносно амплітуди A і фази α . Але графічний спосіб отримання цих формул є більш простим і наочним. Ці переваги особливо є корисними у випадку, коли доводиться складати велику кількість коливань.

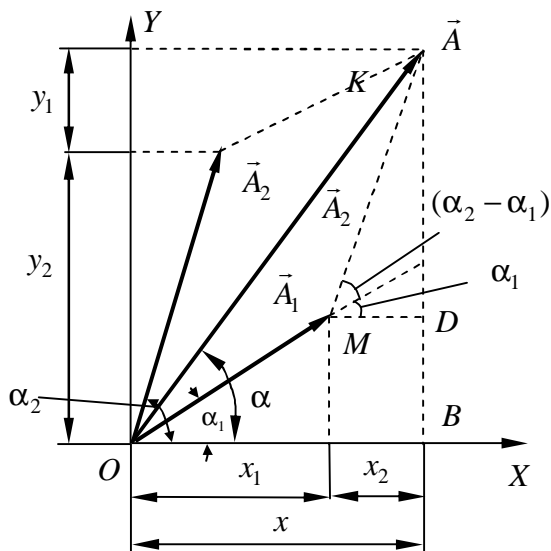


Рисунок 28.2 – Векторне додавання двох гармонічних коливань одного напрямку й однакової частоти

§ 29 Биття [5]

1 Розглянемо випадок, коли два гармонічних коливання одного напрямку, які додаються, **мало відрізняються за частотою**. Процес, який при цьому виникає, можна розглядати як квазігармонічне коливання з пульсуючою амплітудою. Таке коливання називається **биттям**.

Позначимо частоту одного з коливань через ω , частоту іншого коливання через $\omega + \Delta\omega$. За умовою $\Delta\omega \ll \omega$. Амплітуди коливань будемо вважати однаковими й такими, що дорівнюють A . Щоб спростити математичні перетворення, припустимо, що початкові фази обох коливань дорівнюють нулю. Тоді рівняння коливань будуть мати вигляд

$$x_1 = A \cos \omega t, \quad x_2 = A \cos[(\omega + \Delta\omega)t].$$

Склавши ці вирази й застосувавши формулу для суми косинусів $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos((\alpha + \beta)/2) \cdot \cos(\alpha - \beta)/2$, отримуємо

$$x = x_1 + x_2 = \left(2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t, \quad (29.1)$$

де у другому множнику ми знехтували доданком $\Delta\omega/2$ у порівнянні з ω . Графік функції (29.1) зображений на рис. 29.1а.

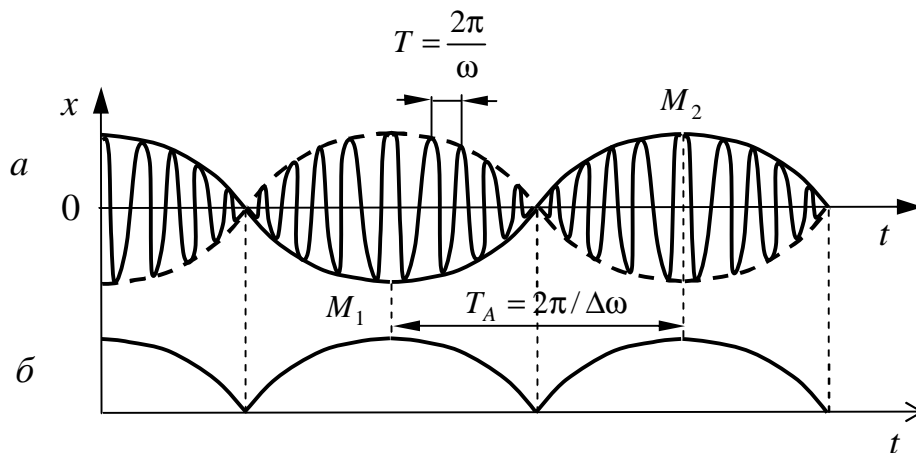


Рисунок 29.1 – а) – Графік биття, побудований для $\omega/\Delta\omega = 10$, і б) – графік змін амплітуди

Множник у дужках у формулі (29.1) змінюється набагато повільніше, ніж інший множник. Через умову $\Delta\omega \ll \omega$ протягом часу, за який $\cos \omega t$ робить кілька повних коливань, множник у дужках майже не змінюється. Це дає підставу розглядати процес (29.1) як майже гармонічне коливання частоти ω , амплітуда якого змінюється за деяким періодичним законом. Множник, що знаходиться у дужках, не може виражати закон зміни амплітуди, тому що він змінюється в межах від $-2A$ до $+2A$, у той час як амплітуда за визначенням є додатною величиною. Графік амплітуди подано на рис. 29.1б. Аналітичний вираз амплітуди має такий вигляд:

$$\text{амплітуда} = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|. \quad (29.2)$$

Цей вираз є періодичною функцією із частотою, яка у два рази перевищує частоту гармонічної функції, що знаходиться під знаком модуля, тобто із частотою $\Delta\omega$ (див. рис. 29.1б). Отже, частота пульсацій амплітуди – її називають **частотою биття** – дорівнює різниці частот коливань, що складаються.

Зазначимо, що множник $2A \cos(\Delta\omega/2)t$ не тільки визначає амплітуду, але й впливає на фазу коливання. Це проявляється, наприклад, у тому, що відхилення, які відповідають

сусіднім максимумам амплітуди, мають протилежні знаки (див. точки M_1 й M_2 на рис. 29.1a).

§ 30 Додавання взаємно перпендикулярних коливань. Фігури Ліссажу [5]

1 Припустимо, що є дві взаємно перпендикулярні векторні величини \vec{x} й \vec{y} , що змінюються з часом з однаковою частотою ω за гармонічним законом

$$\vec{x} = \vec{e}_x A \cos \omega t, \quad \vec{y} = \vec{e}_y B \cos(\omega t + \alpha). \quad (30.1)$$

Тут \vec{e}_x і \vec{e}_y – орти координатних осей X і Y , A і B – амплітуди коливань. Величинами \vec{x} й \vec{y} можуть бути, наприклад, зміщення матеріальної точки від положення рівноваги або напруженості двох взаємно перпендикулярних електричних полів (\vec{E}_x і \vec{E}_y) і т.п.

У випадку частинки, яка коливається, величини

$$x = A \cos \omega t, \quad y = B \cos(\omega t + \alpha) \quad (30.2)$$

визначають координати частинки на площині XY . У випадку електричних полів величини (30.2) визначають координати кінця результуючого вектора напруженості поля \vec{E} .

Частинка або кінець вектора \vec{E} будуть рухатися по деякій траєкторії, вид якої залежить від різниці фаз обох коливань α . Вирази (30.2) фактично задають у параметричній формі рівняння цієї траєкторії. Щоб отримати рівняння траєкторії у звичайному вигляді, потрібно виключити з рівнянь (30.2) параметр t . З першого рівняння випливає, що

$$\cos \omega t = \frac{x}{A}. \quad (30.3)$$

Звідси

$$\sin \omega t = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}. \quad (30.4)$$

Розкладемо косинус у другому рівнянні (30.2) за формулою для косинуса суми:

$$\cos(\omega t + \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha,$$

підставляючи при цьому замість $\cos \omega t$ і $\sin \omega t$ їх значення (30.3) і (30.4). У результаті отримаємо

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos \alpha \mp \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}.$$

Це рівняння за допомогою простих перетворень можна звести до вигляду

$$\boxed{\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \alpha = \sin^2 \alpha}. \quad (30.5)$$

Ми отримали рівняння еліпса, осі якого повернуті відносно координатних осей X і Y . Орієнтація еліпса і його півосі залежать від амплітуд A і B й різниці фаз α .

2 Проведемо дослідження отриманого результату (30.5). Визначимо форму траєкторії для ряду окремих випадків.

1 Різниця фаз α дорівнює нулю. У цьому випадку рівняння (30.5) спрощується таким чином:

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B} \right)^2 = 0.$$

Звідси отримуємо рівняння прямої:

$$y = \frac{B}{A}x. \quad (30.6)$$

Результуючий рух є гармонічним коливанням уздовж цієї прямої із частотою ω й амплітудою, як дорівнює $\sqrt{A^2 + B^2}$ (рис. 30.1а).

2 Різниця фаз α дорівнює $\pm\pi$. Рівняння (30.5) набуває вигляду

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0.$$

Отже, результуючий рух є гармонічним коливанням уздовж прямої

$$y = -\frac{B}{A}x \quad (30.7)$$

(рис. 30.1б).

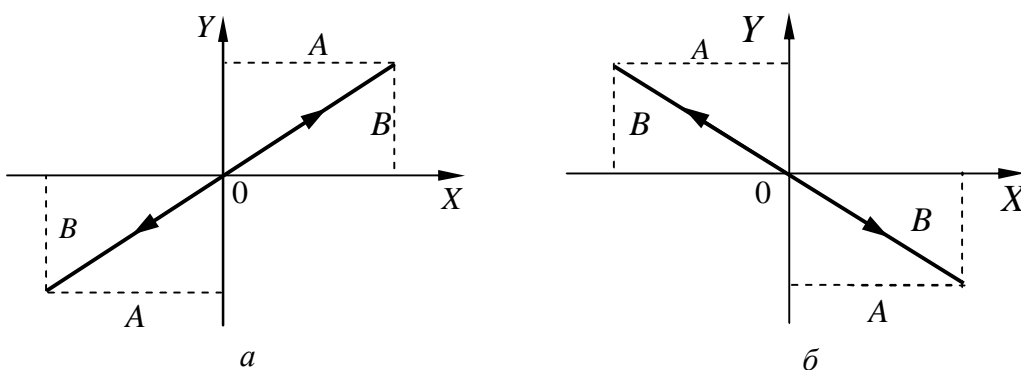


Рисунок 30.1 – Траєкторії частинки при різниці фаз, яка дорівнює нулю (а) і $\pm\pi$ (б)

3 При $\alpha = \pm\pi/2$ рівняння (30.5) переходить у рівняння еліпса, приведенного до координатних осей:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \quad (30.8)$$

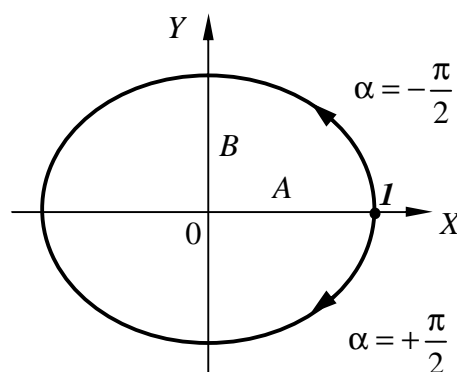


Рисунок 30.2 – Траєкторія частинки при різниці фаз $\alpha = \pm\pi/2$

Півосі еліпса дорівнюють відповідним амплітудам коливань. При рівності амплітуд A і B еліпс перетворюється у коло.

Випадки $\alpha = +\pi/2$ й $\alpha = -\pi/2$ відрізняються напрямом руху по еліпсу або колу. Якщо $\alpha = +\pi/2$, рівняння (30.2) можна записати таким чином:

$$x = A \cos \omega t, \quad y = -B \sin \omega t. \quad (30.9)$$

У момент $t = 0$ тіло знаходиться у точці I (рис. 30.2). У наступні моменти часу координата x зменшується, а координата y стає від'ємною. Отже, рух відбувається за годинниковою стрілкою.

При $\alpha = -\pi/2$ рівняння (30.2) мають вигляд

$$x = A \cos \omega t, \quad y = B \sin \omega t.$$

Звідси робимо висновок, що рух відбувається проти годинникової стрілки. Зі сказаного випливає, що рівномірний рух по колу радіуса R з кутовою швидкістю ω може бути поданий як сума двох взаємно перпендикулярних коливань:

$$x = R \cos \omega t, \quad y = \pm R \sin \omega t \quad (30.10)$$

(знак плюс у виразі для y відповідає руху проти годинникової стрілки, знак мінус – руху за годинниковою стрілкою).

3 У випадку, коли частоти взаємно перпендикулярних коливань відрізняються на дуже малу величину $\Delta\omega$, їх можна розглядати як коливання однакової частоти, але з повільно змінною різницею фаз. Дійсно, рівняння коливань можна подати у вигляді

$$x = A \cos \omega t, \quad y = B \sin[\omega t + (\Delta\omega t + \alpha)]$$

і вираз $\Delta\omega t + \alpha$ розглядати як різницю фаз, що повільно змінюється з часом за лінійним законом. Результуючий рух у цьому випадку відбувається по повільно змінній кривій, яка буде послідовно набирати форми, що відповідає всім значенням різниці фаз від $-\pi$ до $+\pi$.

4 Якщо частоти взаємно перпендикулярних коливань не однакові, то траєкторії результуючого руху мають вигляд досить складних кривих, які називаються **фігурами Ліссажу**. На рис. 30.3 і рис. 30.4 наведені приклади таких фігур. Іноді фігурами Ліссажу називають також і траєкторії (зокрема, еліптичні криві), які виникають при складанні взаємно перпендикулярних коливань однакової частоти.

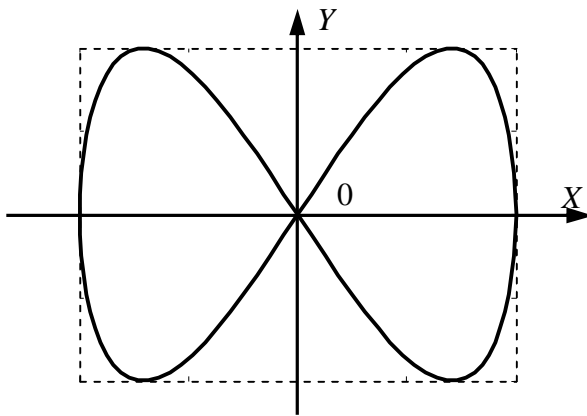


Рисунок 30.3 – Фігура Ліссажу для відношення частот 1:2 і різниці фаз $\pi/2$

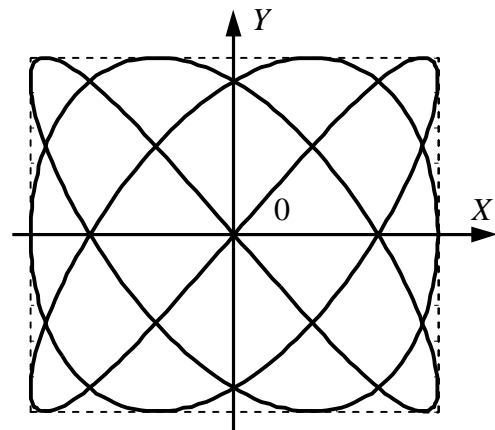


Рисунок 30.4 – Фігура Ліссажу для відношення частот 3:4 і різниці фаз $\pi/2$

§ 31 Диференціальне рівняння загасаючих коливань [5]

У всякій реальній коливальній системі завжди є або сила тертя (у механічній системі), або активний електричний опір (у коливальному контурі), дія яких приводить до зменшення енергії системи. Якщо зменшення енергії не компенсується, то коливання будуть загасати.

1 Розглянемо механічні загасаючі коливання. У найпростішому випадку сила тертя (наприклад, сила в'язкого тертя) пропорційна швидкості:

$$F_x = -r\dot{x}. \quad (31.1)$$

Тут r – стала, яку ми будемо називати **коефіцієнтом тертя**. Знак мінус обумовлений тим, що сила \vec{F} й швидкість \vec{v} спрямовані у протилежні сторони, внаслідок чого їх проекції на вісь X мають різні знаки.

Рівняння другого закону Ньютона за наявності сили тертя має вигляд

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}. \quad (31.2)$$

Використаємо позначення

$$\boxed{\beta = r/(2m)}, \quad \boxed{\omega_0^2 = k/m}, \quad (31.3)$$

і напишемо рівняння (31.2) у вигляді

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}. \quad (31.4)$$

Відзначимо, що величину β в (31.4) називають **коефіцієнтом загасання**; ω_0 є **власною частотою** коливальної системи, тобто та частота, з якої коливалася б система за умови відсутності тертя. Таким чином, отримали диференціальне рівняння (31.4), що визначає поведінку коливальної величини x за наявності сили тертя. Це рівняння називають **диференціальним рівнянням загасаючих коливань**.

2 Розглянемо загасаючі електричні коливання. Нехай у коливальному контурі, крім ємності C й індуктивності L , є активний опір R (рис. 31.1). Застосуємо закон Ома для ділянки кола 1-3-2 (див. рис. 31.1):

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_s. \quad (31.5)$$

Різницю потенціалів на конденсаторі визначимо зі співвідношення

$$\varphi_1 - \varphi_2 = q_1 / C = (-q) / C. \quad (31.6)$$

Тут використали, що заряд пластини конденсатора 1 $q_1 = -q$ (див. рис. 31.1).

Сила струму I є додатною, коли напрям струму збігається з напрямом обходу ділянки кола 1-3-2, тобто за годинниковою стрілкою. У цьому разі заряд на пластині конденсатора $q_2 = q$ пов'язаний із силою струму в ділянці кола таким співвідношенням:

$$I = +dq / dt = +\dot{q}. \quad (31.7)$$

Знак «+» обумовлений тим, що, коли струм I є додатним, заряд $q_2 = q$ збільшується ($\dot{q} > 0$).

Підставимо в (31.5) закон самоіндукції $\mathcal{E}_s = -L dI / dt$, співвідношення (31.6) й (31.7) й отримаємо

$$R\dot{q} = -q / C - L \ddot{q}. \quad (31.8)$$

Далі вводимо позначення

$$\boxed{\beta = R/(2L)}, \quad \boxed{\omega_0^2 = 1/(LC)}, \quad (31.9)$$

і перетворюємо рівняння (31.8) до такого вигляду:

$$\boxed{\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0}. \quad (31.10)$$

Отримане рівняння подібне до (31.4), яке описує механічні коливання, і має таку саму назву: **диференціальне рівняння загасаючих коливань**. Величину β в (31.10), як і у випадку механічної системи, називають **коефіцієнтом загасання**; ω_0 є **власною частотою контуру**, тобто та частота, з якої відбувалися б коливання за умови відсутності активного опору. Таким чином, отримали диференціальне рівняння (31.10), що визначає поведінку коливальної величини q за наявності активного опору в коливальному контурі.

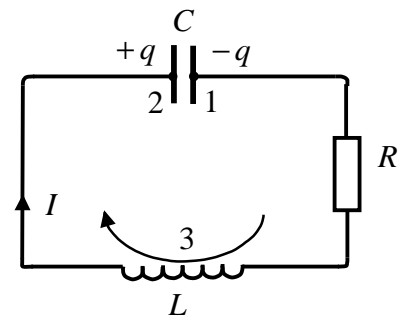


Рисунок 31.1

Із порівняння формул (31.3) і (31.9) випливає, що опір R відіграє роль коефіцієнта тертя r , індуктивність L – роль маси, величина, що зворотна ємності C , – роль коефіцієнта квазіпружної сили k .

§ 32 Розв’язання диференціального рівняння загасаючих коливань. Коефіцієнт загасання, декремент загасання, логарифмічний декремент загасання, добротність [5]

1 Знайдемо розв’язок диференціального рівняння гармонічних коливань:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (32.1)$$

У цьому рівнянні β – коефіцієнт загасання; ω_0 – власна частота коливальної системи (тобто та частота, з якою коливалася б система за умови відсутності загасання). Величина x може бути механічним зміщенням частинки, електричним зарядом на конденсаторі й т.д. Коефіцієнти β та ω_0 визначаються параметрами коливальної системи.

Будемо шукати розв’язок рівняння (32.1) у вигляді

$$x = u \exp(-\beta t), \quad (32.2)$$

де u – деяка, поки що невідома, функція від t . Диференціювання функції x (32.2) за змінною t дає

$$\dot{x} = \dot{u} \exp(-\beta t) - u\beta \exp(-\beta t) = (\dot{u} - \beta u) \exp(-\beta t),$$

$$\ddot{x} = (\ddot{u} - \beta\dot{u}) \exp(-\beta t) - (\dot{u} - \beta u)\beta \exp(-\beta t) = (\ddot{u} - 2\beta\dot{u} + \beta^2 u) \exp(-\beta t).$$

Після підстановки виразів для x , \dot{x} і \ddot{x} у рівняння (32.1) і скорочення на відмінний від нуля множник $\exp(-\beta t)$ отримаємо диференціальне рівняння для u :

$$\ddot{u} + (\omega_0^2 - \beta^2)u = 0. \quad (32.3)$$

Розв’язання рівняння (32.3) залежить від знака коефіцієнта, що стоїть біля u . Розглянемо випадок, коли цей коефіцієнт є додатним (тобто $\beta < \omega_0$). Введемо позначення

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (32.4)$$

і отримаємо рівняння

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0. \quad (32.5)$$

Рівняння (32.5) є диференціальним рівнянням гармонічних коливань і тому його розв’язок можемо записати у вигляді

$$u = A_0 \cos(\omega t + \alpha),$$

де ω є частотою загасаючих коливань (див.

також (32.4)). Далі підставляємо отриманий вираз для u в (32.2) і знаходимо у випадку малого тертя ($\beta < \omega_0$) розв’язок диференціального рівняння загасаючих коливань (32.1):

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (32.6)$$

Тут A_0 і α – сталі, значення яких залежать від початкових умов, ω – величина, що визначається формулою (32.4).

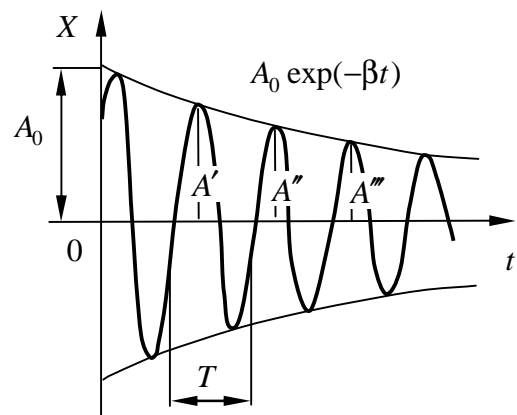


Рисунок 32.1 – Графік загасаючого коливання. Верхня штрихова крива – графік зміни амплітуди з часом

2 Проведемо дослідження отриманого результату (32.6), з'ясуємо характеристики загасаючих коливань. Графік функції (32.6) наведений на рис. 32.1. Штриховими лініями показані межі, у яких знаходиться зміщення змінної величини x .

Відповідно до виду функції (32.6) величину x можна розглядати як гармонічне коливання частоти ω з амплітудою, що змінюється за законом

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}. \quad (32.7)$$

Величину (32.7) називають **амплітудою загасаючих коливань**. Верхня зі штрихових кривих на рис. 32.1 дає графік цієї функції, причому A_0 є амплітудою в початковий момент часу.

Розглянемо послідовні найбільші відхилення величини x (вони відбуваються через період загасаючих коливань T), наприклад, A' , A'' , A''' і т.д. на рис. 32.1. Неважко з'ясувати, що відношення двох послідовних найбільших відхилень мають одне й те саме значення. Дійсно, коли $A' = A_0 \exp(-\beta t)$, то

$$\frac{A'}{A''} = \frac{A_0 \exp[-\beta(t)]}{A_0 \exp[-\beta(t+T)]} = \exp(\beta T),$$

$$\frac{A''}{A'''} = \frac{A_0 \exp[-\beta(t+T)]}{A_0 \exp[-\beta(t+2T)]} = \exp(\beta T)$$

і т.д. Це означає, що таке відношення може бути характеристикою загасаючого коливання. Таким чином, відношення значень амплітуди, що відповідають моментам часу, що відрізняється на період, дорівнює

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \exp(\beta T).$$

Це відношення називають **декрементом загасання**, а його логарифм – **логарифмічним декрементом загасання**:

$$\lambda = \ln \left(\frac{A(t)}{A(t+T)} \right) = \beta T. \quad (32.8)$$

Відповідно до формули (32.4) період загасаючих коливань відрізняється від періоду вільних коливань:

$$T = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (32.9)$$

При незначному терті ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) період коливань практично дорівнює періоду вільних коливань $T_0 = 2\pi / \omega_0$. Зі збільшенням коефіцієнта загасання період коливань зростає.

Для характеристики коливальної системи використовується також величина

$$Q = \pi / \lambda, \quad (32.10)$$

яка називається **добротністю коливальної системи**.

З'ясуємо фізичний зміст коефіцієнта загасання β . Знайдемо час τ , за який амплітуда зменшується в e раз. З визначення величини τ випливає, що $e^{-\beta\tau} = e^{-1}$, звідки $\beta\tau = 1$. Отже, коефіцієнт загасання β є оберненим до проміжку часу τ , за який амплітуда зменшується в e разів ($\beta = 1/\tau$). У цьому й полягає фізичний зміст коефіцієнта загасання.

З'ясуємо фізичний зміст логарифмічного декременту загасання λ . Виразивши відповідно до (32.8) β через λ і T , можна закон зменшення амплітуди з часом написати у вигляді

$$A(t) = A_0 e^{-(\lambda/T)t}.$$

Час τ , за який амплітуда зменшується в e раз, система встигає виконати $N_e = \tau/T$ коливань. З умови $\exp(-\lambda\tau/T) = \exp(-1)$ маємо, що $\lambda\tau/T = \lambda N_e = 1$. Отже, логарифмічний декремент загасання є оберненим до числа коливань, за час яких амплітуда зменшується в e разів ($\lambda = 1/N_e$). У цьому полягає фізичний зміст логарифмічного декременту загасання.

Фізичний зміст добротності полягає у тому, що вона прямо пропорційна числу коливань, за час яких амплітуда зменшується в e разів ($Q = \pi/\lambda = \pi N_e$).

§ 33 Диференціальне рівняння вимушених коливань та його розв'язання [5]

1 Розглянемо механічну коливальну систему із загасанням, яка знаходиться під дією зовнішньої сили, що змінюється з часом за гармонічним законом:

$$F_x = F_0 \cos \Omega t. \quad (33.1)$$

Під дією зовнішньої періодичної сили в системі виникають вимушені коливання. Знайдемо диференціальне рівняння, яке описує вимушені коливання. Для цього застосуємо другий закон Ньютона:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \Omega t.$$

Увівши позначення

$$\beta = r/(2m), \quad \omega_0^2 = k/m,$$

перетворимо рівняння до такого вигляду:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = (F_0/m) \cos \Omega t. \quad (33.2)$$

Тут β – коефіцієнт загасання; ω_0 – власна частота коливальної системи; Ω – частота зовнішньої періодичної сили. Рівняння (33.2) описує вимушені коливання й називається **диференціальним рівнянням вимушених коливань**.

2 Розглянемо вимушені електричні коливання у коливальному контурі з активним опором. Підключимо до коливального контуру з ємністю C , індуктивністю L й активним опором R зовнішнє джерело змінної напруги:

$$U = U_m \cos \Omega t \quad (33.3)$$

(див. рис. 33.1). Під дією зовнішньої змінної напруги у контурі виникають вимушені коливання. Отримаємо диференціальне рівняння, яке описує процеси у контурі. Для цього застосуємо закон Ома для ділянки кола 1-3-2 (див. рис. 33.1):

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}. \quad (33.4)$$

Слід зазначити, що змінну напругу зовнішнього джерела U тут потрібно враховувати разом з ЕРС самоіндукції. Тобто загальна ЕРС, яка діє в контурі, дорівнює

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_s + U = -L \, dI / dt + U. \quad (33.5)$$

Різницю потенціалів на конденсаторі визначимо зі співвідношення

$$\varphi_1 - \varphi_2 = q_1 / C = (-q) / C. \quad (33.6)$$

Тут використали, що заряд пластини конденсатора I $q_1 = -q$ (див. рис. 33.1).

Сила струму I є додатною, коли напрям струму збігається з напрямом обходу ділянки кола 1-3-2, тобто за годинниковою стрілкою. У цьому разі заряд на пластині конденсатора $q_2 = q$ пов'язаний із силою струму в

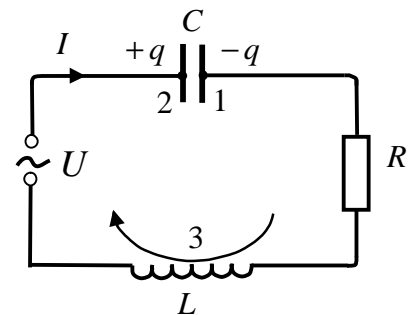


Рисунок 33.1

ділянці кола таким співвідношенням:

$$I = +dq / dt = +\dot{q} . \quad (33.7)$$

Знак «+» обумовлений тим, що, коли струм I є додатним, заряд $q_2 = q$ збільшується ($\dot{q} > 0$).

Підставимо у (33.4) співвідношення (33.5)-(33.6) з урахуванням (33.7) та (33.3) й отримуємо

$$R\dot{q} = -q / C - L \ddot{q} + U_m \cos \Omega t . \quad (33.8)$$

Далі вводимо позначення

$$\boxed{\beta = R / (2L)}, \quad \boxed{\omega_0^2 = 1 / (LC)}, \quad (33.9)$$

і перетворюємо рівняння (33.8) до такого вигляду:

$$\boxed{\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = (U_m / L) \cos \Omega t} . \quad (33.10)$$

Тут β – коефіцієнт загасання; ω_0 – власна частота коливального контуру; Ω – частота коливань зовнішнього джерела. Рівняння (33.10) описує вимушені коливання й називається **диференціальним рівнянням вимушених коливань**.

Порівнявши диференціальне рівняння вимушених коливань для механічної системи (33.2) та для електричного коливального контуру (33.10), можемо зробити висновок, що вони є з математичної точки зору однаковими.

Знайдемо розв'язок диференціального рівняння вимушених коливань (33.10) (такий самий розв'язок буде й для рівняння (33.2)).

Рівняння типу (33.10) називають неоднорідними диференціальними рівняннями з сталими коефіцієнтами. З теорії лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами відомо, що загальний розв'язок неоднорідного рівняння (тобто рівняння, у правій частині якого стоїть функція від t , яка не дорівнює тотожно нулю) дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (тобто того ж рівняння, у якому права частина дорівнює тотожно нулю) і частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Загальний розв'язок однорідного рівняння ми вже знаємо (розв'язок диференціального рівняння загасаючих коливань). Воно має вигляд

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (33.11)$$

де $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота загасаючих коливань.

Залишається тепер знайти частинний (який не має довільних сталих) розв'язок рівняння (33.10). Будемо шукати цей розв'язок у вигляді

$$q = A \cos(\Omega t - \varphi), \quad (33.12)$$

де φ – зсув фаз між зовнішньою напругою і викликаними нею коливаннями в контурі. Спробуємо з'ясувати, чи не існує таких значень A і φ , при яких функція (33.12) задовольняє рівняння (33.10). Для цього підставимо у рівняння (33.10) вираз (33.12) і його похідні:

$$\dot{q} = -A\Omega \sin(\Omega t - \varphi), \quad (33.13)$$

$$\ddot{q} = -A\Omega^2 \cos(\Omega t - \varphi), \quad (33.14)$$

розвертаючи одночасно $\sin(\Omega t - \varphi)$ й $\cos(\Omega t - \varphi)$ за формулами для синуса й косинуса різниці:

$$\begin{aligned} & -A\Omega^2 [\cos \varphi \cos \Omega t + \sin \varphi \sin \Omega t] - 2\beta A\Omega [\cos \varphi \sin \Omega t - \sin \varphi \cos \Omega t] + \\ & + \omega_0^2 A [\cos \varphi \cos \Omega t + \sin \varphi \sin \Omega t] = (U_m / L) \cos \Omega t . \end{aligned}$$

Згрупувавши відповідним чином члени рівняння, отримуємо

$$\left[A(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \varphi + 2\beta A \Omega \sin \varphi \right] \cos \Omega t - \left[A(\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \varphi - 2\beta A \Omega \cos \varphi \right] \sin \Omega t = (U_m / L) \cos \Omega t. \quad (33.15)$$

Для того щоб рівняння (33.15) задовольнялося при будь-яких значеннях t , коефіцієнти при $\cos \Omega t$ й $\sin \Omega t$ в обох частинах рівняння повинні бути однаковими. Звідси знаходимо умови:

$$A(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \varphi + 2\beta A \Omega \sin \varphi = (U_m / L), \quad (33.16)$$

$$A(\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \varphi - 2\beta A \Omega \cos \varphi = 0. \quad (33.17)$$

Із цих співвідношень можна знайти значення A й φ , при яких функція (33.11) задовольняє рівняння (33.10). Піднісши рівності (33.16) і (33.17) у квадрат і склавши їх один з одним, отримаємо

$$A^2(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 A^2 \Omega^2 = (U_m / L)^2,$$

звідки

$$A = \frac{U_m / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}. \quad (33.18)$$

З рівняння (33.17) випливає, що

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (33.19)$$

Підставивши в (33.12) значення A й φ , які визначаються формулами (33.18) і (33.19), отримуємо частинний розв'язок неоднорідного рівняння (33.10):

$$q = \frac{U_m / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} \cos \left(\Omega t - \operatorname{arctg} \frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right). \quad (33.20)$$

Функція (33.20) у сумі з (33.11) дає загальне розв'язання рівняння (33.10). Доданок (33.11) відіграє помітну роль тільки на початковій стадії процесу, при встановленні коливань. Із часом через експонентний множник $\exp(-\beta t)$ роль доданка (33.11) зменшується, і через деякий час ним можна знехтувати, зберігши в розв'язку тільки доданок (33.20).

Таким чином, співвідношення (33.20) описує усталені вимушені коливання.

§ 34 Резонанс. Резонансна частота [5]

1 Резонанс напруги (зміщення). Як відомо, усталені вимушені коливання заряду конденсатора коливального контуру (рис. 34.1) описуються рівнянням

$$q = A \cos(\Omega t - \varphi), \quad (34.1)$$

де

$$A = \frac{U_m / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}, \quad (34.2)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (34.3)$$

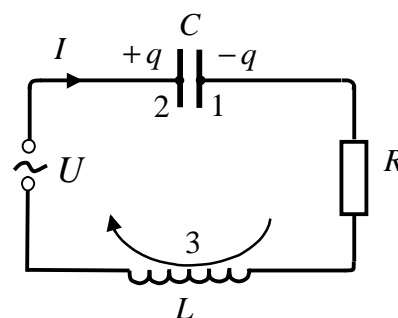


Рисунок 34.1

У цих рівняннях U_m , Ω – амплітуда напруги і частота зовнішнього джерела змінної напруги, ω_0 , β , L є відповідно власна частота, коефіцієнт загасання й індуктивність коливального контуру.

Проведемо дослідження амплітуди вимушених коливань A (див. (34.2)) залежно від частоти вимушених коливань Ω . Залишаючи амплітуду U_m зовнішнього джерела постійною, будемо змінювати його частоту Ω . При $\Omega = 0$ отримаємо під дією постійної напруги статичне відхилення q_0 . При зростанні частоти Ω амплітуда A також зростає, має різкий максимум в області частот, які близькі до власної частоти коливальної системи ω_0 , потім асимптотично прямує до нуля (рис. 34.1).

Явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань у коливальній системі, що відбувається при наближенні частоти періодичного зовнішнього впливу Ω до власної частоти системи ω_0 , називається **резонансом**.

Частота, при якій має місце максимум, називається **резонансною частотою**. Сукупність графіків функції (34.2), що зображена на рис. 34.1, називається резонансними кривими. Про резонанс заряду на конденсаторі зазвичай говорять як про резонанс напруги тому, що заряд і напруга на конденсаторі пов'язані між собою прямо пропорційно ($U_C = q/C$). Резонансу напруги у механічній моделі відповідає резонанс зміщення.

Щоб визначити резонансну частоту у випадку резонансу напруги $\Omega_{рез}$, потрібно знайти максимум функції (34.2) або мінімум виразу, що стоїть під коренем (34.2) у знаменнику. Продиференціювавши цей вираз за Ω й прирівнявши отриману похідну до нуля, отримаємо умову, що визначає резонансну частоту $\Omega_{рез}$:

$$-4(\omega_0^2 - \Omega^2)\Omega + 8\beta^2\Omega^2 = 0.$$

Це рівняння має три розв'язки: $\Omega = 0$ і $\Omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. Розв'язок, що дорівнює нулю, відповідає максимуму знаменника (тобто мінімуму амплітуди). З інших двох розв'язків, що є від'ємним, потрібно відкинути, як такий, що не має фізичного змісту (частота не може бути від'ємною). Таким чином, для резонансної частоти отримуємо

$$\Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (34.4)$$

Підставивши це значення в (34.2), знаходимо вираз для амплітуди при резонансі:

$$A_{рез} = \frac{U_m / L}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (34.5)$$

Із цього виразу випливає, що за умови відсутності опору (тертя) ($\beta = 0$) амплітуда при резонансі дорівнювала б нескінченності. Згідно з (34.4) резонансна частота за тих самих умов (при $\beta = 0$) збігалася б із власною частотою коливань системи ω_0 .

Знайдемо відношення амплітуди при резонансі ($\Omega = \Omega_{рез}$) до амплітуди, коли частота зовнішнього впливу дорівнює нулю ($\Omega = 0$). При прямуванні частоти до нуля заряд на конденсаторі дорівнює, як це випливає з (34.2), $q_0 = U_m / (L\omega_0^2) = CU_m$ (тут використали,

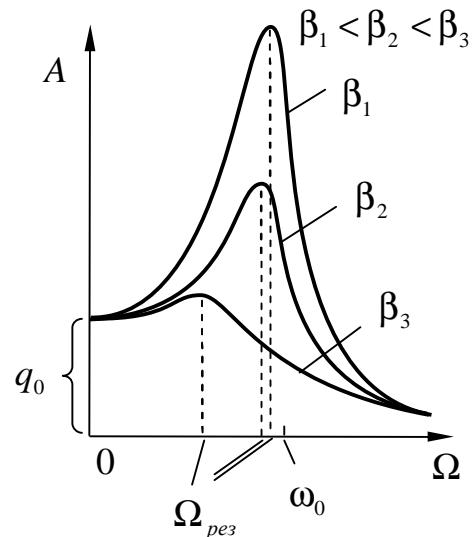


Рисунок 34.2 – Резонансні криві для заряду конденсатора (зміщення)

що $\Omega = 0$, $\omega_0^2 = 1/(LC)$). Це значення відповідає заряду на конденсаторі, який виникає під дією постійної напруги U_m . З іншого боку, відповідно до формули (34.5) при малому загасанні (тобто при $\beta \ll \omega_0$) амплітуда при резонансі дорівнює

$$A_{рез} \approx \frac{U_m / L}{2\beta\omega_0}.$$

Розділимо цей вираз на величину заряду на конденсаторі $q_0 = U_m / (L\omega_0^2) = CU_m$, що виникає при постійній зовнішній напрузі. У результаті отримаємо, що

$$\boxed{\frac{A_{рез}}{q_0} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = Q.} \quad (34.6)$$

Таким чином, добротність показує, у скільки разів амплітуда заряду конденсатора при резонансі перевищує заряд, що виникає на конденсаторі під дією постійної напруги, модуль якої дорівнює амплітуді змінної напруги.

2 Резонанс струмів (швидкості). Для електричного струму у коливальному контурі також має місце явище резонансу і про це явище говорять як про резонанс струмів (для механічної моделі – резонанс швидкості).

Знайдемо резонансну частоту для резонансу струмів. Виходячи з (34.1) неважко отримати вираз для електричного струму в коливальному контурі під час ustalених вимушених коливань:

$$I = \dot{q} = -A\Omega \sin(\Omega t - \phi) = I_m \cos(\Omega t - \phi + \pi/2), \quad (34.7)$$

де

$$I_m = \frac{\Omega U_m / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} = \frac{U_m / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 / \Omega^2 + 4\beta^2}}. \quad (34.8)$$

З (34.8) випливає, що амплітуда коливань струму має іншу залежність від частоти зовнішнього періодичного джерела (див. рис. 34.2). Зрозуміло, що при резонансі амплітуда I_m буде максимальною. Максимум I_m буде тоді, коли знаменник (34.8) набуває мінімального значення. Неважко з'ясувати, що це має місце, коли $\Omega = \omega_0$. Таким чином, у випадку резонансу струмів (резонансу швидкості) резонансна частота визначається співвідношенням

$$\boxed{\Omega'_{рез} = \omega_0.} \quad (34.9)$$

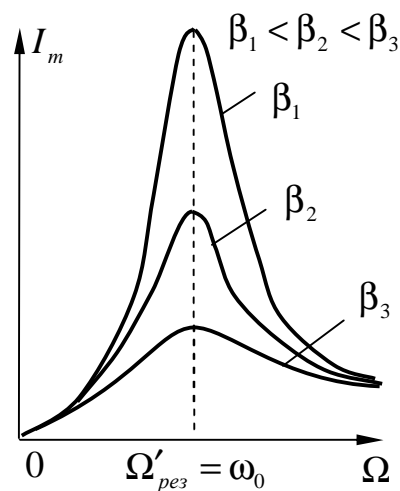


Рисунок 34.3 – Резонансні криві для струму у коливальному контурі (швидкості)

§ 35 Закон Ома для змінних струмів. Імпеданс. Ємнісний та індуктивний опори [2]

1 Знайдемо зв'язок між амплітудами змінної напруги та змінного електричного струму у коливальному колі (рис. 34.1). Описані у попередніх параграфах ustalені вимушені коливання можна розглядати як проходження у колі, що має ємність C , індуктивність L й активний опір R , змінного струму, який обумовлений змінною напругою

$$U = U_m \cos \Omega t. \quad (35.1)$$

Відповідно до отриманих раніше результатів цей струм змінюється за законом

$$I = \dot{q} = -A\Omega \sin(\Omega t - \varphi) = I_m \cos(\Omega t - \varphi + \pi/2) = I_m \cos(\Omega t - \psi), \quad (35.2)$$

де амплітуда струму I_m та фаза Ψ визначаються співвідношеннями:

$$I_m = A\Omega = \frac{U_m \Omega / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}, \quad (35.3)$$

$$\operatorname{tg}\Psi = \operatorname{tg}(\varphi - \pi/2) = -1/\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\beta\Omega}. \quad (35.4)$$

Коли ж взяти до уваги, що власна частота та коефіцієнт загасання пов'язані з параметрами контуру співвідношеннями

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \beta = \frac{R}{2L}, \quad (35.5)$$

то для амплітуди сили струму у контурі I_m і фази ψ можемо записати

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\Omega L - 1/(\Omega C))^2}}, \quad (35.6)$$

$$\operatorname{tg}\Psi = \frac{\Omega L - 1/(\Omega C)}{R}. \quad (35.7)$$

Формула (35.6) є подібною до закону Ома у тому розумінні, що амплітуда струму I_m пропорційна амплітуді напруги U_m . Тому формулу (35.6) іноді називають **законом Ома для змінного струму**. Однак потрібно пам'ятати, що ця формула встановлює співвідношення лише між амплітудами, але не миттєвими значеннями U і I .

У випадку постійного струму відношення напруги до сили струму визначає опір провідника. Подібно до цього при змінному струмі відношення амплітуди повної напруги до амплітуди струму

$$Z = \sqrt{R^2 + (\Omega L - 1/(\Omega C))^2} \quad (35.8)$$

називають **повним електричним опором, або імпедансом**.

2 Усяке реальне електричне коло має скінченні R , L й C . В окремих випадках деякі з цих параметрів бувають такими, що їх впливом на струм можна знехтувати. Проаналізуємо ряд таких випадків.

Розглянемо електричне коло, що складається лише з активного опору R . Використовуючи закон Ома, можемо знайти силу струму

$$I = U / R = (U_m / R) \cos \Omega t = I_m \cos \Omega t.$$

Звідси випливає, що **струм у цьому випадку змінюється у фазі з напругою, тобто відповідний зсув фаз дорівнює нулю** $\psi = 0$, а амплітуда сили струму дорівнює

$$I_m = \frac{U_m}{R}. \quad (35.9)$$

Порівняння отриманого виразу з (35.6) показує, що заміна конденсатора закороченою ділянкою кола означає перехід не до $C = 0$, а до $C = \infty$. Також порівняння показує, що заміна котушки індуктивності закороченою ділянкою кола означає перехід до $L = 0$.

Розглянемо електричне коло, що складається лише з котушки з індуктивністю L . Це означає, що активним опором кола можна знехтувати при $R = 0$, ємність конденсатора можна покласти такою, що дорівнює нескінченності $C = \infty$. В цьому випадку, використовуючи формули (35.6) та (35.7), отримуємо

$$I_m = \frac{U_m}{\Omega L}, \quad (35.10)$$

а $tg\psi = +\infty$ (відповідно $\psi = +\pi/2$). Величину

$$X_L = \Omega L \quad (35.11)$$

називають **реактивним індуктивним опором, або просто індуктивним опором кола**. Як бачимо, $\psi = +\pi/2$, тобто **напряга на індуктивності випереджає струм на $\pi/2$** .

Розглянемо електричне коло, що складається лише з конденсатора з ємністю C . Тобто припускаємо, що можна покласти такими, що дорівнюють нулю, R й L . Тоді відповідно до формул (35.6) та (35.7)

$$I_m = \frac{U_m}{1/(\Omega C)}, \quad (35.12)$$

$tg\psi = -\infty$ (тобто $\psi = -\pi/2$). Величину

$$X_C = \frac{1}{\Omega C} \quad (35.13)$$

називають **реактивним ємнісним опором, або просто ємнісним опором**. Оскільки $\psi = -\pi/2$, **напряга на конденсаторі відстає від струму на $\pi/2$** .

З Як бачимо, на конденсаторі та котушці напряга і струм зміщені за фазою на $\pi/2$. Це приводить до того, що середня потужність, яка виділяється на цих елементах, дорівнює нулю. Дійсно,

$$\langle P_C \rangle = \langle I \cdot U_C \rangle = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} I_m \cos(\Omega t - (-\pi/2)) U_m \cos(\Omega t) dt = -\frac{\Omega}{4\pi} I_m U_m \int_0^{2\pi/\Omega} \sin(2\Omega t) dt = 0,$$

$$\langle P_L \rangle = \langle I \cdot U_L \rangle = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} I_m \cos(\Omega t - (+\pi/2)) U_m \cos(\Omega t) dt = \frac{\Omega}{4\pi} I_m U_m \int_0^{2\pi/\Omega} \sin(2\Omega t) dt = 0.$$

Саме через цю особливість ємнісний X_C та індуктивний X_L опори називають реактивними, на конденсаторі та котушці індуктивності тепло не виділяється.

На протизагу реактивним опорам X_C та X_L на опорі R струм і напряга змінюються синфазно. Тому середня потужність, яка виділяється на опорі R , не дорівнює нулю:

$$\langle P_R \rangle = \langle I \cdot U_R \rangle = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} I_m \cos(\Omega t) U_m \cos(\Omega t) dt = \frac{\Omega}{2\pi} I_m U_m \cdot \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{I_m U_m}{2}. \quad (35.14)$$

Саме через цю особливість опір R називають активним, на опорі R виділяється тепло.

Позначимо через I_{ef} та U_{ef} силу та напрягу постійного струму, який виділяє на опорі R таку саму середню потужність, що і у випадку змінного електричного струму. Тоді

$$\langle P_R \rangle = I_{ef} U_{ef} = R I_{ef}^2 = U_{ef}^2 / R.$$

Порівнюючи цей вираз із виразом для потужності змінного струму (35.14), можемо записати

$$I_{ef} = I_m / \sqrt{2}, \quad U_{ef} = U_m / \sqrt{2}. \quad (35.15)$$

Сила струму I_{ef} з (35.15) називається **ефективною (діючою) силою змінного струму**, а U_{ef} з (35.15) – **ефективною (діючою) напругою**.

У загальному випадку середня потужність, яка виділяється на елементах контуру, що складається з котушки індуктивності, конденсатора та опору, визначається таким співвідношенням

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \langle U \cdot I \rangle = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} U_m \cos(\Omega t) \cdot I_m \cos(\Omega t - \psi) dt = \\ &= \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} \frac{U_m \cdot I_m}{2} (\cos(\Omega t + \Omega t - \psi) + \cos(\Omega t - \Omega t + \psi)) \cos(\Omega t) \cos(\Omega t - \psi) dt = \\ &= \frac{I_m U_m \cos(\psi)}{2} = I_{ef} U_{ef} \cos(\psi). \end{aligned}$$

Тут використали співвідношення (35.1), (35.2), (35.15). Таким чином, *потужність, яка виділяється на елементах електричного контуру, визначається різницею фаз напруги та струму ψ* (35.7), *ефективною силою струму I_{ef} у контурі та ефективною напругою U_{ef} , яка подається на контур:*

$$\langle P \rangle = \frac{I_m U_m \cos(\psi)}{2} = I_{ef} U_{ef} \cos(\psi). \quad (35.16)$$

4 Використовуючи розглянуті вище властивості окремих елементів контуру можна достатньо легко аналізувати змінні струми і змінні напруги у довільному контурі за допомогою методу векторних діаграм. Розглянемо, наприклад, контур, що зображений на рис. (35.2). З цього рисунка випливає, що повна напруга U дорівнює сумі напруг на кожному з елементів контуру:

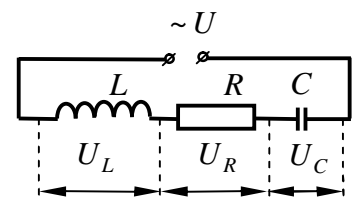


Рисунок 35.2

$$U_R + U_C + U_L = U. \quad (35.16)$$

Зрозуміло, що тут маємо справу гармонічними коливаннями U_R , U_C , U_L однакової частоти та напрямку. Тому додавання цих гармонічних коливань проведемо за допомогою методу векторних діаграм.

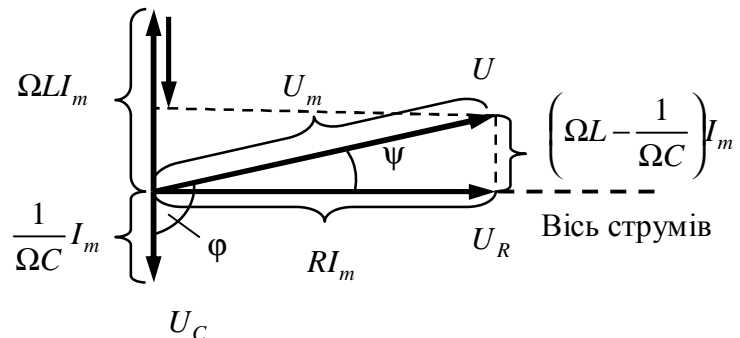


Рисунок 35.3

Візьмемо до уваги, що електричні струми, що проходить через кожний елемент контуру, які з'єднані послідовно, є

однаковими. Нам відомо, що напруга на ємності відстає за фазою від сили струму на $\pi/2$, а напруга на індуктивності випереджає струм на $\pi/2$. Напруга на активному опорі має таку саму фазу, як і струм. Амплітудні значення відповідних напруг визначаються співвідношеннями (35.9), (35.10), (35.12).

Нагадаємо, що гармонічне коливання можна задати за допомогою вектора, довжина якого дорівнює амплітуді коливання, а напрям вектора утворює із деякою віссю кут, який дорівнює початковій фазі коливання. Візьмемо за пряму, від якої відлічується початкова фаза, вісь струмів.

Відкладемо вектори, що пов'язані з гармонічними коливаннями U_R , U_C , U_L з урахуванням вищезазначених властивостей (див. рис. 35.3). Згідно з (35.16) три функції U_R , U_C й U_L у сумі повинні дорівнювати прикладеній напрузі U . Відповідно до цього напруга U зображується на діаграмі вектором, що дорівнює сумі векторів U_R , U_C і U_L .

Отримана діаграма наочно відображає процеси, що відбуваються в контурі. Зазначимо, що із прямокутного трикутника, який утворено на діаграмі векторами U , U_R й

різницею $U_L - U_C$, за допомогою теореми Піфагора впливає закон Ома для змінних струмів (35.6) (контурні на рис. 35.1 та рис. 35.2 є однаковими).

ТЕМА 6 ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ

§ 36 Хвилі в пружному середовищі. Поперечні та поздовжні хвилі. Довжина хвилі. Рівняння біжучої хвилі. Фазова швидкість, хвильове число [5]

1 Хвилями називаються збурення, які поширюються в речовині або у вакуумі і несуть з собою енергію. Характерна властивість хвиль полягає в тому, що перенесення енергії хвилею виконується без перенесення речовини.

Хвилі можуть мати різну форму.

Поодинокую хвилю, або імпульсом, називається коротке збурення, що не має регулярного характеру (рис. 36.1а). Обмежений ряд збурень називається **цугом**. Зазвичай під цугом розуміють відрізок синусоїди (рис. 36.1б). Особливе значення в теорії хвиль має **гармонічна хвиля**, тобто нескінченна синусоїдальна хвиля, у якій зміна стану середовища відбувається за законом синуса або косинуса (рис. 36.1в).

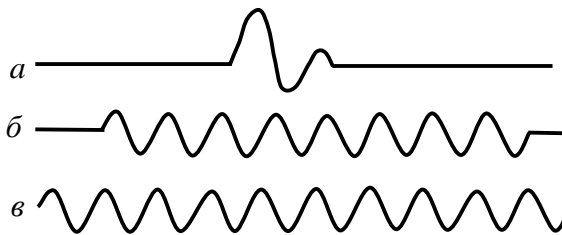


Рисунок 36.1 – Деякі форми хвиль: поодинокую хвилю, або імпульс, (а); цуг хвиль (б) і синусоїдальна хвиля (в)

Розглянемо пружні гармонічні хвилі. Якщо в будь-якому місці пружного (твердого, рідкого або газоподібного) середовища збудити коливання її частинок, то внаслідок взаємодії між частинками це коливання буде поширюватися у середовищі від частинки до частинки з деякою швидкістю v – виникає **біжуча хвиля**.

Частинки середовища, у якому поширюється хвиля, не втягуються хвилею в поступальний рух, вони лише виконують коливання біля своїх положень рівноваги. Залежно від напрямку коливань частинок відносно напрямку, у якому поширюється хвиля, розрізняють **поперечні й поздовжні хвилі**. У поперечній хвилі частинки середовища коливаються в напрямках, перпендикулярних до напрямку поширення хвилі. У поздовжній хвилі частинки середовища коливаються вздовж напрямку поширення хвилі. Пружні поперечні хвилі можуть виникнути лише у середовищі, що мають опір зсуву. Тому в рідкому й газоподібному середовищах можуть виникати тільки поздовжні хвилі. У твердому середовищі можливе виникнення як поперечних, так і поздовжніх хвиль.

На рис. 36.2 показаний рух частинок при поширенні пружної поперечної хвилі зі швидкістю v . Номерами 1, 2 і т.д. позначені частинки, що знаходяться одна від одної на відстані, що дорівнює $vT/4$, тобто на відстані, яку проходить хвиля за чверть періоду коливань. У момент часу, який взято за нульовий, хвиля, поширюючись уздовж осі X зліва направо, досягла частинки 1, внаслідок чого ця частинка почала зміщуватися з положення рівноваги вгору, захоплюючи за собою подальші частинки. Через чверть періоду частинка 1 досягає крайнього верхнього положення; одночасно починає зміщуватися з положення рівноваги частинка 2. Після закінчення ще чверті періоду перша частинка буде проходити положення рівноваги, рухаючись у напрямку зверху вниз, друга частинка досягне крайнього верхнього положення, а третя частинка почне зміщуватися вгору з положення рівноваги. У момент часу, що дорівнює T , перша частинка завершить повний цикл коливання й буде перебувати в такому самому стані, як і в початковий момент. Хвиля в момент часу T , пройшовши шлях vT , досягне частинки 5.

Вище ми розглядали коливання частинок, положення рівноваги яких лежать на осі X . Однак коливаються не тільки частинки, розміщені на осі X , а й сукупність частинок, які містяться у деякому об'ємі. Поширюючись від джерела коливань, хвильовий процес охоплює все нові й нові частини простору. *Геометричне місце точок, до яких доходять коливання до*

моменту часу t , називається **фронтом хвилі** (або **хвильовим фронтом**). Фронт хвилі є поверхнею, що відокремлює частину простору, вже залучену до хвильового процесу, від області, у якій коливання ще не виникли.

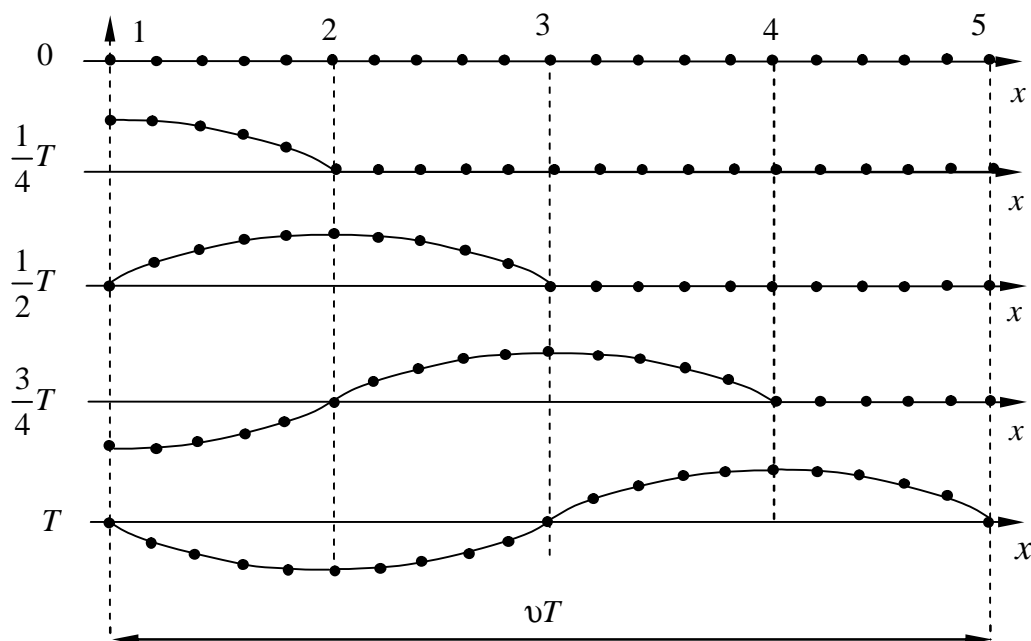


Рисунок 36.2 – Механізм утворення поперечної пружної хвилі

Геометричне місце точок, що коливаються в однаковій фазі, називається **хвильовою поверхнею**. Хвильових поверхонь існує нескінченна множина, у той час як хвильовий фронт у кожний момент часу тільки один. Хвильові поверхні залишаються нерухомими (вони проходять через положення рівноваги частинок, що коливаються в однаковій фазі). Хвильовий фронт увесь час переміщується.

Хвильові поверхні можуть бути будь-якої форми. У найпростіших випадках вони мають форму площини або сфери. Відповідно хвиля в цих випадках називається **плоскою або сферичною**. У плоскій хвилі хвильові поверхні являють собою множину паралельних одна одній площин, у сферичній хвилі – множину концентричних сфер.

Візьмемо напрям поширення плоскої хвилі за вісь X . Тоді всі точки середовища, положення рівноваги яких мають однакову координату x (але різні значення координат y і z), коливаються в однаковій фазі. На рис. 36.3 зображена крива, що дає зміщення ξ з положення рівноваги точок із різними x в деякий момент часу.

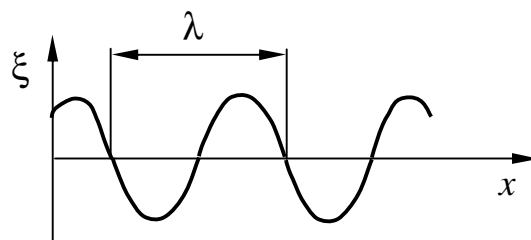


Рисунок 36.3 – Залежність зміщення частинок ξ від координати x , яка побудована для деякого моменту часу t ; λ – довжина хвилі

Відстань λ , на яку поширюється хвиля за час, що дорівнює періоду коливань частинок середовища, називається **довжиною хвилі**. Очевидно, що

$$\boxed{\lambda = vT}, \quad (36.1)$$

де v – швидкість хвилі; T – період коливань. Довжину хвилі можна визначити також як відстань між найближчими точками середовища, що коливаються з різницею фаз, яка дорівнює 2π (див. рис. 36.3).

2 Рівнянням хвилі називається вираз, що визначає зміщення частинок, які коливаються, як функцію їх координат рівноважного положення x , y , z і часу t :

$$\xi = \xi(x, y, z, t). \quad (36.2)$$

Ця функція повинна бути періодичною як за часом t , так і за координатами x, y, z . Періодичність за часом впливає з того, що функція ξ описує коливання частинки з координатами x, y, z . Періодичність за координатами впливає з того, що точки, які віддалені одна від одної на відстань λ , коливаються однаково.

Знайдемо вигляд функції ξ у випадку плоскої гармонічної хвилі. Для спрощення спрямуємо осі координат так, щоб вісь X збігалася з напрямом поширення хвилі (див. рис. 36.4). Тоді хвильові поверхні будуть перпендикулярними до осі X і, оскільки всі точки хвильової поверхні коливаються однаково, зміщення ξ буде залежати тільки від x і t : $\xi = \xi(x, t)$. Нехай коливання точок, що лежать у площині $x = 0$ (рис. 36.4), мають вигляд

$$\xi(0, t) = A \cos(\omega t + \alpha).$$

Знайдемо вигляд коливань точок у площині, що відповідає довільному значенню x . Для того щоб пройти шлях від площини $x = 0$ до цієї площини, хвилі потрібен час $\tau = x/v$ (v – швидкість поширення хвилі). Тому коливання частинок, що лежать у площині x , будуть відставати за часом на τ від коливань частинок у площині $x = 0$ і, отже, будуть мати вигляд

$$\xi(x, t) = A \cos[\omega(t - \tau) + \alpha] = A \cos[\omega(t - x/v) + \alpha].$$

Таким чином, **рівняння плоскої біжучої хвилі** (і поперечної, і поздовжньої), що поширюється в напрямку осі X , визначається рівнянням

$$\boxed{\xi(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \alpha \right]} \quad (36.3)$$

Величина A є **амплітудою хвилі**. Початкова фаза хвилі α визначається вибором початку відліку x й t .

Знайдемо фізичний зміст швидкості хвилі v . Зафіксуємо деяке значення фази у рівнянні (36.3), припустивши

$$\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \alpha = \text{const}. \quad (36.4)$$

Продиференціюємо це співвідношення і отримаємо

$$dt - \frac{1}{v} dx = 0,$$

звідки

$$dx/dt = v.$$

Ліва частина цієї рівності визначає швидкість переміщення даного значення фази. Таким чином, швидкість поширення хвилі v в рівнянні (36.3) є швидкістю переміщення фази, у зв'язку з чим її називають **фазовою швидкістю**.

Згідно з (36.4) значення x з часом зростає. Отже, рівняння (36.3) описує хвилю, що поширюється у бік зростання x . Хвиля, що поширюється в протилежному напрямку, описується рівнянням

$$\xi(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{v} \right) + \alpha \right]. \quad (36.5)$$

Це впливає з того, що, зафіксувавши в (36.5), значення фази, ми знайдемо, що зі збільшенням t координата x зменшується.

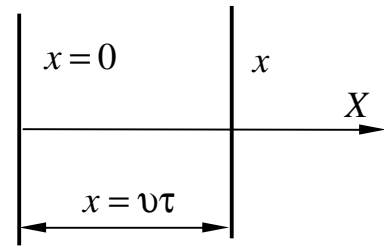


Рисунок 36.4 – Плоска хвиля, що поширюється вздовж осі X зі швидкістю v . За час τ хвиля проходить шлях від $x = 0$ до $x = v\tau$

Рівнянню (36.3) можна надати симетричного відносно x і t вигляду. Для цього введемо величину

$$\boxed{k = 2\pi/\lambda}, \quad (36.6)$$

яка називається **хвильовим числом**. Помноживши чисельник і знаменник виразу (36.5) на період T , можна подати хвильове число у вигляді

$$\boxed{k = \omega/v}. \quad (36.7)$$

Розкривши в (36.3) круглі дужки й взявши до уваги (36.7), одержимо рівняння

$$\boxed{\xi(x, t) = A \cos[\omega t - kx + \alpha]}. \quad (36.8)$$

Це співвідношення також є рівнянням хвилі. Рівняння хвилі, що поширюється у бік зменшення x , відрізняється від (36.7) тільки знаком біля kx .

Якщо напрям поширення плоскої хвилі утворює із осями координат X, Y, Z відмінні від нуля кути, то рівняння хвилі буде мати складніший вигляд. Неважко показати, що в цьому випадку воно буде таким

$$\boxed{\xi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha)}. \quad (36.9)$$

де \vec{r} – радіус-вектор, проведений у розглянуту точку простору; $\vec{k} = k\vec{n}$ – **хвильовий вектор**, що напрямлений у бік поширення хвилі (\vec{n} – вектор нормалі до хвильової поверхні в даній точці простору).

Функція (36.9) дає зміщення з положення рівноваги точки з радіусом-вектором \vec{r} у момент часу t (нагадаємо, що \vec{r} визначає рівноважне положення точки). Щоб перейти від радіуса-вектора точки до її координат x, y, z , виразимо скалярний добуток $\vec{k}\vec{r}$ через компоненти векторів на координатні осі:

$$\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z.$$

Тоді рівняння плоскої біжучої хвилі набуде вигляду

$$\boxed{\xi(x, y, z, t) = A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha)}. \quad (36.10)$$

Тут k_x, k_y, k_z – проекції хвильового вектора на відповідні координатні осі.

При розгляді рівняння плоскої хвилі ми припускали, що амплітуда коливань не залежить від x . Для плоскої хвилі це справедливо в тому випадку, коли енергія хвилі не поглинається середовищем. При поширенні в поглинаючому середовищі інтенсивність хвилі поступово зменшується – відбувається загасання хвилі. Дослід показує, що в однорідному середовищі загасання відбувається за експонентним законом $A = A_0 \exp(-\gamma x)$. Тому **рівняння плоскої загасаючої хвилі, що поширюється вздовж осі X , має вигляд**

$$\boxed{\xi(x, t) = A_0 e^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx + \alpha)}, \quad (36.11)$$

де A_0 – амплітуда в площині $x = 0$.

Знайдемо рівняння сферичної хвилі. Будь-яке реальне джерело хвиль має кінцеву довжину. Однак якщо обмежитися розглядом хвилі на відстанях від джерела, що значно перевищують його розміри, то джерело можна вважати точковим. У наслідок центральної симетрії в однорідному й ізотропному середовищі хвиля, що створюється точковим джерелом, буде сферичною. Припустимо, що фаза коливань джерела дорівнює $(\omega t - \alpha)$. Тоді точки, що лежать на хвильовій поверхні радіуса r , будуть коливатися з фазою

$$\omega(t - r/v) + \alpha = \omega t - kr + \alpha$$

(щоб пройти шлях r , хвилі потрібен час $\tau = r/v$). Амплітуда сферичної хвилі, навіть якщо енергія хвилі не поглинається середовищем, не залишається сталою – вона зменшується з

відстанню від джерела за законом $1/r$ (це буде показано далі). Отже, **рівняння сферичної хвилі має вигляд**

$$\boxed{\xi(x, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha)}. \quad (36.12)$$

§ 37 Хвильове рівняння. Фазова швидкість поширення хвиль у твердому тілі й газі [5]

1 Хвильовим рівнянням називається лінійне однорідне диференціальне рівняння у частинних похідних, що описує поширення хвиль у середовищі або у вакуумі. Знайдемо вигляд цього рівняння, виходячи з рівняння плоскої гармонічної хвилі

$$\xi(x, y, z, t) = A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha). \quad (37.1)$$

Другі частинні похідні функції (37.1) за кожною із змінних мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= -\omega^2 A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha) = -\omega^2 \xi, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= -k_x^2 \xi, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -k_y^2 \xi, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -k_z^2 \xi. \end{aligned}$$

Сума похідних за координатами

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \xi = -k^2 \xi$$

відрізняється від похідної за часом множителем k^2 / ω^2 , що дорівнює $1/v^2$. Отже,

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}.$$

Це і є **хвильове рівняння**. Його можна написати у вигляді

$$\boxed{\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}, \quad (37.2)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Зазначимо, що для плоскої хвилі, що поширюється вздовж осі X , хвильове рівняння має вигляд

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (37.3)$$

Незважаючи на те що ми одержали рівняння (37.2), виходячи з функції, яка описує плоску гармонічну хвилю, це рівняння описує й хвилі іншого вигляду. Наприклад, легко переконатися у тому, що будь-яка функція типу

$$f(x, y, z, t) = f(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha) \quad (37.4)$$

задовольняє хвильове рівняння (37.2).

Також можна стверджувати: *будь-яка функція, що задовольняє рівняння типу (37.2), описує деяку хвилю, причому корінь квадратний з величини, обернений коефіцієнту при $\partial^2 \xi / \partial t^2$, дає фазову швидкість цієї хвилі.*

2 Використовуючи вищесформульовану властивість можна отримати вирази для швидкості хвиль у різних середовищах.

Фазова швидкість поздовжньої пружної хвилі визначається співвідношенням

$$v = \sqrt{E/\rho}, \quad (37.5)$$

де ρ – густина речовини; E – модуль Юнга цієї речовини.

Фазова швидкість поперечної пружної хвилі має вигляд

$$v = \sqrt{G/\rho}, \quad (37.6)$$

де G – модуль зсуву.

Швидкість поширення звукових хвиль описується такою формулою:

$$v = \sqrt{\gamma RT/\mu}, \quad (37.7)$$

де γ – стала адиабати; R – універсальна газова стала; T – абсолютна температура; μ – молярна маса газу.

§ 38 Густина енергії пружної хвилі [5]

1 Отримаємо співвідношення для відносної деформації стержня ε . Розглянемо циліндричний стержень із однорідного й ізотропного матеріалу. Припустимо, що вздовж стержня поширюється плоска гармонічна хвиля. У цьому випадку частинки, що лежать у поперечному перерізі стержня, який визначається координатою x , будуть мати зміщення ξ , що визначається функцією

$$\xi = A \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (38.1)$$

Виділимо в стержні елемент довжини Δx , обмежений за умови відсутності хвилі перерізами x й $x + \Delta x$ (рис. 38.1). Якщо переріз із координатою x має в деякий момент часу зміщення ξ , то зміщення перерізу з координатою $x + \Delta x$ буде дорівнює $\xi + \Delta\xi$. Оскільки зміщення перерізів із різними значеннями координати x неоднакові, розглянутий елемент стержня виявляється деформованим – він отримує видовження $\Delta\xi$. Відношення $\Delta\xi/\Delta x$ дає середнє значення $\langle \varepsilon \rangle$ відносного видовження елемента стержня Δx . Щоб отримати деформацію ε в перерізі x , потрібно спрямувати Δx до нуля. Отже,

$$\varepsilon = \partial\xi/\partial x \quad (38.2)$$

(символ частинної похідної взятий тому, що ξ залежить не тільки від x , але й від t).

2 Знайдемо потенціальну енергію пружно-деформованого стержня.

Коли стержень довжиною l_0 та з поперечним перерізом S має видовження Δl , то в ньому виникає сила пружності, яка визначається співвідношенням

$$F_{np} = S\sigma = SE \frac{\Delta l}{l_0} = \kappa \Delta l,$$

де σ – механічна напруга в стержні; E – модуль Юнга; $\kappa = SE/l_0$ – коефіцієнт пружності.

Відомо, що потенціальна енергія пружно-деформованого тіла визначається виразом

$$W_p = \frac{\kappa \cdot \Delta l^2}{2} = \frac{SE \Delta l^2}{2 l_0} = \frac{E}{2} \left(\frac{\Delta l}{l_0} \right)^2 (Sl_0) = \frac{E\varepsilon^2}{2} V,$$

де ε – відносне видовження, а V – об'єм стержня.

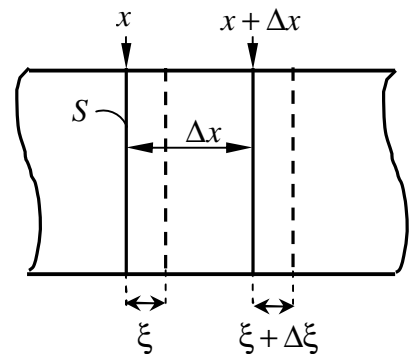


Рисунок 38.1 – Деформація елемента стержня при поширенні в ньому поздовжньої пружної хвилі

Звідси знаходимо, що у деформованому стані стержень має густину потенціальної енергії (потенціальна енергія одиниці об'єму)

$$\boxed{w_p = \frac{W_p}{V} = \frac{E\varepsilon^2}{2}}. \quad (38.3)$$

Знайдемо густину енергії хвилі, що поширюється у стержні. Виділимо в середовищі елементарний об'єм ΔV , настільки малий, щоб швидкість руху й деформацію у всіх його точках можна було вважати однаковими й такими, що дорівнюють відповідно $\partial\xi/\partial t$ й $\partial\xi/\partial x$ (див. (38.2)). Виділений об'єм має кінетичну енергію

$$\Delta W_k = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial\xi}{\partial t} \right)^2 \Delta V \quad (38.4)$$

($\rho\Delta V$ – маса об'єму; $\partial\xi/\partial t$ – його швидкість).

Розглянутий об'єм має також потенціальну енергію пружної деформації (див. (38.3):

$$\Delta W_p = \frac{E\varepsilon^2}{2} \Delta V = \frac{E}{2} \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} \right)^2 \Delta V$$

($\varepsilon = \partial\xi/\partial x$ – відносна деформація об'єму; E – модуль Юнга середовища). Фазова швидкість поширення пружної хвилі у стержні визначається співвідношенням $v = \sqrt{E/\rho}$. Виразимо модуль Юнга з цього співвідношення $E = \rho v^2$ (ρ – густина середовища). Тоді вираз для потенціальної енергії об'єму ΔV набуває вигляду

$$\Delta W_p = \frac{\rho v^2}{2} \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} \right)^2 \Delta V. \quad (38.5)$$

Сума виразів (38.4) і (38.5) дає повну енергію ΔW об'єму ΔV :

$$\Delta W = \Delta W_k + \Delta W_p = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} \right)^2 \right] \Delta V.$$

Розділивши цю енергію на ΔV , отримаємо густину енергії:

$$w = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (38.6)$$

Диференціювання рівняння (38.1) один раз за t , інший раз за x дає

$$\partial\xi/\partial t = -A\omega \sin(\omega t - kx + \alpha),$$

$$\partial\xi/\partial x = Ak \sin(\omega t - kx + \alpha).$$

Підставивши ці вирази у формулу (38.6) і врахувавши, що $k^2 v^2 = \omega^2$, отримуємо **густину енергії**, що виникає в пружному середовищі при поширенні в ній плоскої поздовжньої хвилі:

$$\boxed{w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha)}. \quad (38.7)$$

Можна показати, що для поперечної хвилі густина енергії визначається такою ж формулою, як і для поздовжньої. У випадку хвильових поверхонь будь-якої форми в межах малого об'єму хвилю можна приблизно вважати плоскою. Отже, вираз (38.7) є правильним для гармонічних хвиль будь-якого вигляду (сферичних, циліндричних і т.п.). Цей вираз є правильним також і для загасаючих хвиль.

З (38.7) випливає, що густина енергії в кожний момент часу в різних точках простору різна. В одній і тій самій точці густина енергії змінюється з часом за законом квадрата синуса. Середнє значення квадрата синуса дорівнює 1/2. Відповідно середнє за часом значення густини енергії в даній точці середовища дорівнює

$$\langle w \rangle = (1/2) \rho A^2 \omega^2. \quad (38.8)$$

Таким чином, густина енергії (38.7) і її середнє значення (38.8) пропорційні густині середовища ρ , квадрату амплітуди A й квадрату частоти ω хвилі.

§ 39 Вектор Умова. Інтенсивність [5]

1 Середовище, у якому поширюється пружна хвиля, має додаткову механічну енергію. Ця енергія передається від джерела коливань у різні точки середовища самою хвилею. Отже, хвиля переносить із собою енергію. *Кількість енергії, що переноситься хвилею через деяку поверхню за одиницю часу, називається **потокем енергії** через цю поверхню. Якщо через поверхню переноситься за час dt енергія dW , то потік енергії Φ дорівнює*

$$\Phi = dW / dt. \quad (39.1)$$

Потік енергії – скалярна величина, як випливає зі співвідношення (39.1), він вимірюється у системі СІ у ватах (1 Вт=1 Дж/с).

2 Перенесення енергії у різних точках простору може бути неоднаковим. Для характеристики перенесення енергії в різних точках простору використовується векторна величина, яка називається **густиною потоку енергії**. Ця величина чисельно дорівнює потоку енергії через одиничну площадку, яка розміщена в даній точці перпендикулярно до напрямку, у якому переноситься енергія. Напрямок вектора густини потоку енергії збігається з напрямком перенесення енергії.

Якщо через площадку ΔS_{\perp} , перпендикулярну до напрямку поширення хвилі, переноситься за час Δt енергія ΔW , то густина потоку енергії дорівнює

$$j = \frac{\Delta \Phi}{\Delta S_{\perp}} = \frac{\Delta W}{\Delta S_{\perp} \Delta t}. \quad (39.2)$$

Через площадку ΔS_{\perp} (рис. 39.1) буде перенесена за час Δt енергія ΔW , що знаходиться в об'ємі циліндра з основою ΔS_{\perp} й висотою $v\Delta t$: (v – фазова швидкість хвилі). Якщо ΔS_{\perp} й $v\Delta t$ достатньо малі, щоб густину енергії у всіх точках циліндра можна було вважати однаковою, то ΔW дорівнює добутку густини енергії w на об'єм циліндра $\Delta S_{\perp} v\Delta t$:

$$\Delta W = w \Delta S_{\perp} v \Delta t.$$

Підстановка цього виразу в (39.2) дає для модуля густини потоку енергії формулу

$$j = wv. \quad (39.3)$$

Нарешті, якщо ввести вектор \vec{v} , модуль якого дорівнює фазовій швидкості хвилі, а напрям збігається з напрямом поширення хвилі (і перенесення енергії), отримаємо

$$\vec{j} = w\vec{v}. \quad (39.4)$$

Ми отримали вираз для вектора густини потоку енергії. Для пружних хвиль цей вектор був уведений Н.О.Умовим і називається **вектором Умова**. У загальному випадку він є різним у різних точках простору, а в даній точці змінюється з часом за законом квадрата синуса. Його середнє значення дорівнює

$$\langle j \rangle = \langle w \rangle v = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 v. \quad (39.5)$$

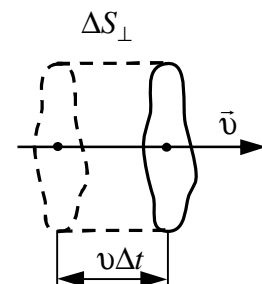


Рисунок 39.1 – Через площадку ΔS_{\perp} проходить за час Δt енергія, що знаходиться в циліндрі висотою $v\Delta t$

Вираз (39.5) є правильним для хвиль будь-якого типу (сферичних, загасаючих і т.д.). За визначенням під **інтенсивністю** хвилі в даній точці розуміють середнє за часом значення модуля вектора густини потоку енергії, що переноситься хвилею. Тому співвідношення (39.5) визначає інтенсивність хвилі (часто інтенсивність хвилі позначають через $I = \langle j \rangle$).

3 Якщо вектор \vec{j} є відомим у всіх точках довільної поверхні S , то можна обчислити потік енергії через цю поверхню. Розіб'ємо поверхню на елементарні ділянки dS . За час dt через площадку dS пройде енергія dW , що знаходиться в зображеному на рис. 39.2 косому циліндрі об'ємом $dV = v dt dS \cos \varphi$. У циліндрі міститься енергія $dW = w dV = w v dt dS \cos \varphi$ (w – миттєве значення густини енергії у тому місці, де розміщена площадка dS). Подамо енергію у вигляді

$$dW = j dt dS \cos \varphi = \vec{j} d\vec{S} dt$$

($d\vec{S} = dS \vec{n}$, $\vec{j} = w \vec{v}$). Звідси для потоку енергії $d\Phi$ через площадку dS отримуємо вираз

$$d\Phi = dW / dt = \vec{j} d\vec{S}. \quad (39.6)$$

Повний потік енергії через поверхню S дорівнює сумі елементарних потоків (39.6):

$$\Phi = \int_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (39.7)$$

Замінивши в цій формулі вектор \vec{j} його середнім за часом значенням, отримаємо середнє значення потоку енергії:

$$\langle \Phi \rangle = \int_S \langle \vec{j} \rangle d\vec{S}. \quad (39.8)$$

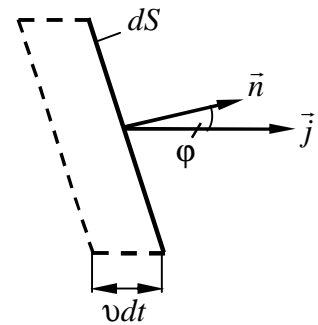


Рисунок 39.2 – До обчислення потоку енергії $d\Phi$ через площадку dS

4 Знайдемо середнє значення потоку енергії через одну із хвильових поверхонь незагасаючої сферичної хвилі. У кожній точці цієї сферичної поверхні вектори \vec{j} й $d\vec{S}$ збігаються за напрямом. Крім того, модуль вектора \vec{j} для всіх точок поверхні однаковий. Отже,

$$\langle \Phi \rangle = \oint_S \langle j \rangle dS = \langle j \rangle S = \langle j \rangle \cdot 4\pi r^2.$$

(r – радіус хвильової поверхні). Згідно з (39.5) $\langle j \rangle = (1/2)\rho A^2 \omega^2 v$. Тому

$$\langle \Phi \rangle = 2\pi r \omega^2 v A_r^2 r^2$$

(A_r – амплітуда хвилі на відстані r від джерела). Оскільки енергія хвилі не поглинається середовищем, середній потік енергії через сферу будь-якого радіуса повинен мати однакове значення, тобто повинна виконуватися умова

$$A_r^2 r^2 = const.$$

Звідси випливає, що амплітуда A_r незагасаючої сферичної хвилі обернено пропорційна відстані r від джерела $A_r = (1/r) \cdot \sqrt{const}$.

§ 40 Звукові хвилі та їх застосування. Висота, тембр та гучність звуку. Рівень гучності. Ефект Доплера для звукових хвиль [5]

1 Характеристики звуку. Якщо пружні хвилі в повітрі мають частоту в межах від 16 до 20000 Гц, то, досягнувши людського вуха, вони викликають відчуття звуку. Тому пружні хвилі в будь-якому середовищі, які мають частоту, що перебуває в зазначених межах,

називають **звуковими хвилями**, або просто **звуком**. Пружні хвилі із частотами, меншими 16 Гц, називаються **інфразвуком**, а із частотами, що перевищують 20000 Гц, – **ультразвуком**. Інфра- та ультразвук людське вухо не чує.

Люди розрізняють звуки за **висотою**, **тембром** та **гучністю**. Кожній із цих суб'єктивних оцінок відповідає певна фізична характеристика звукової хвилі.

Будь-який реальний звук є накладенням гармонічних коливань із певним набором частот. Цей набір називається **акустичним спектром звуку**. Якщо у звуці присутні коливання всіх частот, які перебувають у деякому інтервалі від ν' до ν'' , то спектр називається **суцільним**. Якщо звук складається з коливань дискретних частот ν_1, ν_2, ν_3 і т.д., то спектр називається **лінійчастим**. Суцільний акустичний спектр мають шуми. Коливання з лінійчастим спектром викликають відчуття звуку з більш-менш певною висотою. Такий звук називається **тональним**.

Висота тонального звуку визначається основною (найменшою) частотою. Відносна інтенсивність **обертонів** (тобто коливань із частотами ν_2, ν_3 й т.д.) визначає забарвлення, або **тембр** звуку. Різний спектральний склад звуків, які створюються різними музичними інструментами, дозволяє відрізнити на слух, наприклад, флейту від скрипки або рояля.

Як і для всякої хвилі, під інтенсивністю звуку розуміють середнє за часом значення густини потоку енергії, що несе із собою звукова хвиля. Для того щоб викликати звукове відчуття, хвиля повинна мати деяку мінімальну інтенсивність, яка називається **порогом чутності**. Порог чутності різний для різних людей і залежить від частоти звуку. Найбільш чутливе людське вухо до частот від 1000 до 4000 Гц. У цій області частот поріг чутності становить у середньому близько 10^{-12} Вт/м². При інших частотах поріг чутності лежить вище (див. рис. 40.1).

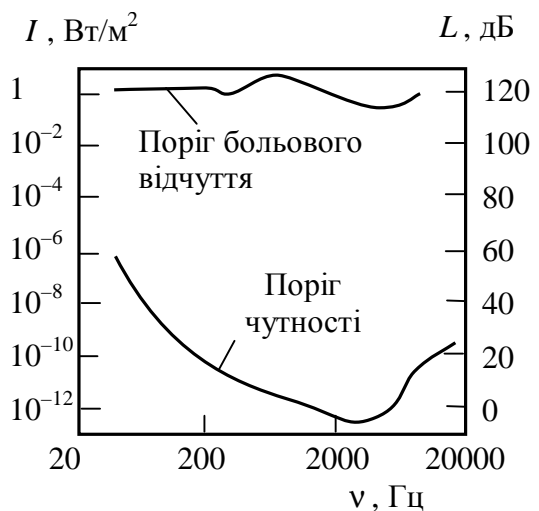
При інтенсивностях порядку 1-10 Вт/м² хвиля перестає сприйматися як звук, викликаючи у вусі лише відчуття болю й тиску. Значення інтенсивності, при якому це відбувається, називається **порогом болювого відчуття** (див. рис. 40.1; дані, які наведені на цьому рисунку, стосуються середнього нормального слуху).

Суб'єктивно оцінювана гучність звуку зростає набагато повільніше, ніж інтенсивність звукових хвиль. При зростанні інтенсивності в геометричній прогресії гучність зростає приблизно в арифметичній прогресії, тобто лінійно. Тому **рівень гучності** L визначається як логарифм відношення інтенсивності I даного звуку до інтенсивності I_0 , яка взята за вихідну:

$$L = \lg \frac{I}{I_0}. \quad (40.1)$$

Вихідну інтенсивність I_0 беруть такою, що дорівнює 10^{-12} Вт/м², так що поріг чутності при частоті порядку 1000 Гц перебуває на нульовому рівні ($L = 0$).

Одиниця рівня гучності, що визначається формулою (40.1), називається **белом** (Б). Зазвичай користуються в 10 разів меншою одиницею – **децибелом** (дБ). Значення L у децибелах визначається за формулою



3
Рисунок 40.1 – Залежність порога чутності (нижня крива) і порога болювого відчуття (верхня крива) від частоти звуку

цього рисунку, стосуються середнього

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \quad (40.2)$$

Відношення двох будь-яких інтенсивностей I_1 і I_2 також може бути виражене в децибелах:

$$L_{12} = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}. \quad (40.3)$$

За допомогою цієї формули можна виразити в децибелах зменшення інтенсивності (загасання) хвилі на деякому шляху. Наприклад, загасання в 20 дБ означає, що інтенсивність зменшується в 100 разів.

Діапазон інтенсивностей, при яких хвиля викликає в людському вусі звукове відчуття (від 10^{-12} до 10 Вт/м²), відповідає значенням рівня гучності від 0 до 130 дБ. Нижче наведені орієнтовні значення рівня гучності для деяких звуків:

Звук	Рівень гучності, дБ
Цокання годинника	20
Шепіт на відстані 1 м	30
Тиха розмова	40
Розмова середньої гучності	60
Голосна розмова	70
Крик	80
Шум двигуна літака на відстані 5 м	120
Шум двигуна літака на відстані 3 м	130

2 Ефект Доплера для звукових хвиль. Назвемо приймачем пристрій, який здатний сприймати звукові коливання середовища. Якщо джерело і приймач нерухомі відносно середовища, у якій поширюється хвиля, то частота коливань, яка сприймається приймачем, дорівнює частоті ν_0 коливань джерела. Якщо ж джерело або приймач або вони обоє рухаються, то частота ν , яка сприймається приймачем, може виявитися відмінною від ν_0 . Це явище називається *ефектом Доплера*.

Припустимо, що джерело і приймач рухаються вздовж прямої, яка їх з'єднує. Швидкість джерела $\nu_{дж}$ будемо вважати додатною, якщо воно рухається в напрямку до приймача, і від'ємною, якщо воно рухається в напрямку від приймача. Аналогічно швидкість приймача $\nu_{пр}$ будемо вважати додатною, якщо він рухається в напрямку до джерела, і від'ємною, якщо він рухається в напрямку від джерела.

Розглянемо процеси поширення хвилі за час Δt . Якщо джерело нерухоме й коливається із частотою ν_0 , то до моменту закінчення проміжку часу Δt , коли він буде завершувати $\nu_0 \cdot \Delta t$ коливання, яке створене першим коливанням, «гребінь» хвилі встигне пройти у середовищі шлях $\nu \cdot \Delta t$ (ν – швидкість поширення хвилі відносно середовища). Тому створені джерелом за час Δt $\nu_0 \cdot \Delta t$ «гребенів» і «впадин» хвилі вкладуться на довжині $\nu \cdot \Delta t$. Якщо ж джерело рухається відносно середовища зі швидкістю $\nu_{дж}$, то в момент, коли джерело буде завершувати $\nu_0 \cdot \Delta t$ коливання, «гребінь», створений першим коливанням, буде знаходитись від джерела на відстані $\nu - \nu_{дж}$ (рис. 40.2). Отже, $\nu_0 \cdot \Delta t$ «гребенів» і «впадин» хвилі вкладуться на відрізок $(\nu - \nu_{дж}) \cdot \Delta t$. Тому довжина хвилі (довжина, яка припадає у середньому на один «гребінь» або «впадину») буде дорівнювати

$$\lambda = \frac{(\nu - \nu_{дж}) \cdot \Delta t}{\nu_0 \cdot \Delta t} = \frac{\nu - \nu_{дж}}{\nu_0}. \quad (40.4)$$

Через нерухомий приймач за час Δt пройдуть «гребені» і «впадини», що укладаються на довжині $\nu \cdot \Delta t$. Якщо приймач рухається зі швидкістю $\nu_{пр}$, то наприкінці проміжку часу

Δt він буде сприймати «впадину», яка на початку цього проміжку знаходилась від його теперішнього положення на відстань $v \cdot \Delta t$. Таким чином, приймач сприйме за час Δt коливання, що відповідають «гребеням» і «впадинам», які вкладаються на довжині $(v + v_{np}) \cdot \Delta t$ (рис. 40.3), і число цих коливань буде дорівнює $v \cdot \Delta t$ або ж

$$v \cdot \Delta t = \frac{(v + v_{np}) \cdot \Delta t}{\lambda},$$

де λ – довжина звукової хвилі, що визначається формулою (40.4). Підставивши вираз (40.4), отримаємо формулу

$$v = v_0 \frac{v + v_{np}}{v - v_{дж}}. \quad (40.5)$$

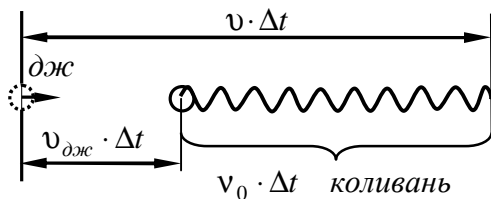


Рисунок 40.2 – Якщо джерело рухається в напрямку поширення хвилі відносно нерухомого середовища, то створені ним за час Δt $v_0 \cdot \Delta t$ «гребенів» і «впадин» хвилі укладаються на довжині, яка чисельно дорівнює $(v - v_{дж}) \cdot \Delta t$

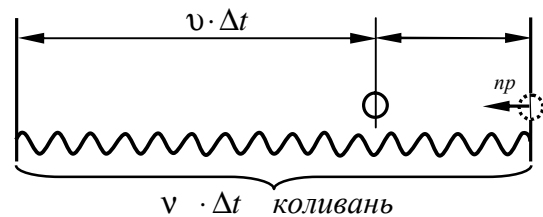


Рисунок 40.3 – Якщо приймач рухається назустріч хвилі відносно нерухомого середовища, то він сприймає за час Δt $v \cdot \Delta t$ «гребенів» і «впадин», що вкладаються на довжині, яка чисельно дорівнює $(v + v_{np}) \cdot \Delta t$

Із цієї формули випливає, що під час руху джерела й приймача, при якому відстань між ними зменшується, приймачем сприймається частота v , яка виявляється більшою за частоту джерела v_0 . Якщо відстань між джерелом і приймачем збільшується, v буде меншою за v_0 .

У випадку, коли напрями швидкостей $v_{дж}$ і v_{np} не збігаються з прямою, яка проходить через джерело й приймач, замість $v_{дж}$ і v_{np} у формулу (40.5) потрібно підставляти проекції векторів $v_{дж}$ і v_{np} на напрям цієї прямої.

Ефект Доплера для звукових хвиль визначається швидкостями руху джерела й приймача відносно середовища, у якому поширюється звукова хвиля. Для світлових хвиль також спостерігається ефект Доплера, однак формула для зміни частоти має інший вигляд ніж (40.5). Це обумовлено тим, що для світлових хвиль не існує матеріального середовища, коливання якого являли б собою світло. Тому швидкості джерела й приймача відносно «середовища» не мають змісту. У випадку світла можна говорити лише про відносну швидкість приймача й джерела. Ефект Доплера залежить від модуля й напрямку цієї швидкості.

§ 41 Стоячі хвилі [5]

1 При одночасному поширенні декількох хвиль коливання частинок середовища виявляються геометричною сумою коливань, які виконували б частинки при поширенні кожної із хвиль окремо. Отже, хвилі просто накладаються одна на одну, не збурюючи одна одну. Це твердження називається **принципом суперпозиції** (накладення) хвиль.

Принцип суперпозиції виконується, як правило, з великою точністю й порушується, тільки якщо амплітуда хвилі дуже велика. У цьому випадку виникають нелінійні ефекти,

зокрема порушується пропорційність між деформацією й напругою у середовищі (порушується закон Гука).

Якщо коливання, які обумовлені окремими хвилями в кожній із точок середовища, мають постійну різницю фаз, то хвилі називаються **когерентними**. При додаванні когерентних хвиль виникає явище **інтерференції**, що полягає в тому, що коливання в одних точках підсилюють, а в інших точках послаблюють одна одну.

Важливий випадок інтерференції спостерігається при накладенні двох зустрічних плоских хвиль із однаковою амплітудою. Коливальний процес, що виникає у результаті цього, називається **стоячою хвилею**.

2 Знайдемо рівняння стоячої хвилі. Напишемо рівняння двох плоских хвиль, що поширюються уздовж осі X у протилежних напрямках:

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - kx + \alpha_1), \quad \xi_2 = A \cos(\omega t + kx + \alpha_2).$$

Перетворивши суму цих виразів за формулою для суми косинусів

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right),$$

одержимо до рівняння стоячої хвилі

$$\xi = \xi_2 + \xi_1 = 2A \cos \left(kx + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \right) \cos \left(\omega t + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} \right). \quad (41.1)$$

Щоб спростити рівняння, виберемо початок відліку X так, щоб різниця $\alpha_2 - \alpha_1$ дорівнювала нулю, а початок відліку t – так, щоб дорівнювала нулю сума $\alpha_1 + \alpha_2$. Крім того, замінимо хвильове число k його значенням $2\pi/\lambda$. Тоді **рівняння стоячої хвилі** набуде вигляду

$$\xi = \left(2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \cos \omega t. \quad (41.2)$$

З рівняння (41.2) видно, що в кожній точці стоячої хвилі відбуваються гармонічні коливання тієї самої частоти, що й у зустрічних хвиль, причому амплітуда залежить від x :

$$\text{амплітуда} = \left| 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right|.$$

У точках, координати яких задовольняють умову

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (41.3)$$

амплітуда коливань максимальна. Ці точки називаються **пучностями** стоячої хвилі. З (41.3) знаходимо значення координат пучностей:

$$x_{\text{пучн}} = \pm n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (41.4)$$

Маємо на увазі, що пучність являє собою не точку, а площину, точки якої мають значення x , які визначені формулою (41.4).

У точках, координати яких задовольняють умову

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

амплітуда дорівнює нулю. Ці точки називаються **вузлами** стоячої хвилі. Точки середовища, що містяться у вузлах, коливань не здійснюють. Координати вузлів мають значення:

$$x_{\text{вузл}} = \pm \left(n \pm \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (41.5)$$

Вузол, як і пучність, являє собою не точку, а площину, точки якої мають значення координати x , що визначені формулою (41.5).

З (41.4) і (41.5) випливає, що відстань між сусідніми пучностями, так само як і відстань між сусідніми вузлами, дорівнює $\lambda/2$. Відстань між сусідніми вузлами (пучностями) називають **довжиною стоячої хвилі**. Таким чином, довжина стоячої хвилі дорівнює $\lambda/2$, де λ – довжина біжучої хвилі. Пучності та вузли зміщені один відносно одного на чверть довжини хвилі.

Множник $2A \cos(2\pi x/\lambda)$ при переході через нульове значення змінює знак, внаслідок чого фаза коливань у різних сторонах від вузла відрізняється на π . Це означає, що точки, які лежать у різних сторонах від вузла, коливаються в протилежних фазах. Усі точки, що знаходяться між двома сусідніми вузлами, коливаються синфазно (тобто в однаковій фазі). На рис. 41.1 наведено ряд «моментальних фотографій» відхилень точок від положень рівноваги. Перша з них відповідає моменту, коли відхилення досягли найбільшого значення. Наступні зроблені з інтервалами у чверть періоду.

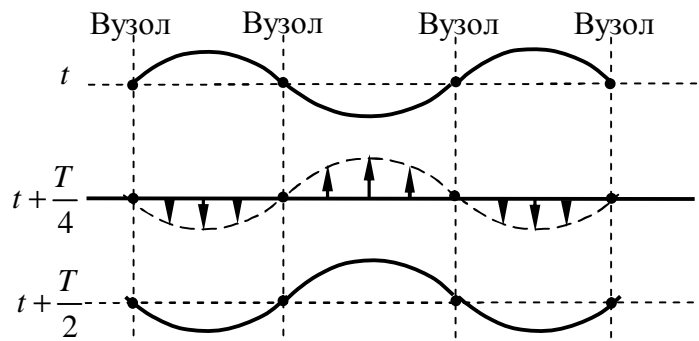


Рисунок 41.1 – По вертикалі відкладені відхилення частинок середовища від положення рівноваги у стоячій хвилі для моментів часу, що відрізняються на чверть періоду. Стрілками показані швидкості частинок

Вузли зміщення ніби розділяють стоячу хвилю на автономні області, у яких відбуваються незалежні гармонічні коливання. Ніякого передавання руху від однієї області до іншої, а отже, і перетікання енергії через вузли не відбувається. Інакше кажучи, немає ніякого поширення збурення вздовж хвилі. От чому збурювання, що подані виразом (41.2), називаються *стоячою хвилею*. Зазначимо ще, що у вузлах зміщення похідні $\partial\xi/\partial x$, тобто відносна деформація, є максимальною, а в пучностях зміщення $\partial\xi/\partial x = 0$. Тому вузли зміщення є пучностями деформації, а пучності зміщення – вузлами деформації.

3 У закріпленій з обох кінців натягнутій струні при збудженні поперечних коливань устанавлюється стояча хвиля, причому в місцях закріплення струни утворюються вузли. Тому в струні збуджуються з помітною інтенсивністю тільки такі коливання, половина довжини хвилі яких укладається на струні ціле число раз (див. рис. 41. 2). Звідси випливає умова

$$l = n \frac{\lambda}{2}, \text{ або } \lambda_n = \frac{2l}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (41.6)$$

(l – довжина струни). Цим довжинам хвиль відповідають частоти

$$\nu_n = \frac{\nu}{\lambda_n} = \frac{\nu}{2l} n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (41.7)$$

(ν – фазова швидкість хвилі, обумовлена силою натягу струни й масою одиниці довжини, тобто лінійною густиною струни).

Частоти ν_n називаються **власними частотами** струни. Вони є кратними частоті

$$\nu_1 = \nu / 2l,$$

яку називають **основною частотою**.

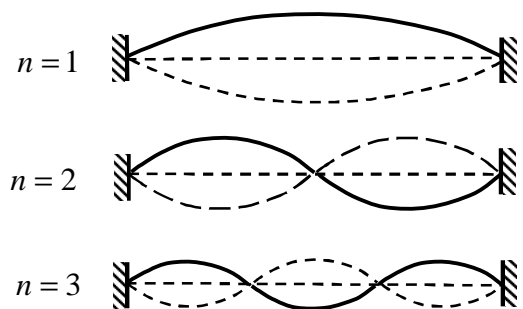


Рисунок 41.2 – Нормальні коливання (гармоніки) струни

Гармонічні коливання із частотами (41.7) називаються *власними, або нормальними, коливаннями*. Їх називають також *гармоніками*. У загальному випадку коливання струни являє собою накладення різних гармонік.

Колівання струни відзначаються тим, що для них із класичних уявлень отримуємо дискретні значення однієї з величин, що характеризує коливання (частоти). Для класичної фізики така дискретність є винятком. Для квантової фізики дискретність є швидше правилом, ніж винятком.

§ 42 Хвильовий пакет. Групова швидкість [5]

1 *Хвиля, що має форму короткого імпульсу («сплеску»), може бути розглянута як суперпозиція (накладення) гармонічних хвиль, частоти яких перебувають в деякому інтервалі $\Delta\omega$. Таке утворення називається **хвильовим пакетом** (або *групою хвиль*) (рис. 42.1). Рівняння хвильового пакета має вигляд*

$$\xi = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} A_\omega \cos(\omega t - k_\omega x + \alpha_\omega) d\omega,$$

де A_ω – амплітуда, що відповідає одиничному інтервалу частот; ω_0 – основна частота; $\Delta\omega$ – інтервал частот, поданих у пакеті. У межах пакета гармонічні хвилі, що його утворюють, в більшому або меншому ступені підсилюють одна одну. Поза пакетом ці хвилі практично гасять одна одну.

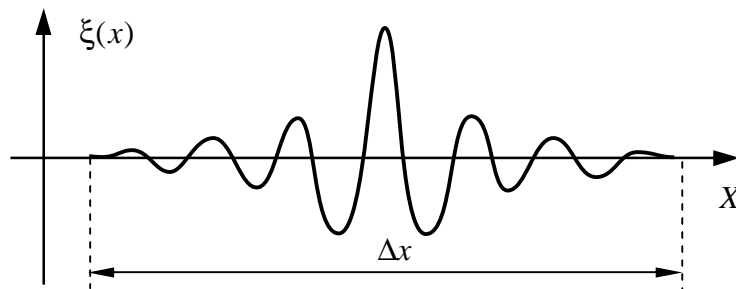


Рисунок 42.1 – Хвильовий пакет, який поширюється вздовж осі X : Δx – ширина пакета

Інтервалу частот $\Delta\omega$ відповідає інтервал хвильових чисел Δk . Із розрахунку випливає, що ширина пакета Δx пов'язана з інтервалом хвильових чисел Δk співвідношенням

$$\Delta x \cdot \Delta k = 2\pi. \quad (42.1)$$

Відомо, що фазова швидкість хвилі визначається співвідношенням

$$v = \omega / k. \quad (42.2)$$

Звідси випливає, що чим більше $\Delta\omega$, тим більше Δk . Таким чином, чим вужче хвильовий пакет, тим більшим повинен бути інтервал частот гармонічних хвиль, поданих у пакеті.

2 *Знайдемо швидкість поширення центра хвильового пакета. При додаванні біжучих хвиль різної частоти потрібно мати на увазі можливість **дисперсії хвиль**, тобто залежності фазової швидкості гармонічної хвилі від частоти ω (або, що те ж саме, від довжини хвилі λ).*

Дисперсія, як правило, характеризується *дисперсійним співвідношенням*

$$k = k(\omega) = \omega / v(\omega), \quad (42.3)$$

де k – хвильове число; $v(\omega)$ – фазова швидкість. Для хвиль, які поширюються в недиспергуючих середовищах, швидкість v не залежить від частоти, і k є пропорційним до ω . Для диспергуючих середовищ k залежить від ω за нелінійним законом.

За умови відсутності дисперсії всі хвилі, що утворюють пакет, поширюються з однаковою фазовою швидкістю. Очевидно, що з такою самою швидкістю переміщується й хвильовий пакет, причому форма його не змінюється. Можна показати, що в диспергуючому середовищі пакет із часом розпливається – ширина його збільшується. Якщо дисперсія невелика, розпливання пакета відбувається не занадто швидко. У цьому випадку пакету можна «приписати» швидкість u , під якою розуміємо швидкість переміщення центра пакета, тобто точки з максимальним значенням амплітуди. Цю швидкість називають *груповою*.

У диспергуючих середовищах групова швидкість виявляється відмінною від фазової. Покажемо це на прикладі накладення двох хвиль із частотами $\omega_0 - \Delta\omega/2$ й $\omega_0 + \Delta\omega/2$ (відповідно із хвильовими числами $k_0 - \Delta k/2$ й $k_0 + \Delta k/2$). Амплітуди хвиль будемо вважати однаковими. У цьому випадку рівняння результуючої хвилі має вигляд

$$\xi = A \cos[(\omega_0 - \Delta\omega/2)t - (k_0 - \Delta k/2)x] + A \cos[(\omega_0 + \Delta\omega/2)t - (k_0 + \Delta k/2)x].$$

Скориставшись формулою для суми косинусів, перетворимо цей вираз:

$$\xi = 2A \cos[(\Delta\omega/2)t - (\Delta k/2)x] \cos(\omega_0 t - k_0 x).$$

Отриманий вираз можна розглядати як рівняння біжучої гармонічної хвилі з амплітудою, що змінюється за законом

$$\text{амплітуда} = 2A \cos[(\Delta\omega/2)t - (\Delta k/2)x].$$

Максимальне значення амплітуди отримуємо за умови, коли величина, яка стоїть під знаком косинуса, дорівнює нулю. Звідси випливає, що координата x_m центра хвильового пакета в момент часу t визначається зі співвідношення

$$(\Delta\omega/2)t - (\Delta k/2)x_m = 0.$$

Розділивши x_m на t , знайдемо швидкість переміщення центра хвильового пакета, тобто групову швидкість:

$$u = x_m / t = \Delta\omega / \Delta k.$$

У випадку накладення хвиль із неперервним набором частот *групова швидкість визначається виразом*

$$\boxed{u = d\omega / dk} \quad (42.4)$$

(порівняйте з формулою (42.2)).

Замінивши згідно з (42.2) ω через $v \cdot k$, вираз (42.4) можна подати у вигляді

$$u = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} = v + k \frac{dv}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk}. \quad (42.5)$$

За визначенням $k = 2\pi/\lambda$, тобто $\lambda = 2\pi/k$. Отже, $d\lambda/dk = -2\pi/k^2 = -\lambda/k$. Підстановка цього значення $d\lambda/dk$ в (42.5) приводить до формули

$$\boxed{u = v - \lambda(dv/d\lambda)}. \quad (42.6)$$

За умови відсутності дисперсії $dv/d\lambda = 0$ і $u = v$. Формула (42.6) дозволяє знайти групову швидкість u за відомою залежністю фазової швидкості v від довжини хвилі λ .

Енергія хвилі пропорційна квадрату амплітуди. Тому швидкість перенесення енергії хвилі дорівнює груповій швидкості.

Слід мати на увазі, що поняття групової швидкості можна застосовувати тільки за умови, коли поглинання енергії хвилі в даному середовищі невелике. При значному загасанні хвилі поняття групової швидкості втрачає свій зміст.

§ 43 Хвильове рівняння для електромагнітної хвилі. Фазова швидкість поширення електромагнітної хвилі [5]

1 З рівнянь Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (43.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (43.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (43.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (43.4)$$

впливає, що змінні електричне й магнітне поля взаємно створюють одне одного: *змінне магнітне поле створює електричне (див. рівняння (43.1)), змінне електричне поле створює магнітне (див. рівняння (43.3))*. Таким чином, якщо збудити за допомогою коливальних електричних зарядів змінне електромагнітне поле, то в просторі виникає послідовність взаємних перетворень електричного й магнітного полів, які поширюються від точки до точки. Цей процес буде періодичним і у часі, і у просторі і, отже, є хвилею.

2 Покажемо, що існування електромагнітних хвиль впливає з рівнянь Максвелла (43.1)–(43.4). Виконаємо це на прикладі плоскої хвилі, що поширюється в однорідному й ізотропному нейтральному ($\rho = 0$) непровідному ($j = 0$) середовищі з сталими проникностями ϵ й μ .

Спрямуємо вісь X перпендикулярно до хвильових поверхонь. Тоді вектори \vec{E} і \vec{H} , а отже, і їх проекції на координатні осі не будуть залежати від координат y і z . Тому рівняння (43.1)–(43.4) спрощуються:

$$0 = \mu_0 \mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu_0 \mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad (43.5)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \mu_0 \mu \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0, \quad (43.6)$$

$$0 = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon_0 \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}, \quad (43.7)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0. \quad (43.8)$$

Перше з рівнянь (43.7) і рівняння (43.8) показують, що E_x не залежить ні від t , ні від x . Перше з рівнянь (43.5) і рівняння (43.6) дають такий самий результат для H_x . Отже, відмінні від нуля E_x та H_x можуть бути обумовлені тільки сталими однорідними полями, що накладаються на електромагнітне поле хвилі. Саме ж поле хвилі не має складових уздовж осі X . Це означає, що вектори \vec{E} та \vec{H} перпендикулярні до напрямку поширення хвилі, тобто електромагнітні хвилі є поперечними. Надалі ми будемо вважати постійні поля відсутніми: $E_x = H_x = 0$.

Два останніх рівняння (43.5) і два останніх рівняння (43.7) можна об'єднати у дві взаємно незалежні групи:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon_0 \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad (43.9)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu_0 \mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}. \quad (43.10)$$

Перша група рівнянь зв'язує компоненти E_y та H_z , друга – компоненти E_z та H_y . Для розгляду плоскої електромагнітної хвилі досить узяти одну із систем рівнянь (43.9) або (43.10), вважаючи проєкції, що фігурують в іншій системі, такими, що дорівнюють нулю.

Візьмемо для опису хвилі рівняння (43.9), поклавши $E_z = H_y = 0$. Продиференціюємо перше рівняння за змінною x й виконаємо заміну: $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial H_z}{\partial x}$. Підставивши потім

$\frac{\partial H_z}{\partial x}$ із другого рівняння, отримаємо для E_y рівняння

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}}. \quad (43.11)$$

Продиференціюємо за змінною x друге з рівнянь (43.9), знайдемо після аналогічних перетворень рівняння для H_z :

$$\boxed{\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}}. \quad (43.12)$$

Слід мати на увазі, що рівняння (43.11) і (43.12) повинні розглядатися спільно, тому що вони отримані з рівнянь (43.9), кожне з яких містить і \vec{E} , і \vec{H} .

Рівняння (43.11) і (43.12) є типовими хвильовими рівняннями. Будь-яка функція, що задовольняє таке рівняння, описує деяку хвилю, причому корінь квадратний з величини, оберненої коефіцієнту при похідній за часом, дає фазову швидкість цієї хвилі. Отже, рівняння (43.11) і (43.12) показують, що електромагнітні поля можуть існувати у вигляді електромагнітних хвиль, фазова швидкість яких дорівнює

$$\boxed{v = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu} = c / \sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (43.13)$$

У співвідношенні (43.13) ввели позначення $c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. Розрахунки показують, що за своєю розмірністю та числовим значенням вищенаведена величина c є швидкістю світла у вакуумі. Таким чином, у вакуумі (тобто при $\epsilon = \mu = 1$) швидкість електромагнітних хвиль збігається зі швидкістю світла c .

§ 44 Напруженість електричних і магнітних полів у лінійно поляризованій електромагнітній хвилі [5]

13 рівнянь Максвелла для плоскої хвилі, що поширюється в однорідному й ізотропному нейтральному ($\rho = 0$) непровідному ($j = 0$) середовищі з сталими проникностями ϵ та μ , впливає (вісь X напрямлена перпендикулярно до хвильових поверхонь):

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon_0 \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (44.1)$$

Цю систему рівнянь неважко перетворити до такого вигляду:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad (44.2)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \quad (44.3)$$

Рівняння (44.2) і (44.3) є типовими хвильовими рівняннями. Знайдемо розв'язок цих рівнянь. Як відомо, будь-яка функція, що задовольняє таке рівняння, описує деяку хвилю, причому

корінь квадратний з величини, оберненої коефіцієнту при похідній за часом, дає фазову швидкість цієї хвилі

$$v = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon\mu} = c/\sqrt{\epsilon\mu}. \quad (44.4)$$

У співвідношенні (44.4) ввели позначення $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Розрахунки показують, що за своєю розмірністю та числовим значенням вищенаведена величина c є швидкістю світла у вакуумі. Таким чином, у вакуумі (тобто при $\epsilon = \mu = 1$) швидкість електромагнітних хвиль збігається зі швидкістю світла c .

Розв'язками рівнянь (44.2) й (44.3) є функції

$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha_1), \quad (44.5)$$

$$H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha_2). \quad (44.6)$$

У цих формулах ω – частота хвилі; k – хвильове число, що дорівнює ω/v (v – фазова швидкість, що визначається (44.4)); α_1 і α_2 – початкові фази коливань у точках з координатою $x = 0$.

Підстановка функцій (44.5) і (44.6) у рівняння (44.1) приводить до співвідношень

$$kE_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1) = \mu_0\mu\omega H_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2),$$

$$kH_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2) = \epsilon_0\epsilon\omega E_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1).$$

Для того щоб ці співвідношення задовольнялися при будь-яких значеннях t і x , необхідно, щоб початкові фази α_1 і α_2 були однаковими. Крім того, повинні виконуватися рівності

$$kE_m = \mu_0\mu\omega H_m, \quad \epsilon_0\epsilon\omega E_m = kH_m.$$

Перемноживши ці рівності, знайдемо, що

$$\epsilon_0\epsilon E_m^2 = \mu_0\mu H_m^2. \quad (44.7)$$

Таким чином, коливання електричного й магнітного векторів відбуваються з однаковою фазою ($\alpha_1 = \alpha_2$), а амплітуди цих векторів пов'язані співвідношенням

$$E_m \sqrt{\epsilon_0\epsilon} = H_m \sqrt{\mu_0\mu}. \quad (44.8)$$

Помноживши рівняння (44.5) на орт осі Y ($E_y \vec{e}_y = \vec{E}$), а рівняння (44.6) на орт осі Z ($H_z \vec{e}_z = \vec{H}$), отримаємо рівняння плоскої електромагнітної хвилі у векторному вигляді:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - kx), \\ \vec{H} = \vec{H}_m \cos(\omega t - kx) \end{cases} \quad (44.9)$$

(ми взяли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$). Таким чином, амплітуди напруженості електричного та магнітного в плоскій електромагнітній хвилі пов'язані між собою співвідношенням (44.8), миттєві значення – виразом (44.9).

2 Виходячи з (44.9), побудуємо розподіл напруженості електричного і магнітного полів як функції координати x для деякого фіксованого моменту часу (див. рис. 44.1). З рис. 44.1 випливає, що вектори \vec{E} та \vec{H} утворюють із напрямом поширення хвилі правогвинтову систему. У фіксованій точці простору вектори \vec{E} та \vec{H} змінюються з часом за гармонічним законом.

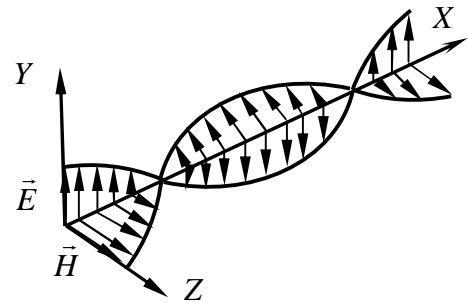


Рисунок 44.1 – «Моментальна фотографія» плоскої електромагнітної хвилі, що поширюється вздовж осі X . Вектор \vec{E} коливається вздовж осі Y , вектор \vec{H} – уздовж осі Z . Із часом вся картина переміщується в напрямку осі X з фазовою швидкістю хвилі v

Вони одночасно збільшуються від нуля, потім через $1/4$ періоду досягають найбільшого значення, причому якщо \vec{E} напрямлено вгору, то \vec{H} напрямлений вправо (дивимось вздовж напрямку поширення хвилі). Ще через $1/4$ періоду обидва вектори одночасно перетворюються в нуль. Потім знову досягають найбільшого значення, але цього разу \vec{E} напрямлений вниз, а \vec{H} вліво. І, нарешті, на завершненні періоду коливання вектори знову перетворюються в нуль. Такі зміни векторів \vec{E} і \vec{H} відбуваються у всіх точках простору, але зі зміщенням за фазою, яка обумовлена відстанню між точками вздовж осі X .

3 Максвелл передбачив теоретично існування електромагнітних хвиль ще у 1865 р. Перші досліди з невидимими електромагнітними хвилями були здійснені Г. Герцем у 1888 р. Для випромінювання хвиль Герц застосував винайдений ним вібратор, що складається із двох стержнів, розділених іскровим проміжком (рис. 44.2). При подачі на вібратор високої напруги від індукційної котушки у проміжку проскакувала іскра. Вона закорочувала проміжок, і у вібраторі виникали загасаючі електричні коливання. За час горіння іскри встигала відбутися велика кількість коливань, що створювала цуг електромагнітних хвиль, довжина яких приблизно у два рази перевищувала довжину вібратора. Приймання хвиль Герц здійснював за допомогою такого самого вібратора (без індуктора) з невеликим іскровим проміжком посередині. При розміщенні такого вібратора паралельно вектору напруженості електричного поля хвилі в ньому збуджувалися коливання струму й напруги. Оскільки довжина вібратора вибиралася такою, що дорівнювала $\lambda/2$, коливання у ньому внаслідок резонансу досягали такої інтенсивності, що викликали проскакування в іскровому проміжку невеликих іскор. Спостереження цих невеликих іскор свідчило про наявність у даній точці простору електромагнітної хвилі.

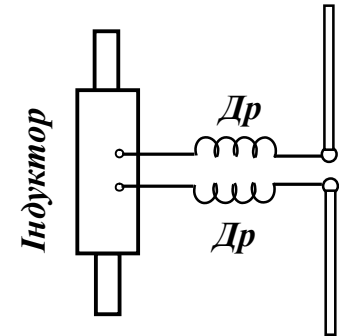


Рисунок 44.2 – Вібратор Герца, підключений через дроселі Dr до індукційної котушки. Дроселі запобігали проходженню високочастотного струму в обмотці індуктора

§ 45 Вектор Пойтінга [5]

1 Поширення будь-якої хвилі пов'язане з перенесенням енергії. Електромагнітні хвилі також переносять енергію. За умови відсутності дисперсії швидкість перенесення енергії дорівнює фазовій швидкості v , і густину потоку енергії можна отримати, помноживши густину енергії w на v (тут використали формулу для вектора Умова). У випадку електромагнітних хвиль вектор густини потоку енергії прийнято позначати буквою \vec{S} . Отже, модуль вектора \vec{S} дорівнює

$$S = wv. \quad (45.1)$$

Густина енергії електромагнітного поля складається із густини енергії електричного поля й густини енергії магнітного поля:

$$w = w_E + w_H = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (45.2)$$

У вакуумі та у невідомому середовищі вектори \vec{E} і \vec{H} змінюються в кожній точці простору в однаковій фазі. Тому співвідношення між амплітудами напруженості електричного й магнітного полів справедливо й для їх миттєвих значень:

$$E\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} = H\sqrt{\mu_0 \mu}.$$

Тому можна написати, що

$$\frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{EH}{2} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu} = \frac{EH}{2c} \sqrt{\epsilon \mu} = \frac{EH}{2v},$$

де v – фазова швидкість хвилі ($\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$; c – швидкість світла у вакуумі; $c/\sqrt{\epsilon \mu} = v$).

Таким чином, вираз (45.2) можна подати у вигляді

$$w = \frac{EH}{v}.$$

Помноживши знайдений вираз для w на швидкість хвилі v , отримаємо модуль густини потоку енергії:

$$S = wv = EH. \quad (45.3)$$

Вектори \vec{E} та \vec{H} взаємно перпендикулярні й утворюють із напрямом поширення хвилі правоюгвинтову систему. Тому напрям вектора $[\vec{E} \times \vec{H}]$ збігається з напрямом перенесення енергії, а модуль цього вектора дорівнює EH . Отже, *вектор густини потоку електромагнітної енергії можна подати як векторний добуток \vec{E} і \vec{H}* :

$$\boxed{\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}]}. \quad (45.4)$$

Вектор \vec{S} називається **вектором Пойтінга**.

Оскільки вектори \vec{E} та \vec{H} змінюються з часом за законом косинуса, модуль вектора Пойтінга в кожній точці змінюється за законом квадрата косинуса. За період \vec{S} двічі досягає максимального значення й двічі дорівнює нулю. Середнє за період значення модуля \vec{S} дорівнює $EH/2$.

§ 46 Випромінювання диполя [5]

1 Найпростішою системою, що випромінює електромагнітні хвилі, є коливальний електричний диполь. Прикладом такої системи може бути нерухомий точковий заряд $+q$ і точковий заряд $-q$, який коливається біля нього (рис. 46.1).

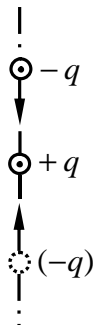


Рисунок 46.1 – Електричний диполь, який утворений нерухомим зарядом $+q$ і зарядом $-q$, який коливається біля нього

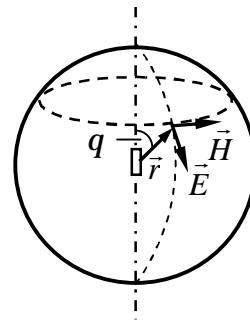


Рисунок 46.2 – Структура електромагнітної хвилі у хвильовій зоні

Дипольний електричний момент цієї системи змінюється з часом за законом

$$\vec{p} = -q\vec{r} = -ql\vec{e} \cos \omega t = -\vec{p}_m \cos \omega t, \quad (46.1)$$

де \vec{r} – радіус-вектор заряду $-q$; l – амплітуда коливань; \vec{e} – одиничний вектор, який напрямлений уздовж осі диполя; $\vec{p}_m = -ql\vec{e}$.

2 Розглянемо випромінювання диполя, розміри якого малі порівнянно з довжиною хвилі ($l \ll \lambda$). Такий диполь називається **елементарним**. У безпосередній близькості від диполя картина електромагнітного поля дуже складна. Вона сильно спрощується у так званій **хвильовій зоні диполя**, яка починається на відстані r , що значно перевищує довжину хвилі

($r \gg \lambda$). Якщо хвиля поширюється в однорідному й ізотропному середовищі, то хвильові поверхні у хвильовій зоні мають сферичну форму (рис. 46.2). Вектори \vec{E} та \vec{H} у кожній точці перпендикулярні до променя, тобто до радіуса-вектора, який проведено в дану точку із центра диполя.

Назвемо переріз хвильових поверхонь площинами, що проходять через вісь диполя, меридіанами, а площинами, які перпендикулярні до осі диполя, – паралелями. Тоді можна сказати, що вектор \vec{E} у кожній точці хвильової зони напрямлений за дотичною до меридіана, а вектор \vec{H} – за дотичною до паралелі. Якщо дивитися вздовж променя, то картина хвилі буде такою самою, як на рис. 80.1, з тією відмінністю, що амплітуда при переміщенні вздовж променя поступово зменшується.

У кожній точці вектори \vec{E} та \vec{H} коливаються за законом $\cos(\omega t - kr)$. Амплітуди E_m та H_m залежать від відстані r до випромінювача й від кута θ між напрямом радіуса-вектора \vec{r} й віссю диполя (див. рис. 46.2). Для вакууму ця залежність має вигляд

$$E_m \sim H_m \sim \frac{1}{r} \sin \theta.$$

Середнє значення густини потоку енергії $\langle S \rangle$ пропорційно добутку $E_m H_m$, отже,

$$\langle S \rangle \sim \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta. \quad (46.2)$$

Із цієї формули випливає, що інтенсивність хвилі змінюється вздовж променя (при $\theta = \text{const}$) обернено пропорційно квадрату відстані від випромінювача. Крім того, вона залежить від кута θ . Сильніше всього випромінює диполь у напрямках, що перпендикулярні до його осі ($\theta = \pi/2$). У напрямку осі ($\theta = 0$ і π) диполь не випромінює. Залежність інтенсивності випромінювання від кута θ наочно зображується за допомогою **діаграми спрямованості диполя** (рис. 46.3).

Теоретичний розрахунок показує, що **потужність випромінювання диполя P** (тобто енергія, яка випромінюється в усіх напрямках за одиницю часу) **пропорційна квадрату другої похідної дипольного моменту за часом:**

$$P \sim \ddot{p}^2. \quad (46.3)$$

Відповідно до формули (46.1) $\ddot{p} = p_m^2 \omega^4 \cos^2 \omega t$. Підстановка цього значення у (46.3) дає

$$P \sim p_m^2 \omega^4 \cos^2 \omega t. \quad (46.4)$$

Провівши усереднення цього виразу за часом, отримаємо

$$\langle P \rangle \sim p_m^2 \omega^4. \quad (46.5)$$

Таким чином, середня потужність випромінювання диполя пропорційна квадрату амплітуди електричного моменту диполя й четвертого ступеня частоти. Тому при малій частоті випромінювання електричних систем (наприклад, ліній передачі змінного струму промислової частоти) буває незначним.

Згідно з(46.1) $\ddot{p} = -q\ddot{r} = -q\ddot{a}$, де \ddot{a} – прискорення коливального заряду. Підстановка цього виразу для \ddot{p} у формулу (46.3) приводить до того, що потужність випромінювання пропорційна квадрату заряду й квадрату його прискорення:

$$P \sim q^2 a^2. \quad (46.6)$$

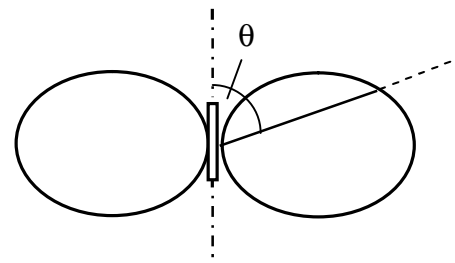


Рисунок 46.3 – Діаграма спрямованості випромінювання диполя. Відрізок, що відтинається діаграмою на промені, характеризує інтенсивність випромінювання у даному напрямку. Повну «діаграму» отримаємо, коли надамо пелюсткам обертання навколо осі диполя

Ця формула визначає потужність випромінювання не тільки під час коливань, але й під час довільного руху заряду. **Будь-який заряд, що рухається із прискоренням, збуджує електромагнітні хвилі, причому потужність випромінювання пропорційна квадрату заряду й квадрату прискорення.**

Заряд, що виконує гармонічні коливання, випромінює монохроматичну хвилю із частотою, що дорівнює частоті коливання заряду. Якщо ж прискорення заряду \ddot{a} змінюється не за гармонічним законом, випромінювання складається з набору хвиль різних частот.

§ 47 Ефект Доплера для електромагнітних хвиль [5]

1 Електромагнітні хвилі поширюються у вакуумі зі швидкістю світла. *В різних інерційних системах відліку швидкість електромагнітної хвилі однакова, вона не залежить від швидкості його джерела.* Це твердження є наслідком електромагнітної теорії Максвелла, воно експериментально перевірено. У спеціальній теорії відносності це твердження прийнято за один із основних постулатів. Однак у різних інерційних системах відліку такі параметри електромагнітної хвилі, як частота, довжина хвилі, напруженість електричного і магнітного полів мають різні значення. *Зміну частоти електромагнітної хвилі при переході від однієї системи відліку до іншої називають ефектом Доплера для електромагнітних хвиль.*

Як відомо, не існує особливого матеріального середовища, коливання якого являли собою електромагнітну хвилю (такого, як повітря, коливання якого є звуковою хвилею). Тому зміна частоти електромагнітних (світлових) хвиль визначається лише відносною швидкістю джерела та приймача і описується таким співвідношенням:

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - v \cdot \cos \theta / c}, \quad (47.1)$$

де ω – частота електромагнітної хвилі у системі, яка пов'язана з приймачем; ω_0 – частота електромагнітної хвилі у системі, яка пов'язана з джерелом; v – модуль відносної швидкості джерела світла S відносно приймача P (див. рис. 47.1); θ – кут у системі відліку, яка пов'язана приймачем, між напрямом руху джерела електромагнітної хвилі та лінією, яка з'єднує джерело і приймач (див. рис. 47.1); c – швидкість світла.

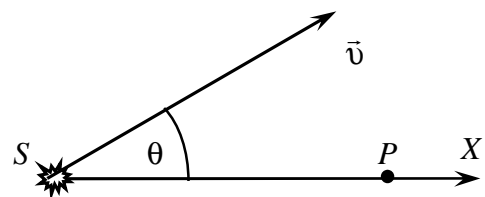


Рисунок 47.1

Формула (47.1) описує ефект Доплера для електромагнітних хвиль у загальному випадку. Крім цього розрізняють **поздовжній ефект Доплера**, коли джерело світла (електромагнітних хвиль) рухається вздовж лінії, яка з'єднує джерело S і приймач P , ($\theta = 0$ або $\theta = \pi$) та **поперечний ефект Доплера**, коли $\theta = \pi/2$.

Для поздовжнього ефекту Доплера, виходячи з (47.1), можемо записати

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 \pm v/c}. \quad (47.2)$$

Знак «-» у знаменнику формули (47.2) відповідає випадку, коли джерело і приймач зближуються ($\theta = 0$). Знак «+» – коли джерело і приймач віддаляються ($\theta = \pi$). Бачимо, що у випадку релятивістських швидкостей, коли джерело і приймач зближуються, має місце суттєве підвищення частоти електромагнітної хвилі:

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - v/c} = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + (v/c)}{1 - (v/c)}} \gg \omega_0, \text{ коли } (1 - (v/c)) \ll 1. \quad (47.3)$$

Для поперечного ефекту Доплера ($\theta = \pi/2$), виходячи з (47.1), можемо записати

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}. \quad (47.4)$$

РОЗДІЛ 3 ХВИЛЬОВА ОПТИКА

ТЕМА 7 ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ СВІТЛА

§ 48 Інтерференція монохроматичного світла від двох джерел. Умови, при яких спостерігається інтерференція монохроматичного світла. Умови інтерференційного мінімуму й максимуму [5]

Попередні відомості

1 Оптикою називається розділ фізики, що вивчає властивості й взаємодію з речовиною світла, тобто електромагнітних хвиль, довжина яких лежить у межах від 1 до 105 нм, що охоплює ультрафіолетову, видиму й інфрачервону області спектра.

Світло є складним явищем: в одних випадках воно веде себе як електромагнітна хвиля, в інших – як потік особливих частинок (фотонів). Така властивість називається **корпускулярно-хвильовим дуалізмом** (корпускула – частинка, дуалізм – подвійність). У цьому розділі будемо розглядати хвильову оптику, тобто коло явищ, в основі яких лежить хвильова природа світла.

Довжина хвилі видимого світла знаходиться у межах

$$\lambda_0 = 400 - 760 \text{ нм.} \quad (48.1)$$

Ультрафіолетовим називається випромінювання з довжиною хвилі, меншою за 400 нм, інфрачервоним – випромінювання з довжиною хвилі, більшою за 760 нм.

2 Відношення швидкості c світлової хвилі у вакуумі до фазової швидкості v в деякому середовищі називається абсолютним показником заломлення цього середовища й позначається буквою n :

$$n = c / v. \quad (48.2)$$

Порівняння з формулою для швидкості електромагнітної хвилі дає, що $n = \sqrt{\epsilon\mu}$. Для переважної більшості прозорих речовин μ практично не відрізняється від одиниці. Тому можна вважати, що

$$n = \sqrt{\epsilon}. \quad (48.3)$$

Ця формула зв'язує оптичні властивості речовини з його електричними властивостями.

Показник заломлення характеризує **оптичну густину середовища**. Середовище з більшим n називається оптично більш густим, ніж середовище з меншим n .

3 Значення довжин хвиль (48.1) належить до світлових хвиль у вакуумі. У речовині довжина світлових хвиль інша. У випадку коливань частоти ν довжина хвилі у вакуумі дорівнює $\lambda_0 = c / \nu$. У середовищі, у якому фазова швидкість світлової хвилі $v = c / n$, довжина хвилі має значення $\lambda = v / \nu = c / (n\nu) = \lambda_0 / n$. Отже, довжина λ світлової хвилі у середовищі з показником заломлення n пов'язана з довжиною λ_0 хвилі у вакуумі співвідношенням

$$\lambda = \lambda_0 / n. \quad (48.4)$$

4 Найпростіші оптичні явища (виникнення тіні, отримання зображень в оптичних приладах тощо) можна зрозуміти з геометричної оптики. Геометрична оптика базується на 4 законах: 1) закон прямолінійного поширення світла; 2) закон незалежності світлових променів; 3) закон відбиття; 4) закон заломлення.

Закон прямолінійного поширення стверджує, що в однорідному середовищі світло поширюється прямолінійно.

Закон незалежності світлових променів стверджує, що промені при перетинанні не збурюють один одного. Перетинання променів не заважають кожному з них поширюватися незалежно один від одного.

Закон відбиття світла стверджує, що *відбитий промінь лежить в одній площині з падаючим променем і нормаллю до відбивної поверхні у точці падіння; кут відбивання α дорівнює куту падіння β* (див. рис. 48.1):

$$\alpha = \beta.$$

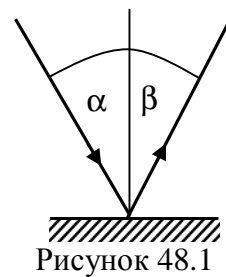


Рисунок 48.1

Закон заломлення світла стверджує, що *заломлений промінь лежить в одній площині з падаючим променем і нормаллю до поверхні розділу середовищ, проведеною у точку падіння; відношення синуса кута падіння до синуса кута заломлення є величина стала для даних речовин* (див. рис. 48.2):

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n_{12},$$

де $n_{12} = n_2/n_1$ – *відносний показник заломлення* другого середовища відносно першого.

5 Дія світла на людське око залежить від довжини (частоти) хвилі. Для характеристики світла з урахуванням його здатності викликати зорові відчуття вводяться *фотометричні величини*: світловий потік, освітленість, яскравість, сила світла.

6 В електромагнітній хвилі коливаються вектори \vec{E} та \vec{H} . Дослід показує, що фізіологічна, фотохімічна, фотоелектрична й інша дії світла викликаються коливаннями електричного вектора. Відповідно до цього говорять про *світловий вектор*, маючи на увазі вектор напруженості електричного поля.

Амплітуду світлового коливання ми будемо позначати, як правило, буквою A (іноді E_m). Відповідно зміна у часі й просторі проекції світлового вектора на напрям, уздовж якого він коливається, описується рівнянням

$$E = A \cos(\omega t - kr + \alpha). \quad (48.5)$$

Тут k – хвильове число; r – відстань, яка відлічується вздовж напрямку поширення світлової хвилі. Для плоскої хвилі, що поширюється в непоглинаючому світло середовищі, $A = const$, для сферичної хвилі A зменшується як $1/r$.

7 Частота видимих світлових хвиль знаходиться у межах

$$\nu = (0,39 - 0,75) \cdot 10^{15} \text{ Гц}. \quad (48.6)$$

Частота зміни амплітуди, енергії світлової хвилі є дуже високою. Ні око, ні будь-який інший приймач світлової енергії не можуть прослідкувати за дуже швидкими змінами, внаслідок чого вони реєструють усереднений за часом потік енергії. Модуль середнього за часом значення густини потоку енергії, що переноситься світловою хвилею, називається *інтенсивністю світла* I у даній точці простору. Густина потоку електромагнітної енергії визначається вектором Пойтінга \vec{S} . Отже,

$$I = \langle \vec{S} \rangle = \langle [\vec{E} \times \vec{H}] \rangle. \quad (48.7)$$

Відомо, що модулі амплітуд векторів \vec{E} і \vec{H} в електромагнітній хвилі пов'язані співвідношенням $E_m \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} = H_m \sqrt{\mu_0 \mu} = H_m \sqrt{\mu_0}$ (ми взяли $\mu = 1$). Звідси випливає, що

$$H_m = \sqrt{\epsilon} E_m \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} = n E_m \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0},$$

де n – показник заломлення середовища, у якому поширюється хвиля. Таким чином, H_m пропорційна E_m та n : $H_m \sim n E_m$. Модуль середнього значення вектора Пойтінга пропорційний $E_m H_m$. Тому можна вважати, що

$$I \sim nE_m^2 = nA^2. \quad (48.8)$$

Отже, інтенсивність світла пропорційна квадрату амплітуди світлової хвилі й показнику заломлення середовища.

Інтерференція монохроматичного світла від двох джерел

8 Інтерференція світла – явище, в якому при накладанні пучків світла результуюча інтенсивність не дорівнює сумі інтенсивностей окремих пучків, має постійні у часі темні та світлі ділянки – інтерференційні максимуми та мінімуми.

З'ясуємо, за яких умов можливе явище інтерференції.

Розглянемо випадок, коли два джерела S_1 та S_2 випромінюють монохроматичні хвилі (див. рис. 48.3). У точці спостереження P кожна хвиля збуджує коливання, які описуються такими виразами:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{m1} \cos[\omega_1(t - l_1/v_1) + \alpha_1], \quad (48.9)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{m2} \cos[\omega_2(t - l_2/v_2) + \alpha_2]. \quad (48.10)$$

Тут ω_1 , α_1 та ω_2 , α_2 – відповідно частоти та початкові фази коливань джерел S_1 та S_2 ; l_1 та l_2 – відстані, які проходять хвилі від своїх джерел до точки спостереження P ; v_1 та v_2 – їх фазові швидкості. Зрозуміло, що в точці P результуюче коливання світлового вектора буде дорівнювати

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

а результуюча інтенсивність визначається як

$$I \sim \langle E^2 \rangle = \langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 \rangle = \langle (\vec{E}_1)^2 \rangle + \langle (\vec{E}_2)^2 \rangle + 2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle. \quad (48.11)$$

Доданок $2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle$ у (48.11) називається **інтерференційним доданком**. З (48.11) випливає, що коли інтерференційний доданок дорівнює нулю, то результуюча інтенсивність буде дорівнювати сумі інтенсивностей окремих світлових пучків, тобто явище інтерференції буде відсутнім.

Розглянемо більш детально інтерференційний доданок і з'ясуємо, за яких умов він не дорівнює нулю. Використовуючи (48.9) та (48.10), неважко отримати

$$2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = 2 \langle \vec{E}_{m1} \vec{E}_{m2} \cos[\omega_1(t - l_1/v_1) + \alpha_1] \cos[\omega_2(t - l_2/v_2) + \alpha_2] \rangle = \vec{E}_{m1} \vec{E}_{m2} \times \\ \times \left\langle \cos \left[(\omega_1 + \omega_2)t - \left(\frac{\omega_1 l_1}{v_1} + \frac{\omega_2 l_2}{v_2} \right) + \alpha_1 + \alpha_2 \right] + \cos \left[(\omega_1 - \omega_2)t - \left(\frac{\omega_1 l_1}{v_1} - \frac{\omega_2 l_2}{v_2} \right) + \alpha_1 - \alpha_2 \right] \right\rangle. \quad (48.12)$$

Аналізуючи вираз (48.12), слід зазначити, **щоб інтерференційний доданок був відмінним від нуля, необхідно, по-перше, виконати умову $\vec{E}_{m1} \vec{E}_{m2} \neq 0$, тобто вектори \vec{E}_{m1} та \vec{E}_{m2} не повинні бути перпендикулярними один до одного. По-друге, необхідно, щоб різниця фаз хвиль була постійною у часі.** Це можливо, як випливає з (48.12), коли частоти обох хвиль є однаковими і різниця початкових фаз хвиль не залежить від часу:

$$\boxed{\omega_1 = \omega_2} \text{ і } \boxed{\alpha_1 - \alpha_2 = const}. \quad (48.13)$$

Хвилі, для яких різниця фаз є постійною у часі, називають **когерентними**. Умова (48.13) є умовою для когерентності хвиль.

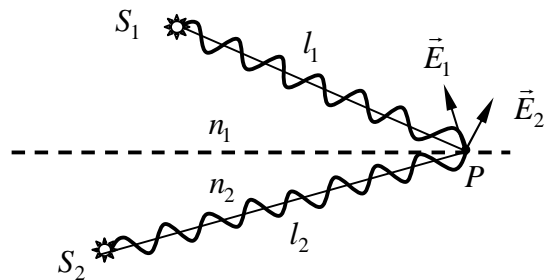


Рисунок 48.3

9 Умови інтерференційного максимуму та мінімуму. Далі будемо вважати, що умови спостереження інтерференції є виконаними. З'ясуємо, за яких умов у точці спостереження P спостерігається максимум, а за яких – мінімум. З виразу (48.11) випливає, що коли інтерференційний доданок набуває максимального значення, то ми будемо спостерігати максимум, а коли мінімального – мінімум. Ураховуючи (48.13), для інтерференційного доданка можемо записати

$$2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = E_{m1} E_{m2} \cos \delta, \quad (48.14)$$

де різниця фаз хвиль визначається співвідношенням

$$\begin{aligned} \delta &= [\omega_1(t - l_1/v_1) + \alpha_1] - [\omega_2(t - l_2/v_2) + \alpha_2] = [(\omega_1 - \omega_2)t - (\omega_1 l_1/v_1 - \omega_2 l_2/v_2) + \alpha_1 - \alpha_2] = \\ &= [(\omega l_2/v_2 - \omega l_1/v_1) + \alpha_1 - \alpha_2]. \end{aligned} \quad (48.15)$$

Тут ураховано, що згідно з (48.13) $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, вектори \vec{E}_{m1} і \vec{E}_{m2} вважаємо паралельними. Далі використаємо співвідношення для фазових швидкостей хвиль $v_1 = c/n_1$ і $v_2 = c/n_2$, початкові фази вважаємо такими, що дорівнюють нулю $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Тоді можемо записати

$$\delta = \omega \left(\frac{l_2}{v_2} - \frac{l_1}{v_1} \right) = \frac{\omega}{c} (l_2 n_2 - l_1 n_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta, \quad (48.16)$$

де

$$\Delta = n_2 l_2 - n_1 l_1 = L_2 - L_1 \quad (48.17)$$

величина, що дорівнює різниці **оптичних довжин** $n \cdot l$, які проходять хвилі, і називається **оптичною різницею ходу**.

З формули (48.14) випливає, що максимум буде спостерігатися тоді, коли

$$\delta = \pm 2\pi m \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (48.18)$$

У цьому випадку $\cos \delta = 1$ і набуває максимального значення. Коли ж використати (48.16) та (48.17), то отримаємо, що максимум має місце, коли **оптична різниця ходу дорівнює цілому числу довжин хвиль у вакуумі**:

$$\Delta = \pm m \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (48.19)$$

Таким чином, **умови (48.18) і (48.19) є умовами інтерференційного максимуму**.

Мінімальне значення інтерференційного доданка буде тоді, коли $\cos \delta = -1$, тобто

$$\delta = \pm (m + 1/2) 2\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (48.20)$$

Ця умова відповідає тому, що Δ **дорівнює напівцілому числу довжин хвиль у вакуумі**:

$$\Delta = \pm (m + 1/2) \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (48.21)$$

Отже, **умови (48.20) та (48.21) є умовами інтерференційного мінімуму**.

§ 49 Когерентність. Механізм випромінювання світла атомами. Час когерентності. Довжина когерентності. Радіус когерентності [5]

1 Як з'ясовано вище, необхідною умовою існування інтерференції є постійність у часі різниці фаз хвиль. Тобто частоти хвиль, які беруть участь у інтерференції, повинні бути однаковими, різниця початкових фаз хвиль не повинна залежати від часу.

Хвилі, для яких умова постійності у часі різниці фаз виконується називають **когерентними**. **Когерентністю** називають узгоджене проходження декількох коливальних або хвильових процесів.

2 У природній світловій хвилі амплітуда, частота і початкова фаза за достатньо тривалий проміжок часу неперервно хаотично змінюються. Тобто різниця фаз набуває з

однаковою ймовірністю будь-яких значень. Тому інтерференційний доданок дорівнює нулю. Таким чином, природне світло є некогерентним й інтерференції не створює.

Причини некогерентності природного світла пов'язані з механізмом випромінювання світла атомами. Атом випромінює світло протягом $\sim 10^{-8}$ с, коли переходить із збудженого стану в звичайний. За цей час створюється цуг хвилі довжиною ~ 3 м. Через деякий час атом знову випромінює новий цуг світлової хвилі. Але початкова фаза нового цугу має випадковий характер і не пов'язана з фазою попереднього цугу. Також зрозуміло, що цуги, які утворюються різними атомами, мають різні початкові фази. *Таким чином, природне світло, яке створюється як різними цугами одного і того ж атома, так і різними цугами різних атомів, є некогерентним.*

3 Виберемо деяку точку і будемо спостерігати, як змінюються в ній початкові фази світлових хвиль. Зрозуміло, що фаза світлової хвилі, яка випромінюється одним атомом, залишається незмінною лише у межах одного цугу. Розглянемо світло, яке створюється багатьма атомами. Коли вибрати достатньо малий час спостереження, то може статися, що основна кількість цугів (від різних атомів) проходить через точку спостереження, не перериваючись і пам'ятаючи свої початкові фази. Тільки невелика кількість цугів змінює одна одну. За рахунок цього буде мати місце зміна результуючої початкової фази. *Час, за який випадкова зміна фази досягає значення π , називають часом когерентності.*

Розрахунок показує, що час когерентності визначається співвідношенням

$$t_{\text{ког}} = 1/\Delta\nu,$$

де $\Delta\nu$ – інтервал частот світлової хвилі. Для сонячного світла час когерентності дорівнює $\sim 10^{-12}$ с.

4 Відстань $l_{\text{ког}} = ct_{\text{ког}}$, на яку переміщується хвиля за час когерентності, називається **довжиною когерентності**. Зрозуміло, що довжина когерентності дорівнює відстані між двома точками вздовж напрямку поширення світла, у яких випадкова зміна фази досягає значення π . Для сонячного світла довжина когерентності дорівнює $\sim 0,3$ мм.

5 У світловій хвилі амплітуда та фаза коливань змінюються не тільки вздовж напрямку поширення, а й у площині, яка перпендикулярна до цього напрямку. Це пов'язано з тим, що різні ділянки джерела світла у поперечній площині випромінюють неузгоджено – з випадково змінною фазою. Випадкові зміни різниці фаз коливань у двох точках цієї площини збільшуються з відстанню між ними. Відстань $\rho_{\text{ког}}$ між двома точками, що лежать у площині, яка є перпендикулярною до напрямку поширення світла, у яких різниця фаз досягає значення порядку π , називається **радіусом когерентності**. Якщо джерело світла має форму диска, діаметр якого видно з даної точки спостереження під кутом ϕ , то, як показують розрахунки,

$$\rho_{\text{ког}} \sim \lambda/\phi,$$

де λ – довжина хвилі. Для сонячного світла радіус когерентності має значення порядку 0,05 мм.

§ 50 Дослід Юнга. Ширина інтерференційних смуг [10]

1 Томас Юнг уперше в 1803 році спостерігав явище інтерференції світла, вперше визначив довжину світлової хвилі. Схема досліду зображена на рис. 50.1. Яскравий пучок світла від Сонця падав на екран з малою вузькою щілиною S . Світло від щілини S йшло до другого екрана із двома вузькими щілинами S_1 і S_2 , які були розміщені одна відносно іншої на відстані d . Перший екран з отвором S був призначений для збільшення радіуса когерентності. Завдяки цьому, щілини S_1 і S_2 можна було розмістити одна відносно іншої на відстані декількох міліметрів і світло від цих джерел залишалось когерентним. Джерела

S_1 та S_2 випромінювали пучки когерентного світла, які перекривалися на екрані. На екрані в місці перекриття пучків спостерігалися паралельні інтерференційні смуги. Вимірявши ширину дифракційної смуги, Юнг зміг обчислити довжину світлової хвилі.

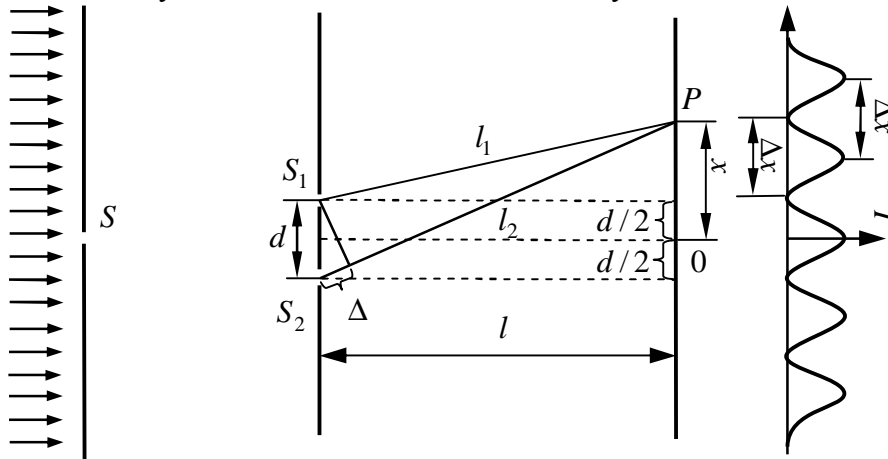


Рисунок 50.1

2 Обчислимо ширину інтерференційної смуги в досліді Юнга. Розглянемо дві циліндричні когерентні світлові хвилі, що виходять із джерел S_1 і S_2 , які мають вигляд паралельних тонких світних ниток або вузьких щілин (рис. 50.1). Область, у якій ці хвилі перекриваються, називається полем інтерференції. Якщо в поле інтерференції внести екран E , то на ньому буде спостерігатись інтерференційна картина, що має вигляд світлих і темних смуг, які чергуються між собою. Обчислимо координати цих смуг у припущенні, що екран є паралельним до площини, у якій лежать джерела S_1 і S_2 . Візьмемо на екрані координатну вісь X , паралельну до прямої, що проходить через S_1 і S_2 . Початок координат помістимо в точці O , відносно якої S_1 і S_2 розміщені симетрично. Джерела S_1 та S_2 випромінюють хвилі в однаковій фазі. Знайдемо різницю ходу світла Δ у точці спостереження P від цих джерел. Зрозуміло, що різниця ходу дорівнює

$$\Delta = nl_2 - nl_1, \quad (50.1)$$

де l_1 та l_2 – відстані від точки P до джерел S_1 та S_2 (див. рис. 50.1); n – показник заломлення середовища між джерелами та екраном E . Знайдемо $l_2 - l_1$, виходячи з геометричних міркувань. Застосовуючи теорему Піфагора, можемо записати

$$l_1^2 = l^2 + (x - d/2)^2, \quad l_2^2 = l^2 + (x + d/2)^2. \quad (50.2)$$

Звідси

$$l_2^2 - l_1^2 = (l_2 + l_1)(l_2 - l_1) = 2xd. \quad (50.3)$$

Для отримання помітної інтерференційної картини відстань між джерелами повинна бути значно меншою за відстань l до екрана. Відстань x , у межах якої утворюються інтерференційні смуги, також повинна бути значно меншою за l . За таких умов можна припустити, що $l_2 + l_1 \approx 2l$. Тоді з (50.3) можемо записати $l_2 - l_1 = xd/l$. Помноживши $l_2 - l_1$ на показник заломлення середовища n , отримаємо оптичну різницю ходу

$$\Delta = n \frac{xd}{l}. \quad (50.4)$$

Підстановка цього значення Δ в умову інтерференційного максимуму

$$\Delta = \pm m\lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

показує, що максимуми інтенсивності будуть спостерігатися при значеннях x , що дорівнюють

$$x_{\max} = \pm m \frac{l}{d} \lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (50.5)$$

Тут $\lambda = \lambda_0/n$ – довжина хвилі у середовищі, що заповнює простір між джерелами світла й екраном.

Відстань між двома сусідніми максимумами інтенсивності називають **відстанню між інтерференційними смугами**, а відстань між сусідніми мінімумами інтенсивності – **шириною інтерференційної смуги**. Неважко з'ясувати, що відстань між смугами й ширина смуги мають однакове значення, що дорівнює, як це випливає з (50,5),

$$\Delta x = m \frac{l}{d} \lambda - (m-1) \frac{l}{d} \lambda = \frac{l}{d} \lambda. \quad (50.6)$$

Припустимо, що відстань між щілинами S_1 та S_2 становить $d = 1$ мм, а відстань $l = 1,5$ м. Вимірюючи експериментально $\Delta x = 0,93$ мм, можна знайти з (50.6), що довжина світла дорівнює $\lambda = 620$ нм. Таким шляхом уперше Юнг виміряв довжини світлових хвиль.

§ 51 Дзеркала Френеля. Ширина інтерференційних смуг [5]

1 Розглянемо інтерференційну схему, яка використовує відбиття для розділення світлової хвилі на дві частини. Ця схема отримала назву **дзеркал Френеля**.

Два плоских дотичні дзеркала OM та ON розміщуються так, що їх поверхні, які відбивають, утворюють кут, близький до π (рис. 1). Відповідно кут φ (див. рис. 51.1) дуже малий. Паралельно лінії перетинання дзеркал O на відстані r від неї розміщене прямолінійне джерело світла S (наприклад, вузька щілина, яка світиться). Дзеркала відбивають на екран E дві циліндричні когерентні хвилі, які поширюються так, ніби вони вийшли з уявних джерел S_1 і S_2 . Непрозорий екран E_1 знаходиться на шляху світла від джерела S до екрана E .

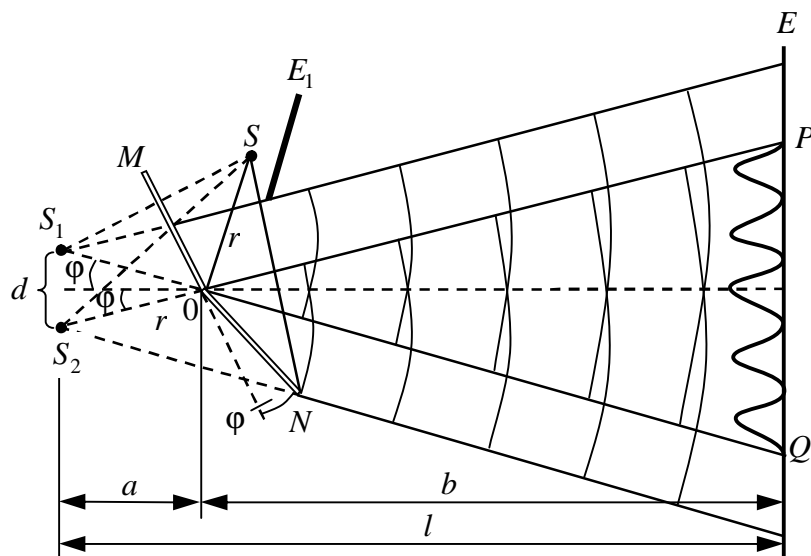


Рисунок 51.1 – Дзеркала Френеля. Інтерференція спостерігається в області OPQ , у якій відбиті хвилі накладаються одна на одну

Промінь OQ являє собою відбиття променя SO від дзеркала OM , промінь OP – відбиття променя SO від дзеркала ON . Кут між $\angle S_1SS_2$ дорівнює φ (як кути між відповідними взаємно перпендикулярними прямими). Оскільки S та S_1 розміщені відносно дзеркала OM симетрично, довжина відрізка OS_1 дорівнює OS , тобто r . Аналогічні міркування приводять до того ж результату для відрізка OS_2 . Таким чином, відстані від

точки O до точок S_1, S_2 і S дорівнюють r . Це означає, що ці точки лежать на колі радіусом r із центром у точці O . Таким чином, кут $\angle S_1SS_2$ є вписаним у коло радіусом r із центром у точці O і тому $\angle S_1SS_2 = \frac{1}{2}\angle S_1OS_2$. Таким чином, $\angle S_1OS_2 = 2\varphi$. Неважко знайти відстань d між уявними джерелами S_1 та S_2 , використовуючи те, що $OS_1 = OS_2 = r$ и кут $\angle S_1OS_2 = 2\varphi$,

$$d = 2r \sin \varphi \approx 2r\varphi.$$

На рис. 1 бачимо, що $a = r \cos \varphi \approx r$. Отже, відстань l між уявними когерентними джерелами та екраном E буде дорівнювати

$$l = a + b \approx r + b,$$

де b – відстань від лінії перетину дзеркал O до екрана E .

Підстановка знайдених значень d і l у формулу для ширини інтерференційної смуги у досліді Юнга дає ширину інтерференційної смуги у випадку дзеркал Френеля:

$$\Delta x = \frac{l}{d} \lambda = \frac{r+b}{2r\varphi} \lambda. \quad (51.1)$$

§ 52 Інтерференція світла при відбитті від тонких плівок. Різниця ходу променів. Смуги рівного нахилу. Смуги рівної товщини [5]

1 Під час падіння світлової хвилі на тонку прозору пластинку (або плівку) відбувається відбиття від обох поверхонь пластинки. У результаті виникають дві світлові хвилі, які при деяких умовах можуть інтерферувати між собою.

Нехай на прозору плоскопаралельну пластинку падає плоска світлова хвиля, яку можна розглядати як паралельний пучок променів (рис. 52.1). Пластинка відбиває вгору два паралельних пучки світла, один з яких утворився за рахунок відбиття від верхньої поверхні пластинки, другий – внаслідок відбиття від нижньої поверхні (на рис. 52.1 кожний із цих пучків показаний тільки одним променем). При вході в пластинку й виході з неї другий пучок заломлюється. Крім цих двох пучків, пластинка відбиває вгору пучки, що виникають у результаті три-, п'яти- і т.д. кратного відбиття від поверхонь пластинки. Однак через їхню малу інтенсивність ми ці пучки брати до уваги не будемо. Не будемо також цікавитися пучками, що пройшли через пластинку.

Різниця ходу, що отримується променями 1 і 2 до того, як вони зійдуться в точці C , дорівнює

$$\Delta = nl_2 - l_1, \quad (52.1)$$

де l_1 – довжина відрізка BC ; l_2 – сумарна довжина відрізків AO та OC ; n – показник заломлення пластинки. Показник заломлення середовища, що оточує пластинку, беремо таким, що дорівнює одиниці. З рис. 52.1 видно, що $l_1 = 2b \cdot \operatorname{tg} \theta_2 \sin \theta_1$, $l_2 = 2b / \cos \theta_2$ (b – товщина пластинки). Підстановка цих значень у вираз (52.1) дає, що

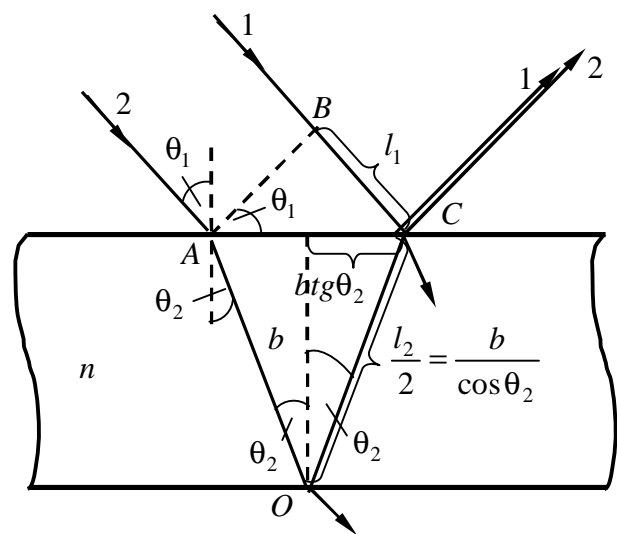


Рисунок 52.1

$$\Delta = \frac{2bn}{\cos \theta_2} - 2b \cdot \operatorname{tg} \theta_2 \sin \theta_1 = 2b \frac{n^2 - n \sin \theta_2 \sin \theta_1}{n \cos \theta_2}.$$

Використавши закон заломлення $n \sin \theta_2 = \sin \theta_1$ і врахувавши, що

$$n \cos \theta_2 = \sqrt{n^2 - n^2 \sin^2 \theta_2} = \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1},$$

легко привести формулу для Δ до вигляду

$$\Delta = 2b \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}. \quad (52.2)$$

При обчисленні різниці фаз δ між коливаннями у променях 1 і 2 потрібно, крім оптичної різниці ходу Δ , врахувати можливість зміни фази хвилі при відбитті. У точці C (див. рис. 52.1) відбиття проходить від оптично більш густого середовища. Тому фаза хвилі 1 змінюється на π . У точці O відбиття проходить від менш густого середовища, тому стрибка фази тут не відбувається. У результаті між променями 1 і 2 виникає додаткова різниця фаз, що дорівнює π . Її можна врахувати, додавши до Δ (або віднявши від неї) половину довжини хвилі у вакуумі. У результаті отримуємо **різницю ходу променів, які інтерферують у плівці**:

$$\Delta = 2b \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} - \lambda_0 / 2. \quad (52.3)$$

При $\Delta = m \lambda_0$ отримуємо інтерференційні максимуми, при $\Delta = (m + 1/2) \lambda_0$ – інтерференційні мінімуми (m – ціле число). Умова максимуму має вигляд

$$2b \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} = (m + 1/2) \lambda_0. \quad (52.4)$$

Рівність (52.3) виражає умову максимуму інтерференції світла від тонкої прозорої пластинки або плівки.

2 Неважко зрозуміти, що коли товщина b і кут падіння θ_1 скрізь однакові, то в усіх точках на поверхні пластинки може виникати максимум інтерференції для світла якоїсь однієї довжини хвилі λ ; інакше кажучи, при освітленні пластинки білим світлом вона матиме один колір. Можливі інші випадки.

*Коли кут падіння θ_1 скрізь однаковий, а товщина пластинки різна, тоді максимум інтерференції світла довжини хвилі λ_1 буде в точках, що відповідають товщині пластинки d_1 , а максимум для хвилі λ_2 – у точках, що відповідають товщині d_2 і т. д. У результаті інтерференції на пластинці утворюються кольорові смуги, які позначатимуть місця однакової товщини пластинки або плівки, їх називають **смугами однакової товщини**. Такі кольорові смуги можна спостерігати на дорогах після дощу, де розлите мастило чи пальне, на плоскій мильній плівці тощо.*

*Може бути, що кут падіння θ_1 в різних точках набуває різних значень (наприклад, при освітленні пластинки точковим джерелом світла), а товщина пластинки d при цьому залишається незмінною. Тоді максимум для хвиль λ_1 виникатиме в точках, де кут падіння θ_1 , а для хвиль λ_2 – де кут падіння θ_2 і т. д. У результаті інтерференції на пластинці утворюються кольорові смуги, які позначатимуть місця однакового нахилу світлових променів; їх називають **смугами однакового нахилу**.*

§ 53 Кільця Ньютона. Радіуси темних і світлих кілець [5]

1 Класичним прикладом смуг однакової товщини є **кільця Ньютона** (див. рис. 53.1). Вони спостерігаються при відбитті світла від системи, що складається з дотичних товстої плоскопаралельної пластинки й плоскоопуклої лінзи з великим радіусом кривизни (рис. 53.2). *Роль тонкої плівки, від поверхонь якої відбиваються когерентні хвилі, відіграє повітряний зазор між пластинкою й лінзою* (внаслідок великої товщини пластинки й лінзи

інтерференційні смуги за рахунок відбиття від інших поверхонь не виникають). Під час нормального падіння світла на поверхню пластини кільця Ньютона мають вигляд концентричних кіл (див. рис. 53.1).

З'ясуємо більш детально, яким чином виникають кільця Ньютона. Розглянемо промінь *I* (див. рис. 53.2), який падає на межу плоскоопукла лінза – повітря (точка *A*). Тут частина променя відбивається (промінь *2*), а частина проходить далі й відбивається (промінь *3*) від межі повітря – плоскоопукла пластинка (точка *B*). Промені *2* і *3* є когерентними, тому що створені з одного і того самого променя *I*, інтерферують між собою й формують частину інтерференційної картини, яку називають кільцями Ньютона.

Визначимо різницю ходу променів *3* і *2*. Через те що кут повітряного клину (зазору) між пластинкою й лінзою дуже малий, то промені *I*, *2* і *3* можна вважати паралельними, падіння перпендикулярним, повітряний зазор плоским. Тоді оптична різниця ходу променів *2* і *3* буде дорівнювати

$$\Delta = 2 \cdot b \cdot n + \lambda_0 / 2. \quad (53.1)$$

Тут ураховано, що товщина зазору $b = |AB|$, показник заломлення у зазорі дорівнює $n = 1$. Також при відбитті від плоскопаралельної пластини в точці *B* (відбиття від оптично більш щільного середовища) має місце зміна фази коливання світлового вектора на π . Це враховано шляхом додавання (віднімання) половини довжини хвилі світла у вакуумі до оптичної різниці ходу.

Якщо ця різниця ходу буде задовольняти умову максимуму

$$\Delta = m\lambda_0, \quad (53.2)$$

то промені *2* і *3* будуть формувати світлу частину кільця Ньютона. Якщо ця різниця ходу буде задовольняти умову мінімуму

$$\Delta = m\lambda_0 + \lambda_0 / 2, \quad (53.3)$$

то промені *2* і *3* будуть формувати темну частину кільця Ньютона.

Знайдемо радіуси *r* кілець Ньютона (див. рис. 53.1), що виникають при падінні світла перпендикулярно до пластини. З рис. 53.2 випливає, що

$$R^2 = (R - b)^2 + r^2 \approx R^2 - 2Rb + r^2, \quad (53.4)$$

де *R* – радіус кривизни лінзи; *r* – радіус кола, всім точкам якого відповідає однакова товщина зазору *b*. Через те що *b* є малою, ми знехтували b^2 порівнянно з $2Rb$. Відповідно до (53.4) маємо $b = r^2 / 2R$. Тоді з (53.1) отримуємо

$$\Delta = r^2 / R + \lambda_0 / 2. \quad (53.5)$$

Підставивши це значення в умову максимуму (53.2), знаходимо умову

$$r^2 / R = (m - 1/2)\lambda_0, \text{ або } r = \sqrt{R\lambda_0(2m - 1)/2} \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (53.6)$$

для *світлих кілець*. Підставивши значення (53.5) в умову мінімуму (53.3), отримаємо

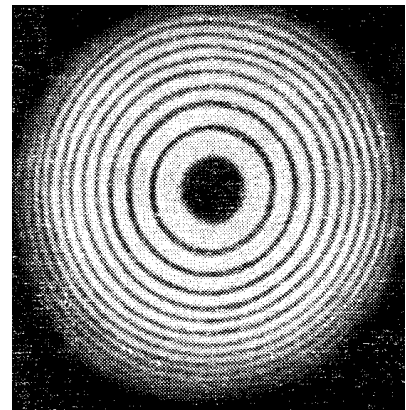


Рисунок 53.1 – Кільця Ньютона

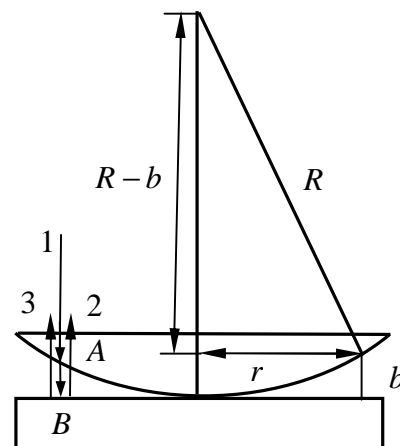


Рисунок 53.2 – Кільця Ньютона виникають при накладенні хвиль, відбитих від сферичної поверхні лінзи й верхньої поверхні плоскої скляної пластинки

$$r^2 / R = m\lambda_0, \text{ або } r = \sqrt{R\lambda_0 2m / 2}, \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (53.7)$$

для **темних кілець**. Обидві умови (53.6) й (53.7) можна об'єднати в одну:

$$r = \sqrt{R\lambda_0 2m' / 2}, \quad (m' = 1, 2, 3, \dots). \quad (53.8)$$

Непарні m' відповідають радіусам світлих кілець, парні – радіусам темних кілець. Значенню $m' = 0$ відповідає $r = 0$, тобто точка в місці дотику пластинки й лінзи. У цій точці спостерігається мінімум інтенсивності, який обумовлений зміною фази на π при відбитті світлової хвилі від пластинки (див. рис. 53.1).

ТЕМА 8 ДИФРАКЦІЯ СВІТЛА

§ 54 Принцип Гюйгенса-Френеля [5]

1 Дифракцією називається сукупність явищ, які спостерігаються при поширенні світла у середовищі з різкими неоднорідностями (поблизу границь тіл, крізь малі отвори й т.п.) і які пов'язані з відхиленнями від законів геометричної оптики. Дифракція, зокрема, приводить до огинання світловими хвилями перешкод й проникнення світла в область геометричної тіні.

Розрізняють два види дифракції. Якщо джерело світла S і точка спостереження P розміщені від перешкоди настільки далеко, що промені, які падають на перешкоду, і промені, які йдуть у точку P , утворюють практично паралельні пучки, то говорять про **дифракцію в паралельних променях, або про дифракцію Фраунгофера**. В іншому випадку говорять про **дифракцію Френеля**. Дифракцію Фраунгофера можна спостерігати, помістивши за джерелом світла S і перед точкою спостереження P лінзи так, щоб точки S і P знаходились у фокальній площині відповідної лінзи (рис. 54.1).

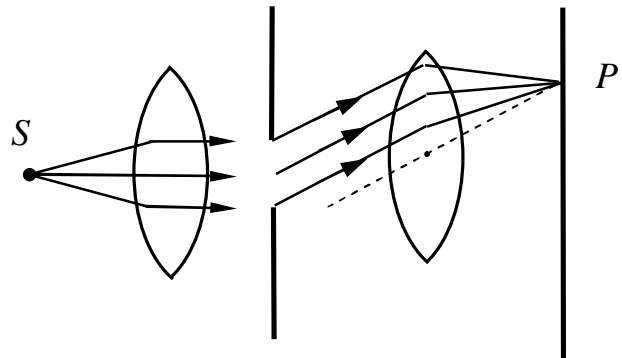


Рисунок 54.1 – Схема спостереження дифракції в паралельних променях

Пояснюється дифракція **принципом Гюйгенса-Френеля**: кожний елемент хвильової поверхні S (рис. 54.2) є джерелом вторинної сферичної хвилі, амплітуда якої пропорційна площі елемента dS ; результуюче коливання в довільній точці P є суперпозицією, інтерференцією сферичних хвиль вторинних джерел усієї хвильової поверхні S .

Запишемо аналітичний вираз принципу Френеля-Гюйгенса. Для цього згадаємо, що амплітуда сферичної хвилі зменшується з відстанню r від джерела за законом $1/r$. Отже, від кожного елемента dS хвильової поверхні в точку P , що лежить перед цією поверхнею, надходить коливання

$$dE = K(\varphi) \frac{AdS}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha). \quad (54.1)$$

У цьому виразі $(\omega t + \alpha)$ – фаза коливання у місці розміщення хвильової поверхні S ; k – хвильове число; r – відстань від елемента поверхні dS до точки P . Множник A визначається амплітудою світлового коливання у тому

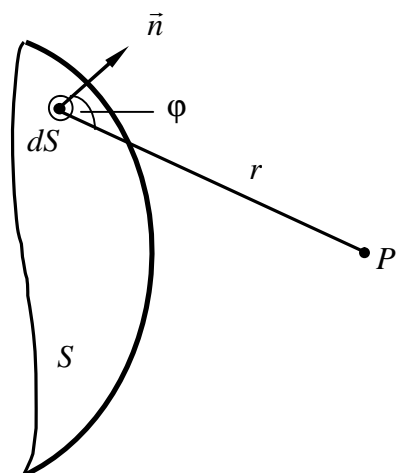


Рисунок 54.2 – До знаходження амплітуди коливання в точці P , яке збуджується елементом хвильової поверхні dS

місці, де знаходиться dS . Коефіцієнт $K(\varphi)$ залежить від кута φ між нормаллю \vec{n} до площини dS і напрямом від dS до точки P . При $\varphi=0$ цей коефіцієнт максимальний, при $\varphi=\pi/2$ він перетворюється у нуль. В відповідно до принципу Френеля-Гюйгенса результуюче коливання в точці P є суперпозицією коливань (54.1), узятих для усієї хвильової поверхні S :

$$E = \int_S K(\varphi) \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha) dS. \quad (54.2)$$

Ця формула є аналітичним виразом принципу Гюйгенса-Френеля.

Таким чином, між інтерференцією й дифракцією немає істотної фізичної різниці. Обидва явища полягають у перерозподілі світлового потоку у результаті суперпозиції хвиль. Через історичні причини перерозподіл інтенсивності, що виникає в результаті суперпозиції хвиль, які збуджуються скінченним числом дискретних когерентних джерел, називають інтерференцією хвиль. Перерозподіл інтенсивності, що виникає внаслідок суперпозиції хвиль, які збуджуються когерентними неперервно розміщеними джерелами, називають дифракцією хвиль. Тому говорять, наприклад, про інтерференційну картину від двох вузьких щілин і про дифракційну картину від однієї щілини.

§ 55 Метод зон Френеля. Радіус зони Френеля. Амплітуда коливань світлової хвилі від точкового ізотропного джерела [5]

1 Обчислення явищ дифракції з застосуванням принципу Френеля-Гюйгенса є в загальному випадку дуже важким завданням. Однак, як показав Френель, у випадках, що характеризуються симетрією, знаходження амплітуди результуючого коливання може бути виконано простим алгебраїчним або геометричним підсумовуванням.

Щоб зрозуміти сутність методу, який був розроблений Френелем (метод зон Френеля), визначимо амплітуду світлового коливання, яке збуджується в точці P сферичною хвилею, що поширюється в однорідному й ізотропному середовищі із точкового джерела S (рис. 55.1). Хвильові поверхні такої хвилі симетричні відносно прямої SP . Скориставшись цим, розіб'ємо зображену на

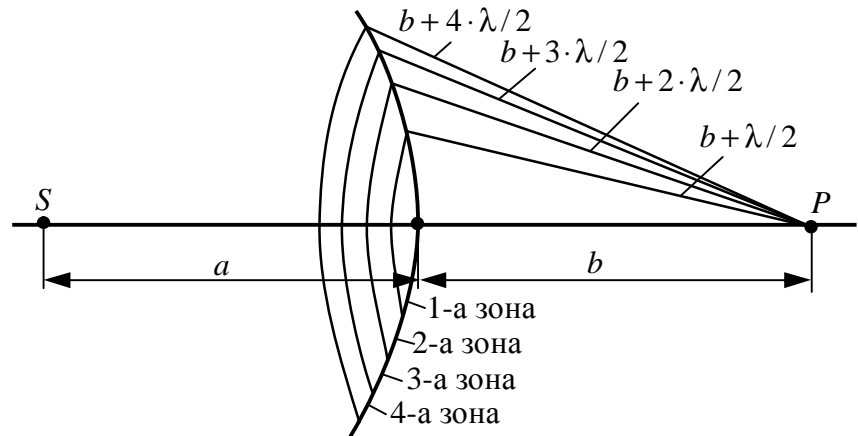


Рисунок 55.1 – Розбивання сферичного хвильового фронту на зони Френеля

рисунку хвильову поверхню на кільцеві зони, побудовані так, що відстані від країв кожної зони до точки P відрізняються на $\lambda/2$ (λ – довжина хвилі в тому середовищі, у якому поширюється хвиля). Зони, що мають таку властивість, називаються **зонами Френеля**.

2 З рис. 55.1 випливає, що відстань b_m від зовнішнього краю m -ї зони до точки P дорівнює

$$b_m = b + m \frac{\lambda}{2}, \quad (55.1)$$

де b – відстань від вершини хвильової поверхні до точки P .

Коливання, що надходять у точку P від аналогічних точок двох сусідніх зон (тобто від точок, що лежать усередині зон або біля зовнішніх країв зон і т.п.), перебувають у

протилежних фазах. Тому й *результуючі коливання, які створюються кожною із зон у цілому, будуть для сусідніх зон відрізнятися за фазою на π .*

3 Обчислимо площу і радіус зон Френеля.

Зовнішня границя m -ї зони виділяє на хвильовій поверхні сферичний сегмент висоти h_m (рис. 55.2). Позначимо площу цього сегмента через S_m . Тоді площу m -ї зони можна подати у вигляді

$$\Delta S_m = S_m - S_{m-1},$$

де S_{m-1} – площа сферичного сегмента, який виділяється зовнішньою границею $(m-1)$ -ї зони.

З рис. 55.2 випливає, що

$$r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = (b + m\lambda/2)^2 - (b + h_m)^2,$$

де a – радіус хвильової поверхні; r_m – радіус зовнішньої межі m -ї зони. Підвівши вирази у дужках до квадрата, отримаємо

$$r_m^2 = 2ah_m - h_m^2 = bm\lambda + m^2(\lambda/2)^2 - 2bh_m - h_m^2. \quad (55.2)$$

Звідси

$$h_m = \frac{bm\lambda + m^2(\lambda/2)^2}{2(a+b)}. \quad (55.3)$$

Обмежившись розглядом не занадто великих m , можна, через те, що довжина хвилі λ є малою величиною, знехтувати доданками, які мають λ^2 . У цьому наближенні

$$h_m = \frac{bm\lambda}{2(a+b)}. \quad (55.4)$$

Площа сферичного сегмента дорівнює $2\pi Rh$ (R – радіус сфери; h – висота сегмента). Отже,

$$S_m = 2\pi ah_m = \frac{\pi ab}{a+b} m\lambda,$$

а площа m -ї зони

$$\Delta S_m = S_m - S_{m-1} = \frac{\pi ab\lambda}{a+b} [m - (m-1)] = \frac{\pi ab\lambda}{a+b}.$$

Отриманий вираз не залежить від m . Це означає, що при не занадто великих m площі зон Френеля приблизно однакові.

З рівності (55.2) можна знайти радіуси зон. При не занадто великих m висота сегмента $h_m \ll a$. Тому можна вважати, що $r_m^2 = 2ah_m$. Підставивши значення (55.4) для h_m , отримаємо для **радіуса зовнішньої межі m -ї зони Френеля вираз**

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}. \quad (55.5)$$

Якщо покласти $a = b = 1$ м і $\lambda = 500$ нм, то для радіуса першої (центральної) зони отримаємо значення $r_1 = 0,5$ мм. Радіуси наступних зон зростають як \sqrt{m} .

4 Знайдемо амплітуду результуючого коливання у точці P , яке збуджується сферичною хвилею. Згідно з принципом Гюйгенса-Френеля амплітуда коливань dE , що

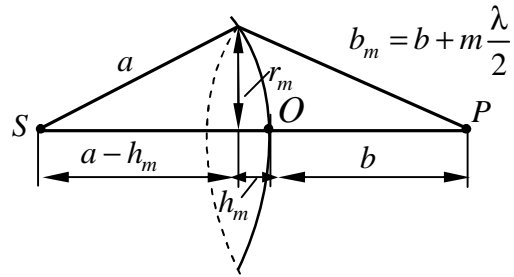


Рисунок 55.2 – До обчислення площі зон Френеля

збуджується елементом хвильової поверхні dS , який знаходиться на відстані r від точки спостереження, визначається співвідношенням

$$dE = K(\varphi) \frac{AdS}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha). \quad (55.6)$$

Ми з'ясували, що площі зон Френеля приблизно однакові. Відстань b_m від зони до точки P повільно зростає з номером зони m (величині b_m у (55.6) відповідає r). Кут φ між нормаллю до елементів зони й напрямом на точку P також зростає з m . Все це приводить до того, що амплітуда A_m коливання, яке збуджується m -ю зоною в точці P , відповідно до (55.6) монотонно зменшується з ростом m . Навіть при дуже великих m , коли площа зони починає помітно зростати з m (див. (55.3)), зменшення множника $K(\varphi)$, переважає зростання ΔS_m , так що A_m продовжує зменшуватися. Таким чином, амплітуди коливань, які збуджуються у точці P зонами Френеля, утворюють послідовність, яка монотонно зменшується:

$$A_1 > A_2 > A_3 > \dots A_{m-1} > A_m > A_{m+1} > \dots$$

Фази коливань, які збуджуються сусідніми зонами, як ми з'ясували вище, відрізняються на π . Тому амплітуда A результуючого коливання в точці P може бути подана у вигляді

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots$$

У цей вираз усі амплітуди від непарних зон входять із одним знаком, а від парних зон – із іншим. Напишемо цей вираз таким чином:

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots \quad (55.7)$$

Внаслідок монотонного зменшення A_m можна вважати, що

$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}.$$

Тоді вирази в дужках (55.7) будуть дорівнювати нулю, а формула (55.7) спрощується:

$$\boxed{A = \frac{A_1}{2}}. \quad (55.8)$$

Згідно з (55.8) амплітуда, що створюється в деякій точці P усією сферичною хвильовою поверхнею, дорівнює половині амплітуди, яку створює лише одна центральна зона. Якщо на шляху хвилі поставити непрозорий екран з отвором, що залишає відкритою тільки центральну зону Френеля, амплітуда в точці P буде дорівнювати A_1 , тобто у два рази перевищить амплітуду (55.8). Відповідно інтенсивність світла в точці P буде у цьому випадку в чотири рази більше, ніж за умови відсутності перешкоди між точками S та P .

5 Розв'яжемо задачу про поширення світла від джерела S до точки P методом графічного додавання амплітуд. Розіб'ємо хвильову поверхню на кільцеві зони, аналогічні зонам Френеля, але набагато менші за шириною (різниця ходу від країв зони до точки P становить однакову для всіх зон малу частину λ). Коливання, що створюється у точці P такою зоною, зобразимо у вигляді вектора, довжина якого дорівнює амплітуді коливання, а кут, який утворений таким вектором із напрямком, взятим за початок відліку, буде дорівнювати початковій фазі коливання (використовуємо метод векторних діаграм). Амплітуда коливань, які створюються такими зонами в точці P , повільно зменшується при переході від зони до зони. Кожне наступне коливання відстає від попереднього за фазою на одну і ту саму величину. Отже, векторна діаграма, яку ми отримуємо при додаванні коливань, що збуджується окремими зонами, має вигляд, показаний на рис. 55.3.

Якби амплітуди, що створюються окремими зонами, були однаковими, кінець останнього із зображених на рис. 55.3 векторів збігся б з початком першого вектора. У дійсності значення амплітуди, хоча й дуже слабко, але зменшується, внаслідок чого вектори утворюють не замкнену фігуру, а ламану спіралеподібну лінію.

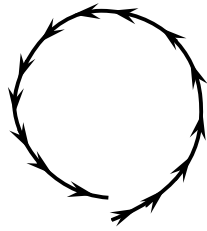


Рисунок 55.3 – Векторна діаграма для знаходження коливань, що збуджуються елементами першої й другої зон Френеля

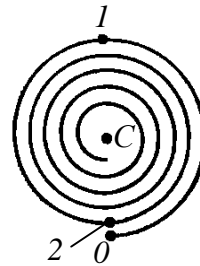


Рисунок 55.4 – Векторна діаграма для знаходження коливань, що збуджуються усіма зонами Френеля

У границі при прямуванні ширини кільцевих зон до нуля (число їх буде при цьому необмежено зростати) векторна діаграма набуде вигляду спіралі, що закручується до точки C (рис. 55.4). Фази коливань у точках 0 і 1 відрізняються на π (нескінченно малі вектори, що утворюють спіраль, напрямлені у цих точках у протилежні боки). Отже, ділянка спіралі $0-1$ відповідає першій зоні Френеля. Вектор, проведений із точки 0 у точку 1 (рис. 55.5а), зображує коливання, яке збуджується у точці P цією зоною. Аналогічно вектор, проведений із точки 1 у точку 2 (рис. 55.5б), зображує коливання, яке збуджується другою зоною Френеля. Коливання від першої й другої зон перебувають у протилежних фазах; відповідно до цього вектори 01 і 12 напрямлені у протилежні боки.

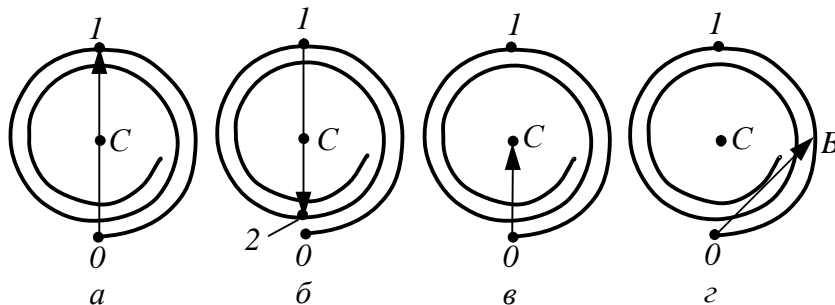


Рисунок 55.5 – Векторна діаграма для знаходження амплітуди в центрі дифракційної картини на круглому отворі

Коливання, яке збуджується у точці P усією хвильовою поверхнею, зображується вектором $0C$ (рис. 55.5в). З рисунка випливає, що амплітуда в цьому випадку дорівнює половині амплітуди, яку створює перша зона. Цей результат ми отримали раніше алгебраїчно (див. формулу (55.8)). Значимо, що коливання, які збуджуються внутрішньою половиною першої зони Френеля, зображується вектором $0B$ (рис. 55.5г). Таким чином, дія внутрішньої половини першої зони Френеля не еквівалентна половині дії першої зони. Вектор $0B$ в $\sqrt{2}$ разів більше від вектора $0C$. Отже, інтенсивність світла, яка створюється внутрішньою половиною першої зони Френеля, у два рази перевищує інтенсивність, яка створюється всією хвильовою поверхнею.

§ 56 Дифракція Френеля на круглому отворі. Амплітуда світлового вектора в центрі дифракційної картини. Характер дифракційної картини [5]

1 Розмістимо на шляху сферичної світлової хвилі непрозорий екран із вирізаним у ньому круглим отвором радіусом R , розмістивши його так, щоб перпендикуляр, який опущений із джерела світла S , потрапив у центр отвору (рис. 56.1). На продовженні цього перпендикуляра візьмемо точку P . При радіусі отвору R , який значно менший за зазначені на рисунку довжини a й b , довжину a можна вважати такою, що дорівнює відстані від джерела S до перешкоди, а довжину b – відстані від перешкоди до точки P . Якщо відстані a й b задовольняють співвідношення

$$R = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m \lambda}, \quad (56.1)$$

де m – ціле число, то отвір залишить відкритими рівно m перших зон Френеля, побудованих для точки P (див. формулу для радіуса зони Френеля). Отже, число відкритих зон Френеля визначається виразом

$$m = \frac{R^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \quad (56.2)$$

Тоді амплітуда в точці P буде дорівнювати

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \pm A_m. \quad (56.3)$$

Перед A_m береться знак плюс, якщо m непарне, і мінус, якщо m парне. Зобразимо (56.3) у такому вигляді

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots + \frac{A_m}{2} \quad (m \text{ непарне}),$$

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots + \frac{A_{m-1}}{2} - A_m \quad (m \text{ парне}).$$

Амплітуди сусідніх зон практично однакові. Тому вирази у дужках можна вважати такими, що дорівнюють нулю. У результаті цього отримаємо:

$$A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_m}{2} \quad (m \text{ непарне}),$$

$$A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_{m-1}}{2} - A_m \quad (m \text{ парне}).$$

Амплітуди від двох сусідніх зон практично однакові. Тому $(A_{m-1}/2) - A_m$ можна замінити на $(-A_m/2)$. У результаті знайдемо

$$A = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_m}{2} = \frac{A_1}{2} - (-1)^m \frac{A_m}{2}, \quad (56.4)$$

де знак плюс береться для непарних, а мінус для парних m . Таким чином, формула (56.4) визначає амплітуду в точці спостереження P для випадку, коли отвором відкрито ціле число зон Френеля.

Для малих m амплітуда A_m мало відрізняється від A_1 . Отже, при непарних m амплітуда в точці P буде приблизно дорівнювати A_1 , при парних m – нулю.

Якщо прибрати перешкоду, амплітуда в точці P буде, як відомо, дорівнювати $A_1/2$. Таким чином, перешкода з отвором, що відкриває невелике непарне число зон Френеля, не тільки не послабляє освітленість у точці P , але, навпаки, приводить до збільшення амплітуди майже у два рази, а інтенсивності – майже в чотири рази.

2 З'ясуємо характер дифракційної картини, що буде спостерігатися на екрані, який поміщено за перешкодою (див. рис. 56.1). Внаслідок симетричного розміщення отвору відносно прямої SP освітленість у різних точках екрана буде залежати тільки від відстані r до точки P . У самій цій точці інтенсивність буде досягати максимуму або мінімуму залежно від того, яким – парним або непарним – є число відкритих зон Френеля. Нехай, наприклад, це число дорівнює трьом. Тоді в центрі дифракційної картини буде максимум інтенсивності. Картина зон Френеля для точки P подана на рис. 56.2а). Тепер змістимося по екрану в точку P' . Обмежена краями отвору картина зон Френеля для точки P' буде мати вигляд, показаний на рис. 56.2б). Краї отвору закриють частину 3-ї зони, одночасно частково відкриється 4-та зона. У результаті інтенсивність світла зменшиться й при деякому положенні точки P' досягне мінімуму. Якщо змістимося по екрану в точку P'' , краї отвору частково закриють не тільки 3-тю, але й 2-тю зону Френеля, одночасно частково відкриється 5-та зона (рис. 56.2в). У результаті вплив відкритих ділянок непарних зон переважатиме вплив відкритих ділянок парних зон і інтенсивність досягне максимуму, щоправда, більш слабкого, ніж максимум, який спостерігається в точці P .

Таким чином, дифракційна картина від круглого отвору має вигляд світлих і темних концентричних кілець. У центрі картини буде або світла (m непарне), або темна (m парне) пляма (рис. 56.3). Зміна інтенсивності I від відстані r від центра картини зображена на рис. 56.1. При переміщенні екрана паралельно самому собі вздовж прямої SP картини зображення на рис. 56.3 будуть змінювати один одного (згідно з (56.2) при зміні b значення m стають то непарними, то парними).

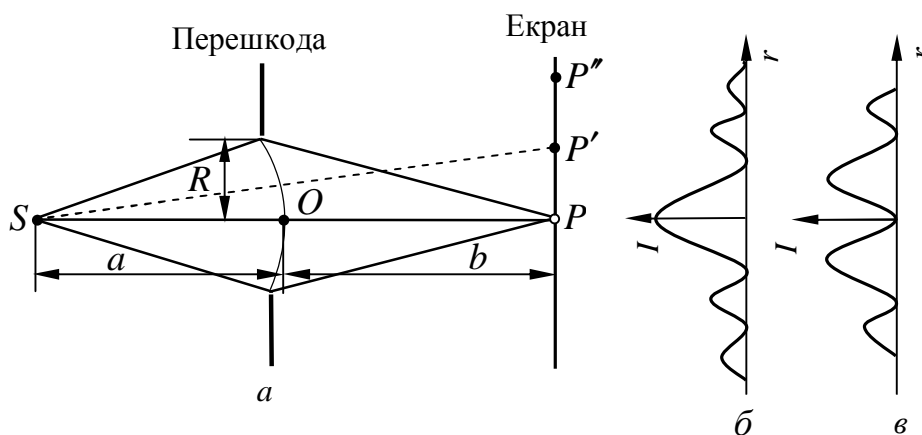


Рисунок 56.1 – Схема дифракції на круглому отворі (а) й графіки інтенсивності у випадку непарного (б) й парного (в) чисел відкритих зон Френеля

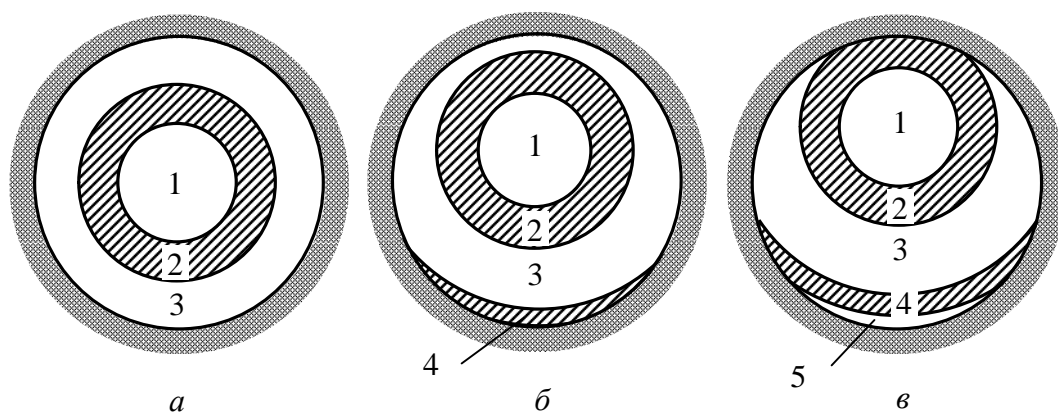
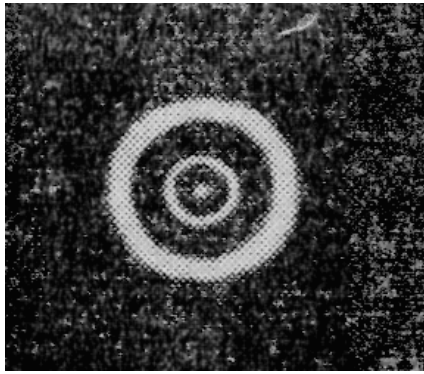
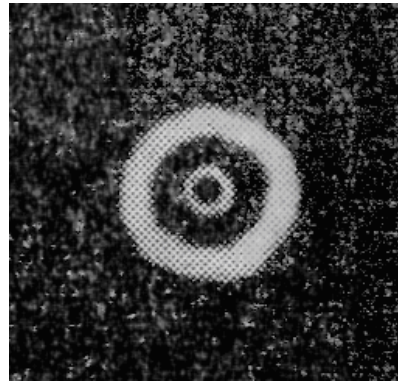


Рисунок 56.2 – Картина відкритих зон Френеля для точок $P(a)$, $P'(б)$ і $P''(в)$. Точки P , P' і P'' ті ж самі, що й на рис. 56.1



Непарне m



Парне m

Рисунок 56.3 – Картина, яку отримуємо при дифракції на круглому отворі

Якщо отвір відкриває лише частину центральної зони Френеля, на екрані отримуємо розмиту світлу пляму; чергування світлих і темних кілець у цьому випадку не виникає. Якщо отвір відкриває велику кількість зон, чергування світлих і темних кілець спостерігається лише в дуже вузькій області на межі геометричної тіні; усередині цієї області освітленість виявляється практично рівномірною.

§ 57 Дифракція Френеля на круглому диску. Амплітуда світлового вектора в центрі дифракційної картини. Характер дифракційної картини [5]

1 Помістимо між джерелом світла S й точкою P непрозорий диск радіусом R (див. рис. 57.1). Якщо диск закрийє m перших зон Френеля, амплітуда в точці P буде дорівнювати

$$A = A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+3} - \dots = \frac{A_{m+1}}{2} + \left(\frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2} \right) + \dots$$

Амплітуди сусідніх зон практично однакові. Тому вирази в дужках можна вважати такими, що дорівнюють нулю. Отже, в центрі дифракційної картини завжди буде максимум

$$\boxed{A = A_{m+1}/2}. \quad (57.1)$$

2 З'ясуємо характер картини, яку ми отримуємо на екрані. Очевидно, що освітленість може залежати тільки від відстані r до точки P (рис. 57.1). При невеликому числі закритих зон амплітуда A_{m+1} мало відрізняється від A_1 . Тому інтенсивність у точці S буде майже така сама, як за умови відсутності перешкоди між джерелом S і точкою P . Для точки P' , яка зміщена відносно точки P у будь-якому радіальному напрямку, диск буде перекривати частину $(m+1)$ -ї зони Френеля, одночасно відкриється частина m -ї зони. Це приведе до зменшення інтенсивності. При деякому положенні точки P' інтенсивність досягає мінімуму. Якщо зміститися від центра картини ще далі, диск перекрийє додатково частину $(m+2)$ -ї зони, одночасно відкриється частина $(m-1)$ -ї зони. У результаті інтенсивність зростає й у точці P'' досягне максимуму.

Таким чином, у випадку непрозорого диска дифракційна картина має вигляд світлих і темних концентричних кілець, які чергуються. У центрі дифракційної картини знаходиться світла пляма (рис. 57.2). Зміна інтенсивності світла I залежно від відстані r від центра картини зображена на рис. 57.1 б.

Якщо диск закрийє лише невелику частину центральної зони Френеля, він зовсім не відкидає тіні – освітленість екрана всюди залишається такою самою, як і за умови відсутності перешкоди. Якщо диск закрийє багато зон Френеля, чергування світлих і темних

кілець спостерігається тільки у вузькій області на межі геометричної тіні. У цьому випадку $A_{m+1} \ll A_1$, світла пляма в центрі відсутня, і освітленість в області геометричної тіні практично всюди дорівнює нулю.

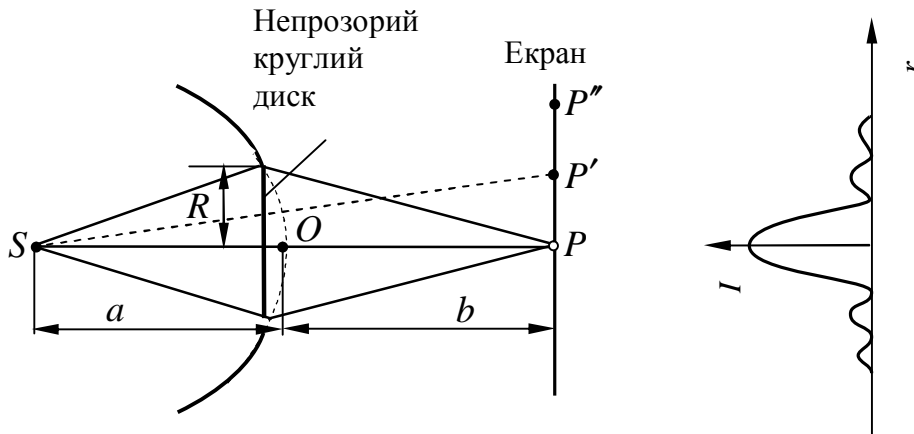


Рисунок 57.1 а – Схема отримання дифракції на диску; б – графік інтенсивності

3 Світла пляма в центрі тіні, що відкидається диском, стала причиною інциденту, який відбувся між Пуассоном і Френелем. Паризька академія наук запропонувала дифракцію світла як тему для отримання премії за 1818 р. Засновники конкурсу були прихильниками корпускулярної теорії світла й розраховували, що конкурсні роботи принесуть остаточну перемогу їх теорії. Однак Френелем була подана робота, у якій всі відомі на той час оптичні явища пояснювалися з точки зору хвильової теорії. Розглядаючи цю роботу, Пуассон, який був членом конкурсної комісії, звернув увагу на те, що з теорії Френеля випливає «безглуздий» висновок: у центрі тіні, яка відкидається невеликим диском, повинна знаходитись світла пляма. Араго відразу зробив дослід і з'ясував, що така пляма дійсно існує. Це принесло перемогу й загальне визнання хвильової теорії світла.

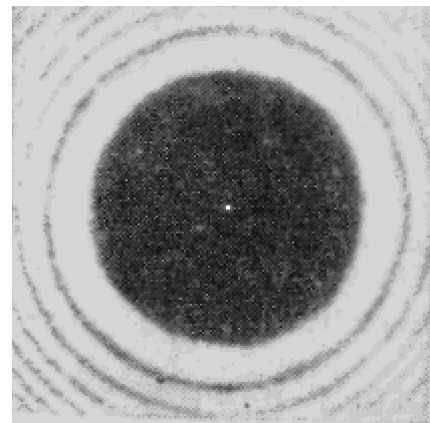


Рисунок 57.2 – Картина, яка утворюється при дифракції на диску

§ 58 Дифракція Фраунгофера на щілині. Амплітуда й інтенсивність світла, максимуми й мінімуми [5]

1 Розглянемо дифракцію Фраунгофера на щілині (дифракцією Фраунгофера називають дифракцію в паралельних променях). Візьмемо дуже довгу вузьку прямокутну щілину шириною b , на яку падає нормально плоска світлова хвиля (рис. 58.1). Помістимо за щілиною збиральну лінзу, а у фокальній площині лінзи екран. Хвильові поверхні падаючої хвилі, площина щілини й екран паралельні один одному. Відповідно до принципу Гюйгенса-Френеля елементарні

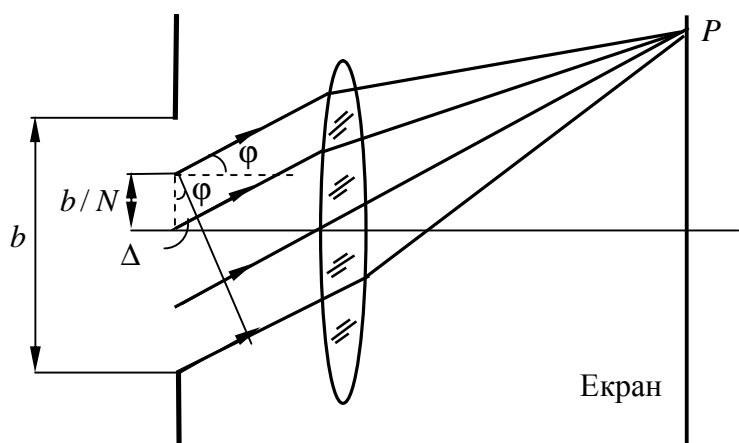


Рисунок 58.1 – Схема спостереження дифракції Фраунгофера на щілині

ділянки відкритої частини хвильової поверхні є джерелами вторинних хвиль, а світлове поле за щілиною знаходиться як результат інтерференції цих когерентних вторинних хвиль. Знайдемо, використовуючи принцип Гюйгенса-Френеля, амплітуду і інтенсивність світла на екрані як функцію кута відхилення від прямолінійного напрямку поширення φ .

Розіб'ємо відкриту частину хвильової поверхні на N однакових паралельних краях щілини елементарних зон шириною b/N . Кожна однакова зона створює в точці P коливання з однаковими амплітудами, які обернено пропорційні числу зон N :

$$\Delta A = A_0 / N \quad (58.1)$$

(зміст коефіцієнта A_0 з'ясується далі). Лінза збирає у фокальній площині плоскі хвилі від елементарних зон, які інтерферують між собою. Різницю ходу для двох сусідніх зон, відстань між якими b/N , знаходимо з рисунка 58.1: $\Delta = (b/N)\sin\varphi$. Відповідна різниця фаз коливань, що збуджуються у точці P сусідніми зонами, дорівнює

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{2\pi b \sin\varphi}{\lambda N}. \quad (58.2)$$

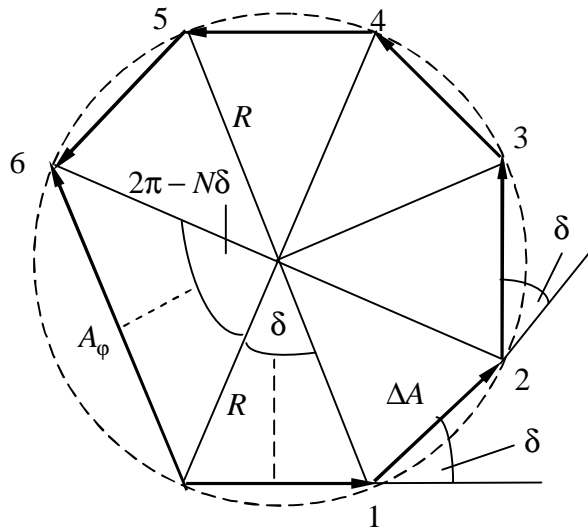


Рисунок 58.2 – Векторна діаграма для визначення амплітуди A_φ суми N коливань із однакою амплітудою ΔA , зміщених за фазою одна відносно одної на кут δ . Рисунок виконаний для $N=6$

Таким чином, у точці P інтерферують N хвиль із однакою амплітудою A_0/N , які мають зміщення за фазою відносно одна одної на кут δ . Тоді результуюче коливання буде визначатися сумою коливань, які створюють N елементарних зон:

$$A_\varphi \cos(\omega t + \alpha) = \Delta A \cos(\omega t) + \Delta A \cos(\omega t + \delta) + \dots + \Delta A \cos(\omega t + (N-1)\delta). \quad (58.3)$$

2 Знайдемо амплітуду результуючого коливання A_φ (58.3), використовуючи метод векторних діаграм. Згідно з методом векторних діаграм кожне коливання зображується вектором, модуль якого дорівнює амплітуді коливання, а кут між напрямком цього вектора та напрямком, який взято за вихідний, дорівнює початковій фазі коливання. Відповідно до (58.3) вектори усіх коливань мають однакову амплітуду ΔA . Початкові фази коливань є різними і відрізняються на одну і ту саму величину, що дорівнює δ . Якщо скласти ці вектори геометрично, то неважко побачити, що вони утворюють частину багатокутника, який вписано в коло радіусом R . З рисунка випливає, що:

$$\Delta A / 2 = R \sin(\delta / 2),$$

$$A_\varphi / 2 = R \sin[(2\pi - N\delta) / 2] = R \sin(\pi - N\delta / 2) = R \sin(N\delta / 2).$$

Виключивши R із цих рівнянь, одержимо співвідношення

$$A_{\varphi} = \Delta A \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}, \quad (58.4)$$

яке виражає амплітуду A_{φ} через амплітуду ΔA й зміщення за фазою δ .

3 Коли замість ΔA у формулу (58.4) підставимо вираз (58.1), а замість δ – вираз (58.2), то отримаємо

$$A_{\varphi} = \frac{A_0}{N} \frac{\sin[(\pi b/\lambda)\sin\varphi]}{\sin[(\pi b/N\lambda)\sin\varphi]}.$$

Цей вираз є наближеним. Він буде тим більш точним, чим меншими будуть елементарні зони, тобто чим більшим буде N . Тоді знаменник набере вигляду

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \{N \sin[(\pi b/N\lambda)\sin\varphi]\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sin[(\pi b/N\lambda)\sin\varphi]}{(\pi b/N\lambda)\sin\varphi} \right\} (\pi b/\lambda)\sin\varphi = 1 \cdot (\pi b/\lambda)\sin\varphi.$$

Тут використали, що $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \{\sin\alpha/\alpha\} = 1$. Таким чином, вираз для амплітуди у точці P можемо записати

$$A_{\varphi} = A_0 \frac{\sin[(\pi b/\lambda)\sin\varphi]}{(\pi b/\lambda)\sin\varphi}. \quad (58.5)$$

З'ясуємо фізичний зміст константи A_0 . Для цього розглянемо вираз (58.5) для випадку, коли кут φ прямує до нуля. Використовуючи $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \{\sin\alpha/\alpha\} = 1$, знаходимо, що в цьому випадку A_{φ} дорівнює A_0 . Звідси випливає, що A_0 є амплітудою усередині дифракційної картини (проти центра лінзи).

Інтенсивність світла пропорційна квадрату амплітуди. Отже,

$$I_{\varphi} = I_0 \frac{\sin^2[(\pi b/\lambda)\sin\varphi]}{[(\pi b/\lambda)\sin\varphi]^2}. \quad (58.6)$$

де I_0 – інтенсивність усередині інтерференційної картини (при $\varphi = 0$); I_{φ} – інтенсивність у точці, положення якої визначається даним значенням φ .

4 Проаналізуємо отриманий результат. Як з'ясували вище, коли $\varphi = 0$, то $I_{\varphi} = I_0$. Далі, прирівнюючи чисельник до нуля, знаходимо умову мінімуму інтенсивності

$$\sin^2[(\pi b/\lambda)\sin\varphi] = 0, \quad (\pi b/\lambda)\sin\varphi = \pm k\pi \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

тобто

$$b \sin\varphi = \pm k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (58.7)$$

Таким чином, умова (58.7) визначає положення **мінімумів інтенсивності**.

Між мінімумами інтенсивності, які визначаються умовами (58.7), знаходяться максимуми різних порядків. Досліджуючи функцію (58.6) на екстремум, можемо знайти їх положення. Наближено можна вважати, що максимуми знаходяться посередині між сусідніми мінімумами.

Графік функції (58.6) зображений на рис. 58.3. Вздовж осі абсцис відкладені значення $\sin\varphi$, осі ординат – інтенсивність I_{φ} .

З умови (58.7) випливає, що $\sin\varphi = \pm k\lambda/b$. Модуль синуса не може перевищити одиницю. Тому $k\lambda/b < 1$, звідки

$$k \leq b/\lambda. \quad (58.8)$$

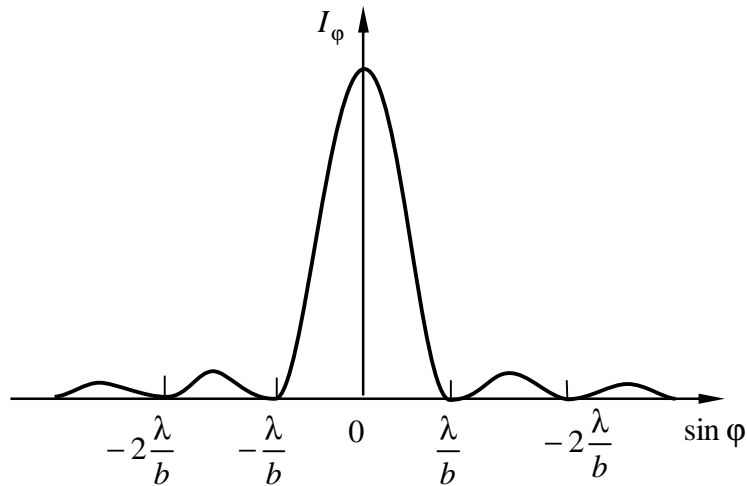


Рисунок 58.3 – Дифракційна картина від однієї щілини (залежність I_φ від $\sin \varphi$)

Таким чином, кількість мінімумів інтенсивності визначається відношенням ширини щілини b до довжини хвилі λ . При ширині щілини, меншій за довжину хвилі, мінімуми взагалі не виникають. У цьому випадку інтенсивність світла монотонно зменшується від середини дифракційної картини до її країв.

§ 59 Дифракція Фраунгофера на дифракційних решітках. Амплітуда й інтенсивність світла, максимуми й мінімуми [5]

1 Дифракційною решіткою називається оптичний прилад, що складається з великого числа однакових, віддалених одна від одної на однакову відстань щілин (рис. 59.1). Відстань між серединами сусідніх щілин називається **періодом решітки**.

Розмістимо паралельно решітці збиральну лінзу, у фокальній площині якої помістимо екран. З'ясуємо характер дифракційної картини, яка утворюється на екрані під час падіння на решітку плоскої світлової хвилі (для спрощення математичних розрахунків будемо вважати, що хвиля падає на решітку нормально). Дифракційна картина, яку дає на екрані одна щілина, нам відома з попереднього параграфа. Дифракційну картину від усіх щілин знайдемо, використовуючи принцип Гюйгенса-Френеля.

Будемо припускати, що довжина просторової когерентності хвилі, що падає, набагато перевищує довжину решітки, так що коливання від усіх щілин можна вважати когерентними. У цьому випадку результуюче коливання в точці P , положення якої визначається кутом φ , являє собою суперпозицію N коливань, які мають однакову амплітуду A_φ та зміщені одна відносно одної за фазою на однакову величину δ . Таким чином, амплітуда результуючого коливання від решітки буде визначатися співвідношенням

$$A_{\text{реши}} \cos(\omega t + \alpha) = A_\varphi \cos(\omega t) + A_\varphi \cos(\omega t + \delta) + \dots + A_\varphi \cos(\omega t + (N - 1)\delta).$$

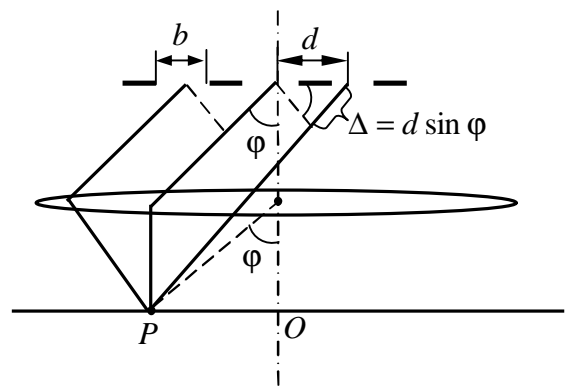


Рисунок 59.1 – Схема спектрального приладу з дифракційною решіткою

Використовуючи метод векторних діаграм, неважко знайти результуючу амплітуду $A_{\text{реши}}$ (аналогічно, як і в попередньому параграфі):

$$A_{\text{реши}} = A_{\phi} \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}.$$

Зрозуміло, що інтенсивність в цьому випадку буде визначатися такою формулою:

$$I_{\text{реши}} = I_{\phi} \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}. \quad (59.1)$$

З рис. 59.1 бачимо, що різниця ходу від сусідніх щілин $\Delta = d \sin \phi$. Отже, різниця фаз

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \phi, \quad (59.2)$$

де λ – довжина хвилі у середовищі.

Підставивши у формулу (59.1) (59.2) для δ й вираз для I_{ϕ} (див. попередній параграф), отримаємо

$$I_{\text{реши}} = I_0 \frac{\sin^2[(\pi b/\lambda)\sin \phi]}{[(\pi b/\lambda)\sin \phi]^2} \cdot \frac{\sin^2[(N\pi d/\lambda)\sin \phi]}{\sin^2[(\pi d/\lambda)\sin \phi]} \quad (59.3)$$

(I_0 – інтенсивність, що створюється однією щілиною проти центра лінзи).

2 Проведемо дослідження отриманого результату (59.3). Перший множник у (59.3) перетворюється в нуль у точках, для яких

$$b \sin \phi = \pm k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (59.4)$$

У цих точках інтенсивність, яка створюється кожною із щілин окремо, дорівнює нулю. Вираз (59.4) визначає умову **мінімумів дифракційної решітки**.

Коли $d \sin \phi = \pm m\lambda$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), то чисельник та знаменник другого множника стають такими, що дорівнюють нулю. Тобто вираз (59.3) стає невизначеним. Розкриваючи невизначеність за допомогою правила Лопіталя, отримуємо

$$\begin{aligned} \lim_{d \sin \phi \rightarrow m\lambda} \left(\frac{\sin[(N\pi d/\lambda)\sin \phi]}{\sin[(\pi d/\lambda)\sin \phi]} \right) &= \lim_{x \rightarrow m\pi} \left(\frac{\sin(Nx)}{\sin(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow m\pi} \left(\frac{(\sin(Nx))'_x}{(\sin(x))'_x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow m\pi} \left(\frac{N \cos(Nx)}{\cos(x)} \right) = \frac{N \cos(Nm\pi)}{\cos(m\pi)} = \pm \frac{N \cdot 1}{1} = \pm N. \end{aligned}$$

Це означає, що другий множник у (59.3) набуває значення N^2 в точках, що задовольняють умову

$$d \sin \phi = \pm m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (59.5)$$

З фізичної точки зору це означає, що для напрямків, які визначаються умовою (59.5), коливання від окремих щілин взаємно підсилюють одна одну, внаслідок чого амплітуди коливань у відповідній точці екрана додаються:

$$A_{\text{max}} = NA_{\phi}, \quad (59.6)$$

де A_{ϕ} – амплітуда коливання, що утворюється однією щілиною під кутом ϕ .

Умова (59.5) визначає положення максимумів інтенсивності, які називаються **головними**. Число m дає **порядок головного максимуму**.

Піднісши рівність (59.6) у квадрат, отримаємо, що інтенсивність I_{max} у N^2 раз більше від інтенсивності I_{ϕ} , яка створюється у напрямку ϕ однією щілиною:

$$I_{\max} = N^2 I_{\phi}. \quad (59.7)$$

Зрозуміло, що коли умови (59.5) та (59.4) збігаються, то має місце мінімум інтенсивності. Це пов'язано з тим, що в цьому випадку інтенсивність від кожної щілини дорівнює нулю. Сума нульових інтенсивностей дасть також нульову інтенсивність.

Крім мінімумів, що обумовлені співвідношенням (59.4), у проміжках між сусідніми головними максимумами є $N-1$ додаткових мінімумів. Вони виникають у тих напрямках, для яких коливання від окремих щілин взаємно гасять один одного. Умову додаткових мінімумів можна легко знайти, прирівнявши чисельник другого множника (59.3) до нуля:

$$\sin[(N\pi d / \lambda)\sin \varphi] = 0.$$

Звідси знаходимо умову додаткових мінімумів

$$d \sin \varphi = \pm \frac{k'}{N} \lambda \quad (59.8)$$

($k' = 1, 2, \dots, N-1, N+1, 2N-1, 2N+1, \dots$). У формулі (59.8) k' набуває всіх цілих значень, крім $0, N, 2N, \dots$, тобто крім тих, за яких умова (59.8) переходить в (59.5).

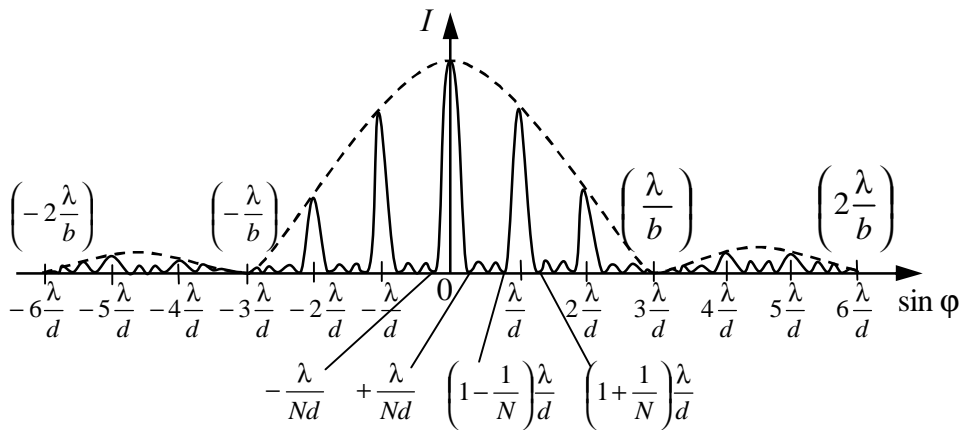


Рисунок 59.2 – Дифракційна картина від решітки для $N=4$ й $d/b=3$. Штриховою лінією показана інтенсивність I_{ϕ} від однієї щілини, яка помножена на N^2 . Головні максимуми 3-го й 6-го порядків збіглися з мінімумами інтенсивності від однієї щілини

Між додатковими мінімумами розміщені слабкі вторинні максимуми. Число таких максимумів, що знаходяться на проміжку між сусідніми головними максимумами, дорівнює $N-2$.

На рис. 59.2 наведений графік функції (59.3) для $N=4$ та $d/b=3$. Штрихова лінія, що проходить через вершини головних максимумів, зображує інтенсивність від однієї щілини, яка помножена на N^2 (див. (59.7)). При $d/b=3$ головні максимуми 3-го, 6-го й т.д. порядків збігаються з мінімумами інтенсивності від однієї щілини, внаслідок чого ці максимуми зникають.

Кількість головних максимумів, які можливо спостерігати, визначається відношенням періоду решітки до довжини хвилі. Виходячи з того, що модуль $\sin \varphi$ не може перевищити одиниці, з формули (59.5) отримуємо

$$m \leq d / \lambda. \quad (59.9)$$

§ 60 Дисперсія і роздільна здатність дифракційних решіток. Роздільна здатність об'єктива [5]

1 Дисперсія дифракційної решітки. Відомо, що дифракційна решітка, як і призма, розкладає світло в спектр. Характеристиками спектрального приладу є його дисперсія й роздільна здатність. *Дисперсія* визначає кутову (або лінійну) відстань між двома спектральними лініями, які відрізняються за довжиною хвилі на одиницю (наприклад, на 1 нм).

Кутовою дисперсією називається величина

$$D = \delta\varphi / \delta\lambda, \quad (60.1)$$

де $\delta\varphi$ – кутова відстань між спектральними лініями, які відрізняються за довжиною хвилі на $\delta\lambda$.

Лінійною дисперсією називають величину

$$D_{\text{лин}} = \delta l / \delta\lambda,$$

де δl – відстань на екрані або на фотопластинці між спектральними лініями, довжини хвиль яких відрізняються на $\delta\lambda$.

Щоб знайти кутову дисперсію дифракційної решітки, продиференціюємо умову головного максимуму за φ :

$$d \sin \varphi = m\lambda,$$

вважаючи, що $\lambda = \lambda(\varphi)$ є функцією від φ . Опустивши знак мінус, отримуємо

$$d \cos \varphi = m(\delta\lambda / \delta\varphi).$$

Звідси

$$D = \delta\varphi / \delta\lambda = m / (d \cos \varphi).$$

У межах невеликих кутів $\cos \varphi \approx 1$, тому можна вважати

$$D \approx m / d. \quad (60.2)$$

Таким чином, *кутова дисперсія дифракційної решітки* обернено пропорційна періоду d . Чим вище порядок спектра m , тим більше дисперсія.

2 Роздільна здатність дифракційної решітки. Роздільна здатність визначає мінімальну різницю довжин хвиль $\delta\lambda$, при якій дві лінії сприймаються в спектрі роздільно. *Роздільною здатністю* спектрального приладу називають безрозмірну величину

$$R = \lambda / \delta\lambda, \quad (60.3)$$

де $\delta\lambda$ – мінімальна різниця довжин хвиль двох спектральних ліній, при якій ці лінії сприймаються роздільно.

Можливість роздільного сприйняття двох близьких спектральних ліній залежить не тільки від відстані між ними (яке визначається дисперсією приладу), але також і від ширини спектрального максимуму. На рис. 60.1 показана результуюча інтенсивність (суцільні криві), яка спостерігається при накладенні двох близьких максимумів (штрихові криві). У випадку *a* обидва максимуми сприймаються як один. У випадку *б* між максимумами лежить мінімум. Два близьких максимуми сприймаються оком роздільно в тому випадку, якщо інтенсивність у проміжку між ними становить не більше 80 % від інтенсивності максимуму. Відповідно до *критерію, запропонованого Релеєм*, таке співвідношення

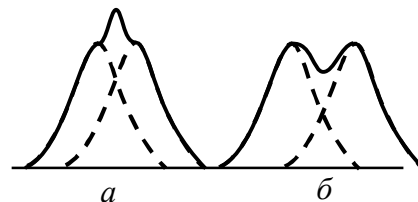


Рисунок 60.1 *a* – Дві близькі спектральні лінії зливаються в одну; *б* – якщо край одного максимуму збігається із серединою іншого, спектральні лінії сприймаються роздільно

інтенсивності має місце в тому випадку, якщо середина одного максимуму збігається із краєм іншого (рис. 60.16). Таке взаємне розміщення максимумів має місце при певному (для даного приладу) значенні $\delta\lambda$.

Знайдемо роздільну здатність дифракційної решітки. Положення середини m -го максимуму для довжини хвилі $\lambda + \delta\lambda$ визначається умовою

$$d \sin \varphi_{\max} = m(\lambda + \delta\lambda).$$

Краї m -го максимуму для довжини хвилі λ розміщують під кутами, обумовленими співвідношенням

$$d \sin \varphi_{\min} = (m \pm 1/N)\lambda.$$

Середина максимуму для довжини хвилі $\lambda + \delta\lambda$ збігається з краєм максимуму для довжини хвилі λ в тому випадку, коли

$$m(\lambda + \delta\lambda) = (m + 1/N)\lambda.$$

Звідси

$$m\delta\lambda = \lambda / N.$$

Знайшовши із цієї рівності відношення λ до $\delta\lambda$, отримуємо вираз для *роздільної здатності дифракційної решітки*

$$\boxed{R = mN}. \quad (60.4)$$

Таким чином, роздільна здатність дифракційної решітки пропорційна числу щілин N і порядку спектра m .

Дифракційні решітки виготовляються шляхом нанесення алмазним різцем на поверхню скляної пластинки рівновіддалених штрихів. Роль щілин відіграють проміжки між штрихами. Кращі решітки мають до 1200 штрихів на 1 мм ($d \approx 800$ нм).

3 Роздільна здатність об'єктива.

Роздільною здатністю об'єктива називається величина R , зворотна найменшій кутовій відстані $\delta\psi$ між точками, при якій вони ще сприймаються роздільно:

$$\boxed{R = 1/\delta\psi}. \quad (60.5)$$

На рис. 60.2 показана картина дифракції Фраунгофера на круглому отворі. Вона має вигляд центральної світлої плями, оточеної темними й світлими кільцями, які чергуються між собою. Відповідний розрахунок показує, що перший мінімум віддалений від центра дифракційної картини на кутову відстань

$$\varphi_{\min} = \arcsin(1,22\lambda / D), \quad (60.6)$$

де D – діаметр отвору. Коли $D \gg \lambda$, то можна вважати, що

$$\varphi_{\min} = 1,22\lambda / D. \quad (60.7)$$

Переважає частина (близько 84%) світлового потоку, що проходить через отвір, потрапляє в область центральної світлої плями.

Інтенсивність першого світлого кільця становить усього 1,74%, а другого – 0,41 % від інтенсивності центральної плями. Інтенсивність інших світлих кілець ще менше. Тому в першому наближенні дифракційну картину можна вважати такою, що складається з однієї лише світлої плями з кутовим радіусом, яка визначається формулою (60.6). Ця пляма є, по

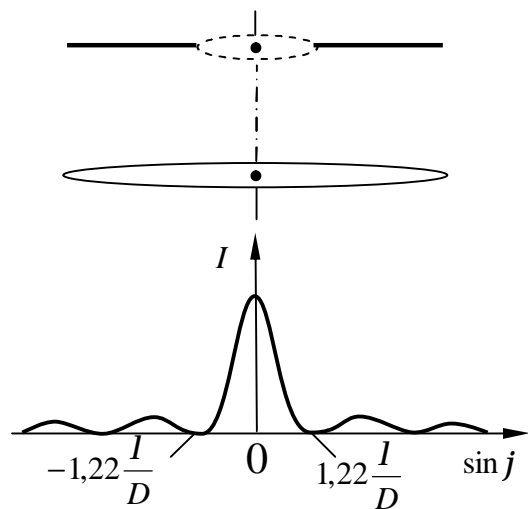


Рисунок 60.2 – Плоска світлова хвиля падає перпендикулярно на перешкоду із круглим отвором. Унизу показана інтенсивність світла на екрані, розміщеному у фокальній площині лінзи

суті, зображенням нескінченно віддаленого точкового джерела світла (на отвір падає плоска світлова хвиля).

Дифракційна картина не залежить від відстані між отвором і лінзою. Зокрема, вона буде такою самою і у випадку, коли краї отвору суміщені з краями лінзи. Звідси випливає, що найдосконаліша лінза не може дати ідеального оптичного зображення. Внаслідок хвильової природи світла зображення точки, яка дається лінзою, має вигляд плями, що являє собою центральний максимум дифракційної картини. Кутовий розмір цієї плями зменшується при збільшенні діаметра оправы лінзи.

При дуже малій кутовій відстані між двома точками їх зображення, яке отримуємо за допомогою якого-небудь оптичного приладу, накладаються один на одного й дають одну пляму. Отже, дві дуже близькі точки не будуть сприйматися за допомогою приладу роздільно, або, як кажуть, не будуть розділятися приладом. Тому, яким би великим не було зображення, на ньому не видно відповідних деталей.

Знайдемо роздільну здатність об'єктива зорової труби або фотоапарата для випадку, коли розглядаються або фотографуються дуже віддалені предмети. За цієї умови промені, які йдуть в об'єктив від кожної точки предмета, можна вважати паралельними й користуватися формулою (60.6). Відповідно до критерію Релея дві близькі точки будуть ще розрізнені, якщо середина центрального дифракційного максимуму для однієї точки збігається із краєм центрального максимуму (тобто першим мінімумом) для іншої точки. На рис. 60.3 видно, що це відбудеться, коли кутова відстань між точками $\delta\psi$ буде дорівнювати їх кутовому радіусу (60.6). Діаметр оправы об'єктива D набагато більше від довжини хвилі λ . Тому можна вважати, що

$$\delta\psi = 1,22\lambda / D \approx \lambda / D.$$

Звідки

$$\boxed{R \approx D / \lambda} \quad (60.9)$$

Отже, роздільна здатність об'єктива пропорційна його діаметру.

Діаметр зіниці ока при нормальному освітленні дорівнює приблизно 2 мм. Підставивши це значення у формулу (60.8) і взявши $\lambda = 500$ нм, отримаємо

$$\delta\psi \approx 500 \cdot 10^{-9} / (2 \cdot 10^{-3}) = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ рад} \approx 1'.$$

Таким чином, мінімальна кутова відстань між точками, які око сприймає ще роздільно, дорівнює одній кутовій хвилині. Цікаво, що відстань між сусідніми світлочутливими елементами сітківки ока відповідає цій кутовій відстані.

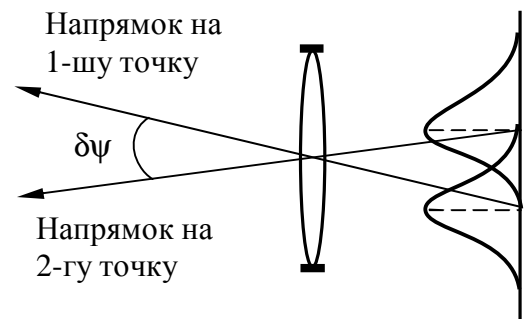


Рисунок 60.3 – Якщо край одного максимуму збігається із серединою іншого, точки сприймаються роздільно

§ 61 Дифракція на просторових структурах. Закон Вульфа-Брегга. Рентгенівська спектроскопія. Рентгеноструктурний аналіз [5]

1 Розмістимо дві дифракційні решітки одну за одною так, щоб їх штрихи були взаємно перпендикулярними. Перша решітка (штрихи якої, скажімо, вертикальні) дасть у горизонтальному напрямку ряд максимумів, положення яких визначаються умовою

$$d_1 \sin \varphi_1 = \pm m_1 \lambda \quad (m_1 = 0, 1, 2, \dots) \quad (61.1)$$

Друга решітка (з горизонтальними штрихами) розіб'є кожний із утворених першою решіткою пучків на розміщені вздовж вертикалі максимуми, положення яких визначаються умовою

$$d_2 \sin \varphi_2 = \pm m_2 \lambda \quad (m_2 = 0, 1, 2, \dots) \quad (61.2)$$

У результаті дифракційна картина буде мати вигляд правильно розміщених плям, кожній з яких відповідають два цілих індекси m_1 й m_2 (рис. 61.1).

Таку ж дифракційну картину отримаємо, коли замість двох різних решіток взяти одну прозору пластинку з нанесеними на неї двома системами взаємно перпендикулярних штрихів. Подібна пластинка являє собою двовимірну періодичну структуру (звичайна решітка – одновимірну структуру). Вимірявши кути φ_1 й φ_2 , які визначають положення максимумів, і знаючи довжину хвилі λ , можна знайти за формулами (61.1) і (61.2) періоди структури d_1 й d_2 . Якщо напрями, у яких структура періодична (наприклад, напрями, які перпендикулярні до штрихів решіток), утворять кут α , відмінний від нуля, дифракційні максимуми розмістяться не у вершинах прямокутників (як на рис. 61.1), а у вершинах паралелограмів. У цьому випадку за дифракційною картиною можна визначити не тільки періоди d_1 і d_2 , але й кут α .

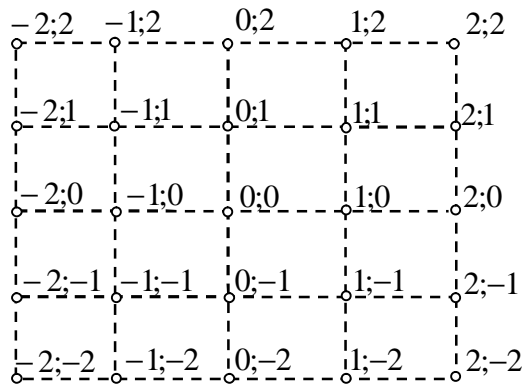


Рисунок 61.1 – Дифракційна картина від двовимірної періодичної структури

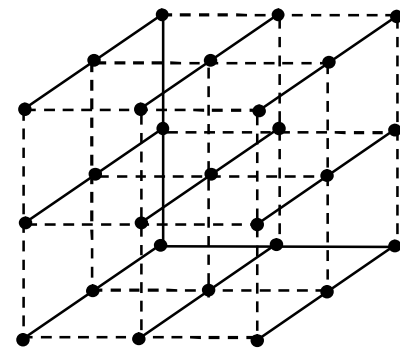


Рисунок 61.2 – Тривимірна періодична структура (кристал)

Дифракційну картину, аналогічну до зображеної на рис. 61.1, дають будь-які двовимірні періодичні структури, наприклад, система невеликих отворів або система непрозорих маленьких кульок.

Для виникнення дифракційних максимумів необхідно, щоб період структури d був більше λ . У іншому випадку умови (61.1) і (61.2) можуть бути задоволені тільки при значеннях m_1 і m_2 , які дорівнюють нулю (модуль $\sin \varphi$ не може перевищувати одиниці).

Дифракція спостерігається також на тривимірних структурах, тобто просторових системах, які мають періодичність у трьох напрямках, що не лежать в одній площині (рис. 61.2). Подібними структурами є всі кристалічні тіла. Однак їх період (порядку 0,1 нм) занадто малий для того, щоб можна було спостерігати дифракцію у видимому світлі. У випадку кристалів умова $d > \lambda$ виконується тільки для рентгенівських променів. Уперше дифракція рентгенівських променів на кристалах спостерігалася в 1913 р. у досліді Лауе, Фрідріха й Кніппінга (Лауе належить ідея, іншим авторам – реалізація досліді).

2 Російський учений Вульф і англійські вчені У.Г. і У.Л. Брегги показали незалежно один від одного, що розрахунок дифракційної картини від кристалічної решітки можна здійснити у такий спосіб. Проведемо через вузли кристалічної решітки паралельні рівновіддалені площини (рис. 61.3), які ми будемо називати атомними сферами. Якщо хвиля, яка падає на кристал, є плоскою, то огинаюча вторинних хвиль, що створюються атомами, які лежать у такому шарі, також буде плоскою. Таким чином, сумарну дію атомів, що лежать в одному і тому самому шарі, можна подати у вигляді плоскої хвилі, яка відбилася від атомного шару за звичайним законом відбиття.

Плоскі вторинні хвилі, що відбилися від різних атомних шарів, когерентні й будуть інтерферувати одна з одною подібно до хвиль, які посилаються в цьому напрямку різними щілинами дифракційної решітки. При цьому, як і у випадку решітки, вторинні хвилі будуть

практично гасити один одну у всіх напрямках, крім тих, для яких різниця ходу між сусідніми хвилями є кратною λ . На рис. 61.3 бачимо, що різниця ходу двох хвиль, які відбилися від сусідніх атомних шарів, дорівнює $2d \sin \theta$, де d – період кристала в напрямку, перпендикулярному до розглянутих шарів; θ – кут, додатковий до кута падіння, який називають **кутом ковзання** падаючих променів. Отже, напрями, у яких отримуємо дифракційні максимуми, визначаються умовою

$$2d \sin \theta = \pm m\lambda \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (61.3)$$

Це співвідношення називається **формулою Вульфа-Брегга (закон Вульфа-Брегга)**.

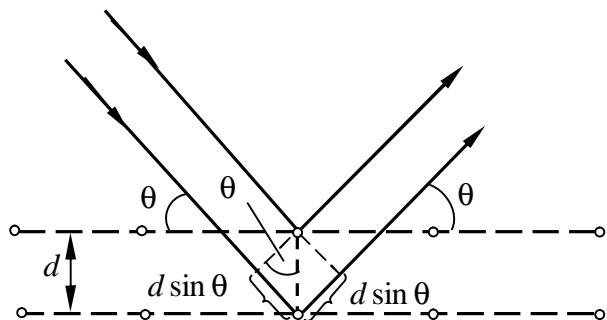


Рисунок 61.3 – Різниця ходу хвиль, відбитих від двох сусідніх атомних шарів, дорівнює $2d \sin \theta$

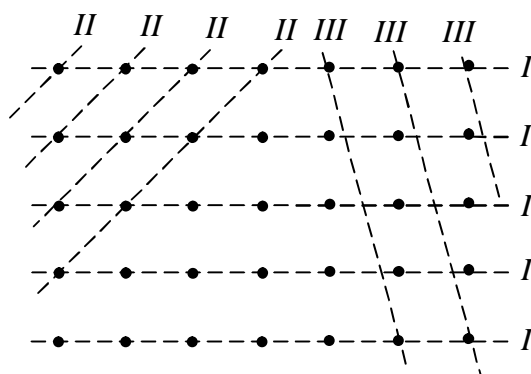


Рисунок 61.4 – Три системи атомних шарів, які відрізняються густиною атомів

Атомні шари в кристалі можна провести великою кількістю способів (рис. 61.4). Кожна система шарів може дати дифракційний максимум, якщо для неї виявиться виконаною умова (61.3). Однак помітну інтенсивність будуть мати тільки ті максимуми, які отримуємо за рахунок відбиття від шарів, які досить густо «засіяні» атомами (наприклад, від шарів I і II на рис. 61.4).

3 Дифракція рентгенівського випромінювання на кристалах застосовується у двох основних випадках. Вона використовується для дослідження спектрального складу рентгенівського випромінювання (**рентгенівська спектроскопія**) і для вивчення структури кристалів (**рентгеноструктурний аналіз**).

Визначаючи напрями максимумів, які утворюються при дифракції досліджуваного рентгенівського випромінювання на кристалах з відомою структурою, можна обчислити довжини хвиль. Спочатку для визначення довжин хвиль були використані кристали кубічної системи, причому міжплощинні відстані визначалися з густини й відносної молекулярної маси кристала.

У методі структурного аналізу, запропонованому Лауе, пучок «білого» (тобто з різними довжинами хвиль) рентгенівського випромінювання спрямовувався на монокристал. Для кожної системи шарів, досить густо «засіяних» атомами, знаходимо довжину хвилі, для якої виконується умова (61.3). Тому на поміщеній за кристалом фотопластинці утворюється (після проявлення) сукупність темних плям. Взаємне розміщення плям відображає симетрію кристала. За відстанями між плямами й за їх інтенсивностями вдається знайти розміщення атомів у кристалі й відстані між ними. На рис. 61.5 наведена лауєграма берилу (мінералу із групи силікатів).

У методі структурного аналізу, розробленому Дебаєм і Шерером, використовуються монохроматичне рентгенівське випромінювання й полікристалічні зразки. Досліджувана речовина подрібнюється в порошок, з якого пресується зразок у вигляді дротинки. Зразок установлюється вздовж осі циліндричної камери, на бічну поверхню якої укладається фотоплівка (рис. 61.6). У величезній кількості хаотично орієнтованих кристаликів знайдеться багато таких, для яких виявиться виконаною умова (61.3). Причому дифрагований промінь

для різних кристаликів буде лежати у різних площинах. У результаті для кожної системи атомних шарів і кожного значення m вийде не один напрям максимуму, а конус напрямків, вісь якого збігається з напрямом пучка (див. рис. 61.6). Картина, яку отримуємо на плівці (дебаєграма), має вигляд, як на рис. 61.7. Кожна пара симетрично розміщених ліній відповідає одному з дифракційних максимумів, які задовольняють умову (61.3) при деякому значенні m . Розшифрування рентгенограми дозволяє визначити структуру кристала.

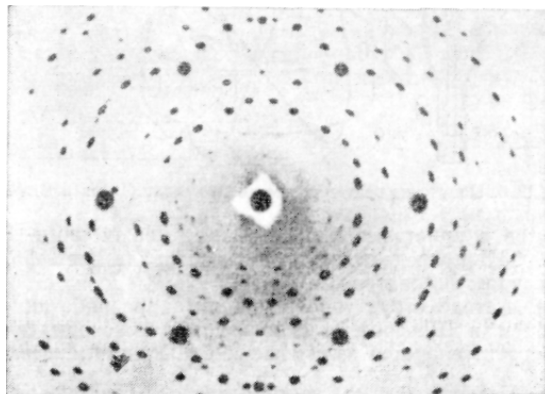


Рисунок 61.5 – Лауєграма берилу

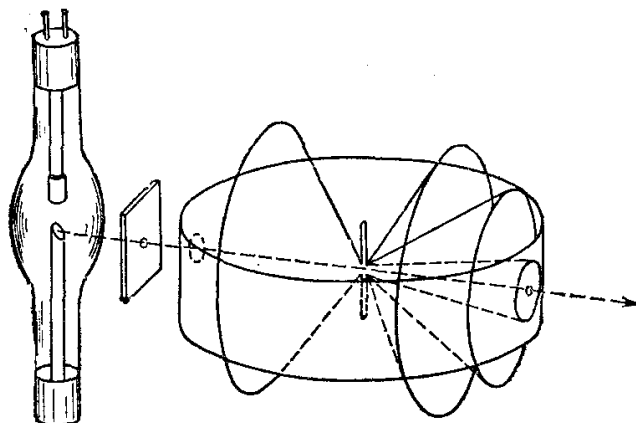


Рисунок 61.6. – Одержання рентгенограми за методом Дебая й Шерера



Рисунок 61.7 – Дебаєграма

ТЕМА 9 ПОЛЯРИЗАЦІЯ СВІТЛА

§ 62 Поляризоване й природне світло. Поляризатор. Ступінь поляризації [5]

1 При вивченні інтерференції й дифракції ми не звертали уваги на поперечність світлових коливань, припускаючи, що коливання мають один і той самий напрямок. Перейдемо тепер до вивчення явищ поляризації світла, тобто таких явищ, які пов'язані з поперечністю електромагнітних хвиль.

Світло, у якого напрями коливань упорядковані будь-яким чином, називається **поляризованим**.

Якщо коливання світлового вектора відбуваються тільки в одній площині, яка проходить через напрямок поширення променя, то таке світло називається **плоско- (або лінійно) поляризованим**. Площина, в якій відбуваються коливання світлового вектора, називається **площиною коливань**, або **площиною поляризації** (див. рис. 62.1).

Упорядкованість коливань може полягати й у тому, що вектор \vec{E} може обертатися відносно променя, одночасно змінюючись за величиною. У результаті кінець вектора \vec{E} описує еліпс (див. рис. 62.2). Таке світло називається **еліптично поляризованим**. Якщо кінець вектора \vec{E} описує коло, то таке світло називається **поляризованим по колу**. Зрозуміло, що еліптично поляризоване світло можна подати як сукупність двох взаємно перпендикулярних лінійнополяризованих променів світла.

2 У природному світлі коливання різних перпендикулярних до променя напрямків невпорядковано змінюють один одного. Всі напрями коливань природного світла мають однакову ймовірність. Таким чином, природне світло можна подати як сукупність двох некогерентних електромагнітних хвиль, які поляризовані у взаємно перпендикулярних площинах і мають однакові інтенсивності. Таке уявлення про природне світло суттєво спрощує розгляд проходження природного світла через поляризаційні пристрої.

3 Плоскополяризоване світло можна отримати із природного за допомогою приладів, які називаються поляризатори. **Поляризатори** вільно пропускають коливання, паралельні площині, яку називають **площиною поляризатора**, і повністю або частково затримують коливання, які перпендикулярні до цієї площини. Поляризатор, що затримує перпендикулярні до його площини коливання тільки частково, будемо називати **неідеальним**. Просто поляризатором ми будемо називати **ідеальний поляризатор**, який повністю затримує коливання, перпендикулярні до його площини, і не послабляє коливань, паралельних площині.

На виході з неідеального поляризатора отримуємо світло, у якому коливання одного напрямку переважають над коливаннями інших напрямків. Таке світло називається **частково поляризованим**. Його можна розглядати як суміш природного й плоскополяризованого. Частково поляризоване світло, як і природне, можна подати у вигляді накладення двох некогерентних плоскополяризованих хвиль із взаємно перпендикулярними площинами коливань. Відмінність полягає в тому, що у випадку природного світла інтенсивність цих хвиль однакова, а у випадку частково поляризованого – різна.

Зазначимо, що поляризатор, який використовувався для дослідження характеру поляризації світла, називають аналізатором.

4 Якщо пропустити частково поляризоване світло через поляризатор, то при його обертанні навколо напрямку поширення світлового променя інтенсивність світла на виході

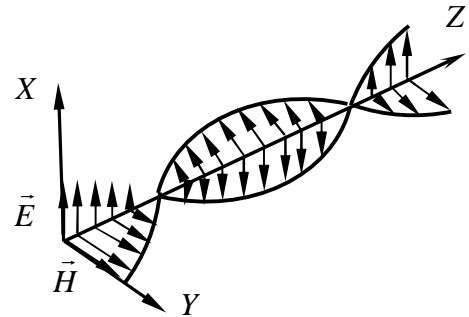


Рисунок 62.1 – «Моментальна фотографія» плоскої лінійно поляризованої світлової хвилі, що поширюється вздовж осі Z . Вектор \vec{E} коливається в площині XZ , вектор \vec{H} – уздовж осі YZ . Площина XZ – площина поляризації

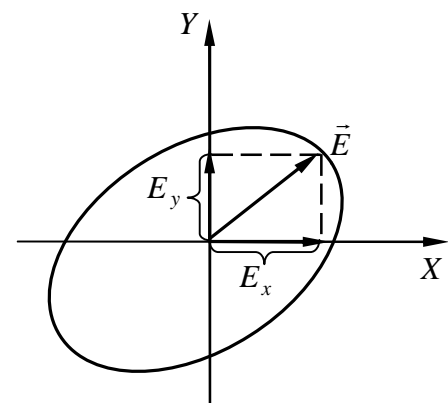


Рисунок 62.2 – В еліптично поляризованому світлі кінець вектора \vec{E} рухається по еліпсу в площині XY , перпендикулярній до напрямку поширення світла (вздовж осі Z)

буде змінюватися в межах від I_{\max} до I_{\min} , причому перехід від одного із цих значень до іншого буде відбуватися при повороті на кут, що дорівнює $\pi/2$. Вираз

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (62.1)$$

визначає **ступінь поляризації**. Для плоскополяризованого світла $I_{\min} = 0$ й $P = 1$; для природного світла $I_{\max} = I_{\min}$ й $P = 0$. До еліптично поляризованого світла поняття ступеня поляризації не застосовується.

§ 63 Закон Малюса. Проходження природного світла через поляризатор [5]

1 Розглянемо, як змінюється інтенсивність лінійно поляризованого світла при проходженні через поляризатор. Нехай на поляризатор падає світло, в якому коливання амплітуди A_0 відбувається в площині, що утворює із площиною поляризатора кут φ (див. рис. 63.1). Розкладемо амплітуду коливання \vec{A}_0 на два коливання з амплітудами

$$A_{\parallel} = A_0 \cos \varphi \quad \text{й} \quad A_{\perp} = A_0 \sin \varphi. \quad (63.1)$$

Зрозуміло, що коливання, яке є паралельним площині поляризатора, повністю пройде через поляризатор, а коливання, яке є перпендикулярним до площини поляризатора, буде затримано (див. рис. 63.2). Інтенсивність пропорційна квадрату амплітуди. Тому якщо на поляризатор падає плоскополяризоване світло інтенсивності $I_0 \sim A_0^2$, то інтенсивність світла на виході поляризатора буде визначатися виразом

$$I \sim (A_{\parallel})^2 = A_0^2 \cos^2 \varphi, \quad \text{або} \quad \boxed{I = I_0 \cos^2 \varphi}, \quad (63.2)$$

де I_0 – інтенсивність плоскополяризованого світла, що падає на поляризатор. Співвідношення (63.2) називають **законом Малюса**.

2 Розглянемо, як змінюється інтенсивність природного світла при проходженні через поляризатор. У цьому випадку також подамо амплітуду світлового вектора \vec{A}_0 , що падає на поляризатор, у вигляді (63.1). Зрозуміло, що і у випадку природного світла через поляризатор пройде тільки складова $A_{\parallel} = A_0 \cos \varphi$, яка паралельна площині поляризатора. Тому інтенсивність на виході з поляризатора буде пропорційною середньому значенню квадрата паралельної складової світлового вектора

$$I \sim \langle A_{\parallel}^2 \rangle = A_0^2 \langle \cos^2 \varphi \rangle. \quad (63.3)$$

У природному світлі кут φ з часом змінюється, усі значення φ мають однакову ймовірність. Тому частина світла, що пройшла через поляризатор, буде пропорційною середньому значенню $\langle \cos^2 \varphi \rangle$, тобто $1/2$. Таким чином, *інтенсивність природного світла після проходження поляризатора дорівнює*

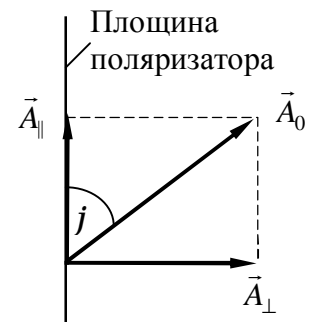


Рисунок 63.1

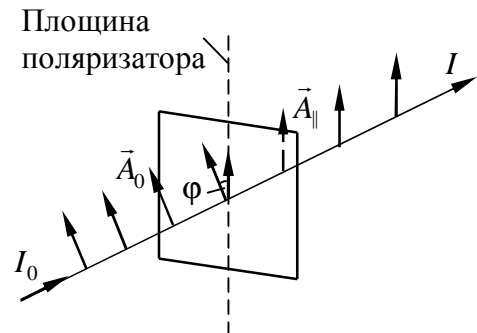


Рисунок 63.2 – Поляризатор пропускає тільки складову світлового коливання, яка паралельна площині пропускання поляризатора і дорівнює $A_{\parallel} = A_0 \cos \varphi$

$$I = I_0 / 2, \quad (63.4)$$

де I_0 – інтенсивність природного світла, що падає на поляризатор.

§ 64 Поляризація світла при відбитті та заломленні. Закон Брюстера [5]

1 З'ясуємо, за яких умов можлива поляризація світла. Коли кут падіння світла на межу розділу двох прозорих діелектриків (наприклад, на поверхню скляної пластинки) відмінний від нуля, то відбитий і заломлений промені виявляються частково поляризованими. У відбитому промені переважають коливання, що перпендикулярні до площини падіння, у заломленому промені – коливання, які паралельні площині падіння (рис. 64.1). Ступінь поляризації залежить від кута падіння.

Позначимо через θ_{Br} кут, який визначається умовою

$$\boxed{\operatorname{tg} \theta_{Br} = n_{12}} \quad (64.1)$$

(n_{12} – показник заломлення другого середовища відносно першого). При куті падіння, що дорівнює θ_{Br} , відбитий промінь є повністю поляризованим (він містить тільки коливання, які перпендикулярні до площини падіння). Ступінь поляризації заломленого променя при куті падіння, що дорівнює θ_{Br} , досягає найбільшого значення, однак цей промінь залишається поляризованим тільки частково. Співвідношення (64.1) називають **законом Брюстера**, а кут θ_{Br} – **кутом Брюстера**.

2 Легко переконатися у тому, що при падінні світла під кутом Брюстера відбитий і заломлений промені взаємно перпендикулярні (див. рис. 64.2). Для цього, крім закону Брюстера (64.1), використаємо закон заломлення

$$\frac{\sin \theta_{Br}}{\sin \gamma} = n_{12}. \quad (64.2)$$

Прирівнюючи (64.1) та (64.2), отримуємо

$$\frac{\sin \theta_{Br}}{\sin \gamma} = n_{12} = \operatorname{tg} \theta_{Br} \equiv \frac{\sin \theta_{Br}}{\cos \theta_{Br}},$$

або

$$\cos \theta_{Br} = \sin \gamma = \cos(\pi/2 - \gamma).$$

Таким чином,

$$\theta_{Br} + \gamma = \pi/2$$

Звідси випливає, що кут α між відбитим і заломленим променями (див. рис. 64.2) дорівнює

$$\alpha = \pi - (\theta_{Br} + \gamma) = \pi - \pi/2 = \pi/2. \quad (64.3)$$

3 Явище поляризації світла при відбитті й заломленні пояснює електромагнітна теорія Максвелла. Ми обмежимося якісним поясненням цього явища. Припустимо, що відбиття й

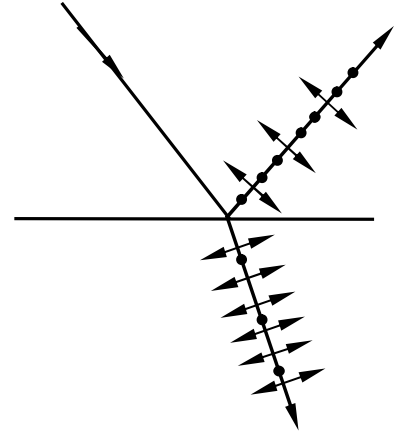


Рисунок 64.1 – У відбитому світлі переважають коливання, що перпендикулярні до площини падіння (вони зображені точками), у заломленому світлі – коливання, які паралельні площині падіння (вони зображені двосторонніми стрілками)

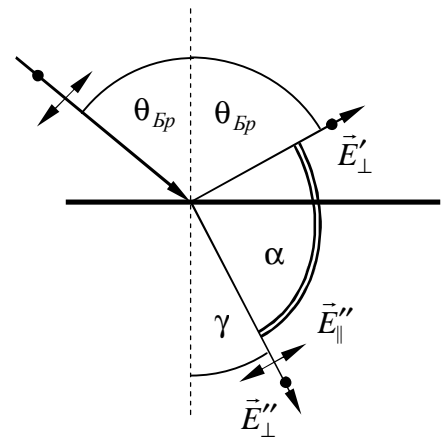


Рисунок 64.2

заломлення відбуваються на межі діелектрика з вакуумом. Падаюча світлова хвиля, проникнувши в діелектрик, змушує оптичні електрони атомів виконувати вимушені коливання. Електрони, які коливаються, випромінюють електромагнітні хвилі, які назвемо вторинними. За межами діелектрика вторинні хвилі формують відбиту хвилю. Усередині діелектрика вторинні хвилі накладаються на падаючу (первинну) хвилю. Результуюча первинної і вторинної хвиль утворюють заломлену хвилю. *Вимушені коливання електронів у діелектрику відбуваються в напрямку вектора*

$$\vec{E}'' = \vec{E}_{\parallel}'' + \vec{E}_{\perp}''$$

цієї результуючої заломленої хвилі (див. рис. 64.2). Тут позначено: \vec{E}_{\parallel}'' – компонента заломленої хвилі, паралельна площині падіння; \vec{E}_{\perp}'' – компонента заломленої хвилі, перпендикулярна до площини падіння.

Зрозуміло, що електрон, який коливається, можна розглядати як електричний диполь. Як відомо, електричний диполь найбільш інтенсивно випромінює у напрямку, який перпендикулярний до дипольного моменту (напрямок коливань електрона). Випромінювання ж у напрямку, який збігається з напрямком коливань електрона, дорівнює нулю.

У випадку, коли світло падає під кутом Брюстера, кут між заломленою та відбитою хвилями дорівнює 90° . Електрони речовини коливаються у напрямку вектора $\vec{E}'' = \vec{E}_{\parallel}'' + \vec{E}_{\perp}''$.

У цьому випадку напрямок \vec{E}_{\parallel}'' збігається з напрямком відбитої хвилі (див. рис. 64.2). Це означає, що складова хвилі, яка паралельна площині падіння, у відбитій хвилі дорівнює нулю. Тобто у відбитій хвилі буде лише перпендикулярна компонента до площини падіння $\vec{E}' = 0 + \vec{E}'_{\perp}$, а отже відбита хвиля буде повністю поляризована.

У природному падаючому промені інтенсивність коливань різних напрямків однакова. Енергія цих коливань розподіляється між відбитою й заломленою хвилями. Тому якщо у відбитому промені буде більша інтенсивність коливань одного напрямку (\vec{E}'_{\perp}), то внаслідок закону збереження енергії в заломленому промені повинна бути більша інтенсивність коливань іншого напрямку (\vec{E}_{\parallel}''). Звідси випливає, що заломлений промінь буде частково поляризованим.

§ 65 Явище подвійної променезаломлюваності. Призма Ніколя. Чвертьхвильова пластинка. Явище дихроїзму [5, 10]

1 *При проходженні світла через всі прозорі кристали, за винятком тих, що належать до кубічної системи, спостерігається явище, яке полягає у тому, що падаючий на кристал промінь розділяється всередині кристала на два промені, які поширюються в загальному випадку з різними швидкостями й у різних напрямках. Це явище отримало назву подвійної променезаломлюваності.*

Кристали, у яких спостерігається явище подвійної променезаломлюваності, розділяються на **одновісні й двовісні**. В одновісних кристалах один із заломлених променів підлягає звичайному закону заломлення. Цей промінь називається **звичайним** і позначається буквою *o*. Для іншого променя, який називають **незвичайним** (його позначають буквою *e*), відношення синусів кута падіння й кута заломлення не залишається сталим при зміні кута падіння. Навіть при нормальному падінні світла на кристал незвичайний промінь у загальному випадку відхиляється від нормалі (рис. 65.1). Крім того, незвичайний промінь не лежить, як правило, в одній площині з падаючим променем і нормаллю до заломлювальної поверхні. Прикладами одновісних кристалів можуть бути ісландський шпат, кварц і турмалін. У двовісних кристалів (слюда, гіпс) обидва промені незвичайні – показники заломлення в них залежать від напрямку в кристалі. Надалі ми обмежимося розглядом тільки одновісних кристалів.

В одновісних кристалах є напрямок, уздовж якого звичайний і незвичайний промені поширюються, не розділяючись, і з однаковою швидкістю. Цей напрямок називається **оптичною віссю кристала**. Варто мати на увазі, що оптична вісь – це не пряма лінія, що проходить через якусь точку кристала, а певний напрям у кристалі. Будь-яка пряма, що є паралельною цьому напрямку, є оптичною віссю кристала.

Будь-яка площина, що проходить через оптичну вісь, називається **головним перерізом, або головною площиною кристала**. Як правило, використовують головний переріз, що проходить також і через світловий промінь.

Дослідження звичайного й незвичайного променів показує, що **обидва промені повністю поляризовані** у взаємно перпендикулярних напрямках (див. рис. 65.1). Площина коливань звичайного променя перпендикулярна до головного перерізу кристала. У незвичайному промені коливання світлового вектора відбуваються в площині, що збігається з головним перерізом. Після виходу з кристала обидва промені відрізняються один від одного тільки напрямом поляризації, так що назви «звичайний» і «незвичайний» промені мають сенс тільки усередині кристала.

Подвійна променезаломлюваність пояснюється **анізотропією кристалів**. У кристалах некубічної системи діелектрична проникність ϵ виявляється залежною від напрямку. В одновісних кристалах ϵ у напрямку оптичної осі й у напрямках, перпендикулярних до неї, має значення ϵ_{\parallel} та ϵ_{\perp} . В інших напрямках ϵ має проміжні значення. Відомо, що показник заломлення має такий зв'язок із діелектричною проникністю: $n = \sqrt{\epsilon}$. Отже, з анізотропії ϵ випливає, що електромагнітним хвилям із різними напрямками коливань вектора \vec{E} відповідають різні значення показника заломлення n . Тому швидкість світлових хвиль залежить від напрямку коливань світлового вектора \vec{E} .

Одновісні кристали характеризують показником заломлення звичайного променя $n_o = c/v_o$ й показником заломлення незвичайного променя, який поширюється перпендикулярно до оптичної осі, $n_e = c/v_e$. Останню величину називають просто показником заломлення незвичайного променя.

У випадку, коли світло падає перпендикулярно на поверхню кристала і при цьому оптична вісь кристала перпендикулярна або паралельна поверхні кристала, то звичайний та незвичайний промені не заломлюються і поширюються не розділяючись. Коли оптична вісь перпендикулярна до поверхні кристала, то промені рухаються вздовж оптичної осі з однаковою швидкістю. Коли оптична вісь паралельна поверхні кристала, то звичайний і незвичайний промені йдуть в одному і тому ж напрямку, але поширюються з різною швидкістю, внаслідок чого між ними виникає всі зростаюча різниця фаз.

2 Явище подвійної променезаломлюваності можна використати для отримання поляризованого світла. Для цього в досліді типу, що зображений на рис. 65.1, досить затримати один із двох лінійно поляризованих пучків світла, що вийшли із кристала. Однак набагато зручніше користуватися не простими кристалами, а їхніми комбінаціями, які отримали назву **поляризаційні призми**.

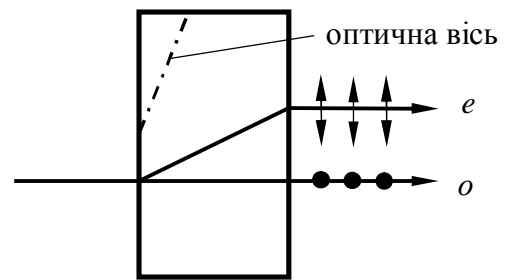


Рисунок 65.1 – Звичайний промінь o є поляризованим у площині, яка перпендикулярна до головного перерізу кристала (площини рисунка), незвичайний промінь e є поляризованим у площині головного перерізу

Перша поляризаційна призма була винайдена в 1828 р. шотландським фізиком Ніколем (1768-1851). Її скорочено називають **ніколем** (**призма Ніколя**). Для виготовлення призми Ніколя у ромбоєдра, який отримано сколюванням з шматка ісландського шпату, шліфують основи так, щоб нові основи утворювали з бічними ребрами кут 68° (замість 71° у природного кристала). Потім кристал розрізають уздовж площини, яка перпендикулярна до нових основ та до головного перерізу кристала (останній перпендикулярний до цих основ і проходить через оптичну вісь кристала). Відполірувавши площини розрізу, обидва шматки склеюють у попередньому положенні тонким шаром канадського бальзаму. Переріз призми Ніколя площиною головного перерізу показаний на рис. 65.2. Подвійна стрілка, нахилена під кутом 64° до довгого ребра, показує напрям оптичної осі.

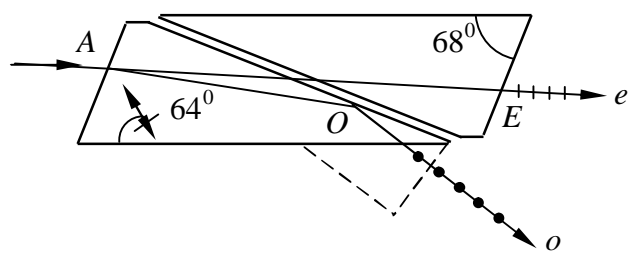


Рисунок 65.2 – Призма Ніколя

Промінь світла, падаючи на виготовлену основу кристала, розділяється всередині кристала на звичайний AO і незвичайний AE . Показник заломлення канадського бальзаму ($n = 1,550$) має проміжне значення між звичайним ($n_o = 1,658$) і незвичайним ($n_e = 1,486$) показниками заломлення ісландського шпату. Кути в призмі Ніколя розраховані так, щоб незвичайний промінь пройшов через шар канадського бальзаму, а звичайний зазнав на ньому повного внутрішнього відбиття й поглинувся зачерненою бічною гранню. У результаті світло, яке виходить з призми, виявляється лінійно поляризованим.

3 Розглянемо проходження лінійно поляризованого світла через кристалічну пластинку, яка вирізана паралельно оптичній осі OO (див. рис. 65.3). При нормальній падінні світла на грань кристала промінь перетвориться у звичайний і незвичайний. Ці промені поширюються в кристалі, не розділяючись із різною швидкістю. Вони, як відомо, мають взаємно перпендикулярну поляризацію: площина коливань звичайного променя перпендикулярна до головної площини кристала (площина, що проходить через оптичну вісь і світловий промінь), площина коливань незвичайного променя паралельна головній площині кристала. Через те що ці промені рухаються з різною швидкістю, між ними виникає різниця ходу

$$\Delta = (n_o - n_e)d \quad (65.1)$$

або різниця фаз

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda_0} = 2\pi \frac{(n_o - n_e)d}{\lambda_0}, \quad (65.2)$$

де d – шлях, який промені пройшли в кристалі (товщина пластинки); λ_0 – довжина хвилі у вакуумі; n_o , n_e – показники заломлення звичайного й незвичайного променів відповідно.

Таким чином, при нормальній падінні плоскополяризованого світла на пластинку товщиною d , яка вирізана паралельно оптичній осі, з неї вийдуть два когерентних промені, що поляризовані у взаємно перпендикулярних напрямках. Відомо, при додаванні взаємно перпендикулярних коливань (див. параграф "Додавання взаємно перпендикулярних

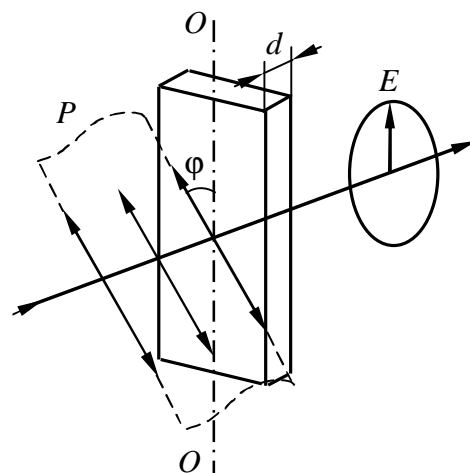


Рисунок 65.3 – Схема отримання еліптично поляризованого світла й світла, яке поляризоване по колу. Рисунок виконаний для випадку, коли $\phi = 45^\circ$, тобто для колової поляризації

коливань") у загальному випадку кінець результуючого вектора \vec{E} в поперечній площині рухається по еліпсу. Отже, світло, яке виходить з пластинки, буде еліптично поляризованим. В окремому випадку може вийти світло, яке поляризоване по колу, або плоскополяризоване світло. Яка із цих трьох можливостей має місце, залежить від товщини кристалічної пластинки, показників заломлення n_o та n_e , а також від співвідношення амплітуд звичайного й незвичайного променів.

Вирізана паралельно оптичної осі пластинка, для якої $(n_o - n_e)d = \lambda_0 / 4$, називається **пластинкою з четверть хвилі**. Використовуючи пластинку з четверть хвилі можна отримати еліптично поляризоване світло (а також світло, яке поляризоване по колу). Пропустимо плоскополяризоване світло через пластинку з четверть хвилі (рис. 65.3). Якщо розмістити пластинку так, щоб кут φ між площиною коливань P у падаючому промені й віссю пластинки OO дорівнював 45° (див. рис. 65.3), амплітуди звичайного й незвичайного променів будуть однакові. Різниця фаз між коливаннями на виході із пластинки у цих променях становитиме $\pi/2$. Отже, світло, яке вийшло із пластинки, буде поляризованим по колу. При іншому значенні кута φ амплітуди променів, які вийшли із пластинки, будуть неоднаковими. Тому ці промені утворюють еліптично поляризоване світло. При φ , який дорівнює 0 або $\pi/2$, у пластинці буде поширюватися тільки один промінь (у першому випадку – незвичайний, у другому – звичайний), на виході із пластинки світло залишиться плоскополяризованим із площиною коливань, що збігається з P .

Якщо на шляху еліптично поляризованого світла (або світла, поляризованого по колу) поставити пластинку з четверть хвилі, розмістивши її оптичну вісь уздовж однієї з півосей еліпса, то така пластинка внесе додаткову різницю фаз $\pi/2$. У результаті загальна різниця фаз двох складових із взаємно перпендикулярною поляризацією дорівнюватиме 0 або π , так що суперпозиція цих компонент дасть плоскополяризовану хвилю. Отже, належним чином повернута пластинка з четверть хвилі перетворює еліптично поляризоване світло в плоскополяризоване.

4 У деяких кристалах один із променів поглинається сильніше за інший. Це явище отримало назву **дихроїзму.** Дуже сильний дихроїзм у видимих променях спостерігається у кристалах турмаліну. У ньому звичайний промінь практично повністю поглинається на довжині 1 мм. У кристалах сульфату йодистого хініну один із променів поглинається на шляху приблизно 0,1 мм. Ця обставина використана для виготовлення поляризаційного пристрою, який називається **поляроїдом**. Він являє собою целулоїдну плівку, в яку ведена велика кількість однаково орієнтованих кристаликів сульфату йодистого хініну.

ТЕМА 10 ПОШИРЕННЯ СВІТЛА В РЕЧОВИНІ

§ 66 Дисперсія світла. Аномальна та нормальна дисперсія. Показник заломлення світла з погляду електронної теорії речовини [5]

1 Дисперсією світла називається явище залежності показника заломлення n речовини від частоти ω (або довжини хвилі λ). Цю залежність можна охарактеризувати функцією

$$n = f(\omega). \quad (66.1)$$

Для всіх прозорих безбарвних речовин функція (66.1) має у видимій частині спектра характер, що показаний на рис. 66.1. *Зі збільшенням частоти показник заломлення зростає: $dn/d\omega > 0$. У цьому випадку дисперсія називається нормальною.*

*Якщо речовина поглинає частину променів, то в області поглинання дисперсія виявляє аномалію – показник заломлення при збільшенні частоти зменшується: $dn/d\omega < 0$ (рис. 66.2). Такий хід залежності n від ω називається **аномальною дисперсією**.*

2 Дисперсію світла можна пояснити на основі електромагнітної теорії й електронної теорії речовини. Для цього потрібно розглянути процес взаємодії світла з речовиною. Рух електронів в атомі підлягає законам квантової механіки. Однак, як показав Г.А. Лоренц, для якісного розуміння багатьох оптичних явищ можна застосувати методи класичної фізики і використати гіпотезу про існування усередині атомів електронів, які пов'язані квазіпружно. Будучи виведеними з положення рівноваги, такі електрони починають коливатися, поступово втрачаючи енергію коливання на випромінювання електромагнітних хвиль. Зрозуміло, що такі коливання будуть загасаючими. Загасання можна врахувати, ввівши «силу тертя випромінювання», яка є пропорційною швидкості електрона.

3 При проходженні електромагнітної хвилі через речовину кожний електрон опиняється під впливом сили Лоренца

$$\vec{F} = e\vec{E} + e[\vec{v} \times \vec{B}] = e\vec{E} + e\mu_0[\vec{v} \times \vec{H}], \quad (66.2)$$

де e – заряд електрона, а v – його швидкість. Як відомо, в електромагнітній хвилі відношення напруженостей магнітного й електричного полів у хвилі дорівнює $H/E = \sqrt{\epsilon_0/\mu_0}$. Отже, відношення магнітної й електричної складових сил, що діють на електрон, буде дорівнювати

$$\frac{\mu_0 v H}{E} = \mu_0 v \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = v \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{v}{c},$$

де c – швидкість світла. Навіть, якщо б амплітуда коливань електрона A досягла значення порядку 10^{-10} м, тобто порядку розмірів атома, амплітуда швидкості електрона $A\omega$ становила б приблизно $10^{-10} \cdot 3 \cdot 10^{15} = 3 \cdot 10^5$ м/с (циклічна частота світлової хвилі $\omega = 2\pi\nu$ дорівнює приблизно $3 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$). Таким чином, відношення v/c менше 10^{-3} , тому другим доданком у (66.2) можна знехтувати.

4 Таким чином, можна вважати, що при проходженні через речовину електромагнітної хвилі кожний електрон знаходиться під впливом сили

$$F = eE_0 \cos(\omega t + \phi_0), \quad (66.3)$$

де E_0 – амплітуда напруженості електричного поля хвилі; ω – частота електромагнітної хвилі; ϕ_0 – початкова фаза коливань електрона.

Видиме світло помітно впливає тільки на зовнішні, що слабше від інших пов'язані з атомом електрони, які називають *валентними або оптичними електронами*. Власні частоти внутрішніх електронів сильно відрізняються від частот оптичного діапазону. Тому коливання внутрішніх електронів світловою хвилею практично не збуджуються.

Для простоти розглянемо випадок, коли в атомі є тільки один оптичний електрон. Крім того, будемо вважати, що атоми не взаємодіють один з одним (що в першому наближенні справедливо для газоподібних речовин).

Щоб полегшити обчислення, загасанням за рахунок випромінювання спочатку знехтуємо. Рівняння руху електрона у цьому випадку має вигляд

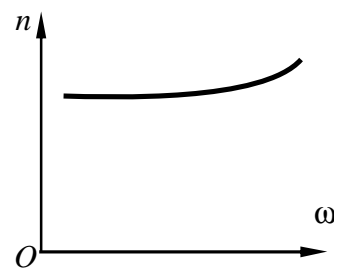


Рисунок 66.1. Залежність показника заломлення n від частоти світла ω для випадку нормальної дисперсії

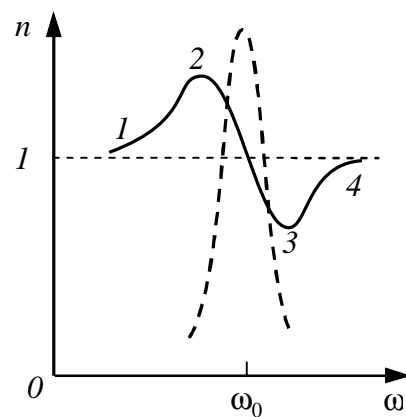


Рисунок 66.2 – Аномальний хід функції $n(\omega)$ в області поглинання. Штриховою лінією показана залежність коефіцієнта поглинання світла від частоти

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = (e/m)E_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (66.4)$$

де ω_0 – власна частота коливань електрона.

Легко перевірити підстановкою, що розв'язком рівняння (66.4) буде функція

$$r(t) = \frac{(e/m)E_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \varphi_0) = \frac{(e/m)}{\omega_0^2 - \omega^2} E(t),$$

де $E(t)$ – напруженість електричного поля світлової хвилі.

Щоб спростити завдання, будемо вважати молекули неполярними. Крім того, оскільки маси ядер великі у порівнянні з масою електрона, знехтуємо зміщенням ядер з положень рівноваги під дією поля хвилі. У цьому наближенні дипольний електричний момент молекули можна подати у вигляді

$$p(t) = er(t) = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2} E(t). \quad (66.5)$$

Позначимо число молекул в одиниці об'єму буквою N . Добуток $Np(t)$ дає вектор поляризації речовини $P(t)$. Відомо, що діелектрична проникність дорівнює

$$\epsilon = 1 + \alpha = 1 + \frac{P(t)}{\epsilon_0 E(t)} = 1 + \frac{N p(t)}{\epsilon_0 E(t)}.$$

Підставивши сюди відношення $p(t)/E(t)$, які отримуємо з (66.5), і замінивши ϵ через n^2 , прийдемо до формули

$$n^2 = 1 + \frac{N e^2/m}{\epsilon_0 \omega_0^2 - \omega^2}. \quad (66.6)$$

Коли врахувати, що до складу молекули входить декілька валентних електронів, які мають різні власні частоти коливань ω_{0k} , то з (66.6) отримаємо

$$\boxed{n^2 = 1 + \frac{N}{\epsilon_0} \sum_k \frac{e^2/m}{\omega_{0k}^2 - \omega^2}}. \quad (66.7)$$

При частотах ω , що помітно відрізняються від власної частоти ω_{0k} , вираз (66.7) буде малим у порівнянні з одиницею, так що $n^2 \approx 1$. Поблизу власної частоти функція (66.7) має розриви: при прямуванні ω до ω_{0k} зліва вона обертається в $+\infty$, при прямуванні ω до ω_{0k} справа – ($-\infty$) (див. рис. 66.3). Така поведінка функції обумовлена тим, що ми знехтували тертям випромінювання (нагадаємо, що при нехтуванні тертям амплітуда вимушених коливань при резонансі прагне до нескінченності). Врахування тертя випромінювання приводить до залежності n^2 від ω , що показана на рис. 66.3 суцільною кривою. Перейшовши від n^2 до n , отримаємо криву, що зображена на рис. 66.2. Ділянка 1–2 є аналогічною до кривої, що наведена на рис. 66.1. Ділянки 1–2 і 3–4 відповідають нормальній дисперсії ($dn/d\omega > 0$). На ділянці 2–3 дисперсія є аномальною ($dn/d\omega < 0$).

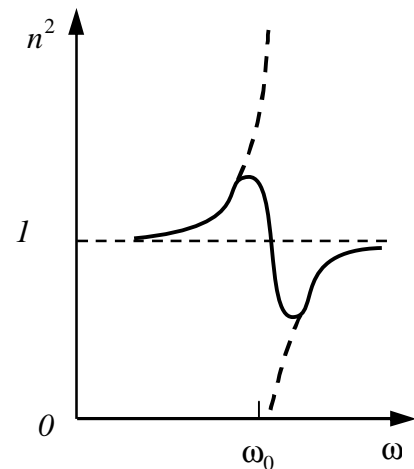


Рисунок 66.3 – Залежність n^2 від ω в області поглинання. Якщо знехтувати тертям випромінювання, функція $n^2(\omega)$ має розриви при резонансній частоті ω_0 коливань оптичного електрона атома

РОЗДІЛ 4 КВАНТОВА ПРИРОДА ВИПРОМІНЮВАННЯ

ТЕМА 11 ТЕПЛОВЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ

§ 67 Теплове випромінювання, енергетична світність, поглинальна здатність та випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла. Зв'язок між випромінювальною здатністю як функцією частоти та випромінювальною здатністю як функцією довжини хвилі [6]

1 *Тепловим* випромінюванням називається електромагнітне випромінювання, що випускається тілами за рахунок їх внутрішньої енергії. Світіння, що збуджується за рахунок інших видів енергії (крім внутрішньої), називають люмінесценцією. На відміну від люмінесценції теплове випромінювання здатне перебувати в термодинамічній рівновазі з речовиною. Ця властивість є характерною ознакою теплового випромінювання. Тому теплове випромінювання називають рівноважним випромінюванням.

До рівноважних станів і процесів можна застосовувати закони термодинаміки. Тому теплове випромінювання повинне підкорятися деяким загальним закономірностям, що впливають із принципів термодинаміки.

2 Теплове випромінювання будемо характеризувати потоком енергії $\Phi = dW / dt$, тобто кількістю енергії, що випромінюється за одиницю часу. Потік енергії, що випускається одиницею поверхні випромінюючого тіла в усіх напрямках (у межах тілесного кута 2π), називають **енергетичною світністю тіла**:

$$R = \frac{d\Phi}{dS}.$$

Чим вища температура тіла, тим більше буде випромінюватися енергії за одиницю часу з одиниці поверхні. Таким чином, енергетична світність R є функцією абсолютної температури T .

Випромінювання складається із хвиль різних частот ω (або довжин λ). Позначимо потік енергії, що випускається одиницею поверхні тіла (тобто світність) в інтервалі частот $d\omega$, через dR_ω . При малому інтервалі $d\omega$ світність dR_ω буде пропорційною $d\omega$:

$$dR_\omega = r_\omega d\omega. \quad (67.1)$$

Величина r_ω у співвідношенні (67.1) називається **випромінювальною здатністю тіла**. Як і енергетична світність, випромінювальна здатність сильно залежить від температури тіла. Таким чином, r_ω є функція частоти ω й температури T . Щоб підкреслити, що енергетична світність залежить також і від температури, її інколи записують у такому вигляді: $r_{\omega T}$.

Енергетична світність пов'язана з випромінювальною здатністю формулою

$$R = \int dR_\omega = \int_0^\infty r_\omega d\omega. \quad (67.2)$$

3 Випромінювання можна характеризувати замість частоти ω довжиною хвилі λ . Ділянці спектра $d\omega$ буде відповідати інтервал довжин хвиль $d\lambda$. Величини $d\omega$ й $d\lambda$, які визначають одну і ту саму ділянку, пов'язані простим співвідношенням, що впливає з формули $\lambda = 2\pi c / \omega$. Диференціювання дає

$$d\lambda = -\frac{2\pi c}{\omega^2} d\omega = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} d\omega. \quad (67.3)$$

Знак мінус у цьому виразі не має істотного значення, він лише вказує на те, що зі зростанням однієї з величин, ω або λ , інша величина зменшується. Тому мінус надалі ми не будемо писати.

Частина енергетичної світності, що припадає на інтервал $d\lambda$, може бути за аналогією з (67.1) подана у вигляді

$$\boxed{dR_\lambda = r_\lambda d\lambda}. \quad (67.4)$$

Величину r_λ зі співвідношення (67.4) також називають **випромінювальною здатністю тіла**. Якщо інтервали $d\omega$ й $d\lambda$, що входять у вирази (67.1) і (67.4), пов'язані співвідношенням (67.3), тобто належать до однієї і тієї самої ділянки спектра, то величини dR_ω й dR_λ повинні збігатися:

$$r_\omega d\omega = r_\lambda d\lambda.$$

Замінивши в останній рівності $d\lambda$, згідно з (67.3) отримаємо

$$r_\omega d\omega = r_\lambda \frac{2\pi c}{\omega^2} d\omega = r_\lambda \frac{\lambda^2}{2\pi c} d\omega,$$

звідки

$$\boxed{r_\omega = r_\lambda \frac{2\pi c}{\omega^2} = r_\lambda \frac{\lambda^2}{2\pi c}}. \quad (67.5)$$

За допомогою формули (67.5) можна перейти від r_λ до r_ω і навпаки.

4 Нехай на елементарну площадку поверхні тіла падає потік енергії теплового випромінювання $d\Phi_\omega$, що обумовлений електромагнітними хвилями, частота яких знаходиться в інтервалі $d\omega$. Частина цього потоку $d\Phi'_\omega$ буде поглинута тілом. Безрозмірна величина

$$\boxed{a_{\omega T} = \frac{d\Phi'_\omega}{d\Phi_\omega}} \quad (67.6)$$

називається **поглинальною здатністю тіла**. Поглинальна здатність тіла є функцією частоти й температури.

Для тіла, що повністю поглинає випромінювання всіх частот, яке падає на нього, поглинальна здатність дорівнює одиниці: $a_{\omega T} = 1$. Таке тіло називається **абсолютно чорним**. Тіло, для якого $a_{\omega T} \equiv a_T = \text{const} < 1$, називають **сірим**.

§ 68 Закон Кірхгофа. Універсальна функція Кірхгофа. Експериментальне дослідження універсальної функції Кірхгофа [6]

1 Між випромінювальною і поглинальною здатностями будь-якого тіла є зв'язок. У цьому можна переконатися, розглянувши такий експеримент. Нехай усередину замкнутої оболонки, яка підтримується при сталій температурі T , поміщені кілька тіл (рис. 68.1). Порожнина усередині оболонки евакуйована, так що тіла можуть обмінюватися енергією між собою й з оболонкою лише шляхом випромінювання й поглинання електромагнітних хвиль. Дослід показує, що така система через деякий час набуде стану теплової рівноваги – усі тіла матимуть одну і ту саму температуру, що дорівнює температурі оболонки T . У такому стані тіло, що має більшу випромінювальну здатність $r_{\omega T}$, втрачає за одиницю часу з одиниці поверхні більше енергії, ніж тіло, що має меншу $r_{\omega T}$. Оскільки температура (а отже, і енергія) тіл не змінюється, то тіло, що випромінює більше енергії, повинне й більше

поглинати, тобто мати більшу $a_{\omega T}$. Таким чином, чим більша випромінювальна здатність тіла $r_{\omega T}$, тим більша і його поглинальна здатність $a_{\omega T}$. Звідси випливає співвідношення

$$\left(\frac{r_{\omega T}}{a_{\omega T}}\right)_1 = \left(\frac{r_{\omega T}}{a_{\omega T}}\right)_2 = \left(\frac{r_{\omega T}}{a_{\omega T}}\right)_3 = \dots, \quad (68.1)$$

де індекси 1, 2, 3 і т.д. характеризують різні тіла.

Співвідношення (68.1) виражає **закон Кірхгофа**: *відношення випромінювальної та поглинальної здатностей не залежить від природи тіла, воно є для всіх тіл однією й тією самою універсальною функцією частоти (довжини хвилі) і температури*:

$$\boxed{r_{\omega T} / a_{\omega T} = f(\omega, T)}. \quad (68.2)$$

Для абсолютно чорного тіла за визначенням $a_{\omega T} = 1$. Отже, з формули (68.2) випливає, що $r_{\omega T}$ для такого тіла дорівнює $f(\omega, T)$. Таким чином, **універсальна функція Кірхгофа** $f(\omega, T)$ є випромінювальною здатністю абсолютно чорного тіла.

2 При теоретичних дослідженнях для характеристики спектрального складу рівноважного теплового випромінювання зручніше користуватися функцією частоти $f(\omega, T)$. В експериментальних роботах зручніше користуватися функцією довжини хвилі $\varphi(\lambda, T)$. Обидві функції пов'язані одна з одною формулою

$$f(\omega, T) = \frac{2\pi c}{\omega^2} \varphi(\lambda, T) = \frac{\lambda^2}{2\pi c} \varphi(\lambda, T), \quad (68.3)$$

яка впливає з відповідних співвідношень між випромінювальними здатностями $r_{\omega T}$ та $r_{\lambda T}$. Згідно з (68.3) для того, щоб за відомою функцією $f(\omega, T)$ знайти $\varphi(\lambda, T)$, необхідно замінити в $f(\omega, T)$ частоту через $2\pi c / \lambda$ і отриманий вираз помножити на $2\pi c / \lambda^2$:

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} f\left(\frac{2\pi c}{\lambda}, T\right). \quad (68.4)$$

Для знаходження $f(\omega, T)$ за відомою $\varphi(\lambda, T)$ потрібно скористатися співвідношенням

$$f(\omega, T) = \frac{2\pi c}{\omega^2} \varphi\left(\frac{2\pi c}{\omega}, T\right). \quad (68.5)$$

3 Абсолютно чорних тіл у природі не існує. Сажа має поглинальну здатність $a_{\omega T}$, яка є близькою до одиниці лише в обмеженому інтервалі частот; у далекій інфрачервоній області їх поглинальна здатність помітно менша одиниці. Однак можна створити пристрій, який є дуже близьким за своїми властивостями до абсолютно чорного тіла. Такий пристрій являє собою майже замкнуту порожнину з малим отвором (рис. 68.2). Випромінювання, що проникло усередину через отвір, перш ніж вийти назад з отвору, багато разів відбивається від внутрішніх стінок. При кожному відбитті частина енергії поглинається, у результаті чого практично все випромінювання будь-якої частоти такою порожниною поглинається. Відповідно до закону Кірхгофа випромінювальна здатність такого пристрою дуже близька до $f(\omega, T)$, причому T означає температуру стінок порожнини. Таким чином, якщо стінки

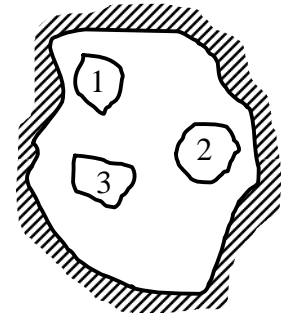


Рисунок 68.1 – Тіла, поміщені в евакуйовану порожнину, стінки якої підтримуються при незмінній температурі

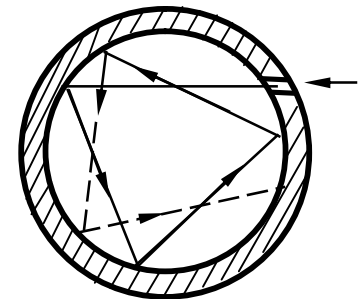


Рисунок 68.2 – Модель абсолютно чорного тіла

порожнини підтримувати при деякій температурі T , то з отвору виходить випромінювання, яке є досить близьким за спектральним складом до випромінювання абсолютно чорного тіла при тій самій температурі. Розкладаючи це випромінювання у спектр за допомогою дифракційної решітки й вимірюючи інтенсивність різних ділянок спектра, можна знайти експериментально вигляд функції $f(\omega, T)$ або $\phi(\lambda, T)$. Результати таких дослідів наведені на рис. 68.3. Різні криві відносять до різних значень температури T абсолютно чорного тіла. Площа, яку охоплює крива, дає енергетичну світність абсолютно чорного тіла при відповідній температурі.

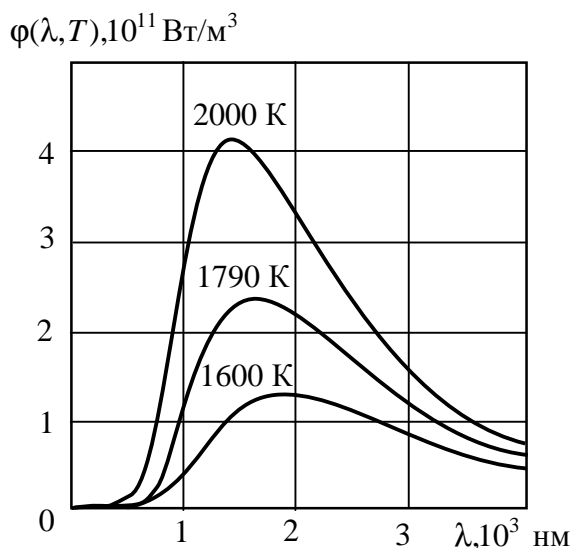


Рисунок 68.3 – Експериментальні криві залежності випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла від довжини хвилі для трьох значень температури

З рис. 68.3 випливає, що енергетична світність абсолютно чорного тіла сильно зростає з температурою. Максимум випромінювальної здатності зі збільшенням температури зміщується у бік більш коротких хвиль.

§ 69 Закон Стефана-Больцмана, формула Віна, закон зміщення Віна [6]

1 Теоретичне пояснення законів випромінювання абсолютно чорного тіла мало величезне значення в історії фізики – воно привело до поняття квантів енергії.

Довгий час спроби отримати теоретично вигляд функції $f(\omega, T)$ не давали загального розв’язку проблеми. В 1879 р. Стефан, аналізуючи експериментальні дані, дійшов висновку, що енергетична світність будь-якого тіла пропорційна четвертому ступеню термодинамічної температури. Однак наступні більш точні виміри показали помилковість його висновків.

У 1884 р. Больцман, виходячи з термодинамічних міркувань, отримав теоретично для енергетичної світності абсолютно чорного тіла значення

$$R^* = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega = \sigma T^4, \quad (69.1)$$

де σ – стала величина; T – термодинамічна температура. (Щоб підкреслити, що мова йде про енергетичну світність *абсолютно чорного тіла*, ми позначили R зірочкою.) Таким чином, висновок, до якого Стефан прийшов для нечорних тіл (з абсолютно чорними тілами він не експериментував), виявився справедливим лише для абсолютно чорних тіл.

Співвідношення (69.1) між енергетичною світністю абсолютно чорного тіла і його термодинамічною температурою отримало назву **закону Стефана-Больцмана**. Константу σ називають сталою Стефана-Больцмана. Її експериментальне значення дорівнює

$$\sigma = 5,670 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4). \quad (69.2)$$

2 У 1893 р. Він, скориставшись, крім термодинаміки, електромагнітною теорією, показав, що універсальна функція Кірхгофа повинна мати вигляд

$$f(\omega, T) = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right), \quad (69.3)$$

де F – деяка функція відношення частоти до температури. Співвідношення (69.3) отримало назву **формули Віна**.

3 Використовуючи зв'язок між $f(\omega, T)$ і $\varphi(\lambda, T)$

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} f\left(\frac{2\pi c}{\lambda}, T\right),$$

а також (69.3) знайдемо

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^3 F\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right) = \frac{1}{\lambda^5} \Psi(\lambda T), \quad (69.4)$$

де $\Psi(\lambda T)$ – деяка функція добутку λT .

Співвідношення (69.4) дозволяє встановити залежність між довжиною хвилі λ_m максимуму функції $\varphi(\lambda, T)$ і температурою. Продиференціюємо це співвідношення за λ :

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \left(\frac{1}{\lambda^5} \Psi(\lambda T)\right)' = \frac{1}{\lambda^5} T \Psi'(\lambda T) - \frac{5}{\lambda^6} \Psi(\lambda T) = \frac{1}{\lambda^6} [\lambda T \Psi'(\lambda T) - 5 \Psi(\lambda T)]. \quad (69.5)$$

Вираз у квадратних дужках є деякою функцією $\Psi(\lambda T)$. При довжині хвилі λ_m , що відповідає максимуму функції $\varphi(\lambda, T)$, вираз (69.5) повинен дорівнювати нулю:

$$\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_m} = \frac{1}{\lambda^6} \Psi(\lambda_m T) = 0.$$

З досліду відомо, що λ_m є скінченною ($\lambda_m \neq \infty$). Тому повинна виконуватися умова $\Psi(\lambda_m T) = 0$. Розв'язок останнього рівняння відносно невідомого $\lambda_m T$ дасть для цього невідомого деяке число, яке позначимо буквою b . Таким чином, отримали співвідношення

$$\boxed{\lambda_m T = b}, \quad (69.6)$$

яке називають **законом зміщення Віна**. Експериментальне значення константи b дорівнює

$$b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}. \quad (69.7)$$

§ 70 Формула Релея-Джинса. Ультрафіолетова катастрофа [6]

1 Загальний метод теоретичного визначення функції $f(\omega, T)$ в рамках класичної фізики був запропонований Релеєм і пізніше розвинений Джинсом. З позицій класичної фізики доведення Релеєм та Джинсом універсальної функції Кірхгофа було бездоганим, однак з дослідом отриманий результат не узгоджувався. Ця розбіжність отримала назву ультрафіолетової катастрофи.

Функцію Кірхгофа $f(\omega, T)$, яка точно відповідає експериментальним даним, вдалося знайти М.Планку в 1900 р. При цьому йому довелося використати далеке від класичних

уявленнь припущення, що електромагнітне випромінювання випускається у вигляді окремих порцій енергії (квантів). *Це було народженням квантової фізики.*

2 Розглянемо схему доведення функції Кірхгофа, що є справедливою як і у випадку доведення Релея-Джинса, так і у випадку доведення Планка.

1 Універсальна функція Кірхгофа $f(\omega, T)$, яка є випромінювальною здатністю абсолютно чорного тіла (усереднена за напрямками спектральна густина потоку енергії), пов'язана зі спектральною густиною енергії теплового випромінювання u_ω співвідношенням подібним до формули вектора Умова

$$f(\omega, T) = c \cdot u_\omega / 4, \quad (70.1)$$

де c – швидкість світла.

2 Теплове випромінювання є сукупністю власних коливань системи. Визначаємо спектральну кількість власних коливань в одиниці об'єму n_ω .

3 Знаходимо середню енергію одного коливання $\langle \epsilon \rangle$.

4 Спектральну густиною енергії теплового випромінювання визначаємо як добуток спектральної кількості коливань в одиниці об'єму на середню енергію одного коливання

$$u_\omega = n_\omega \langle \epsilon \rangle. \quad (70.2)$$

Далі, підставляючи вираз (70.2) у співвідношення (70.1), знаходимо шукану універсальну функцію Кірхгофа

$$f(\omega, T) = c \cdot n_\omega \langle \epsilon \rangle / 4.$$

Доведення універсальної функції Кірхгофа Релеєм-Джинсом та Планком відрізняються лише способом знаходження середньої енергії одного коливання $\langle \epsilon \rangle$.

3 Розглянемо доведення універсальної функції Кірхгофа Релеєм-Джинсом.

Перший пункт схеми

Спектральною густиною енергії теплового випромінювання називають функцію u_ω , яка пов'язана з густиною енергії таким співвідношенням:

$$w = \int_0^\infty u_\omega d\omega, \quad (70.3)$$

де ω – циклічна частота електромагнітної хвилі. Як відомо, енергетична світність абсолютно чорного тіла (*потік енергії, що випускається одиницею поверхні випромінюючого тіла в усіх*

напрямах) пов'язана з універсальною функцією Кірхгофа таким чином $R^* = \int_0^\infty f(\omega, T) d\omega$. З

іншого боку спрямований потік енергії через одиницю поверхні (*густина потоку j*) пов'язаний з густиною енергії вектором Умова $j = w \cdot c$. Це означає, що має місце зв'язок

$$R^* = \int_0^\infty f(\omega, T) d\omega \sim w \cdot c = c \cdot \int_0^\infty u_\omega d\omega, \text{ або } f(\omega, T) \sim c \cdot u_\omega. \quad (70.4)$$

Останній вираз у (70.4) пояснює співвідношення (70.1). Коефіцієнт 1/4 у формулі (70.1) пов'язаний з тим, що теплове випромінювання поширюється у всіх напрямках у межах тілесного кута 2π , а вектор Умова визначає співвідношення між величинами хвилі, яка поширюється в одному визначеному напрямку.

Другий пункт схеми

Розглянемо одновимірний випадок. Із вчення про коливання й хвилі відомо, що в закріпленій на кінцях струні найбільш інтенсивними є коливання лише таких частот, коли на довжині струни вкладається ціле число напівхвиль. Ці коливання мають характер стоячих хвиль, причому на кінцях струни знаходяться вузли хвилі. Кількість стоячих хвиль і визначає

кількість власних коливань системи. Якщо довжина одновимірної області (об'єм одновимірної області) дорівнює a , то тоді можемо записати $a = N \cdot \lambda / 2$, де N – кількість стоячих хвиль (кількість власних коливань), що виникають у досліджуваній системі. Використаємо зв'язок між довжиною хвилі та частотою $\lambda = 2\pi c / \omega$, і знайдемо кількість власних коливань в одиниці об'єму:

$$n = \frac{N}{a} = \frac{2a}{\lambda a} = \frac{2\omega}{2\pi c} = \frac{\omega}{\pi c}. \quad (70.5)$$

Далі знаходимо спектральну густину коливань (кількість коливань на одиницю частоти)

$$n_{\omega} = \frac{dn}{d\omega} = \frac{d\omega}{\pi c d\omega} = \frac{1}{\pi c}. \quad (70.6)$$

Розглянемо тривимірний випадок. Аналогічно як і у одновимірній ситуації можна знайти

$$n_{\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}. \quad (70.7)$$

Тут враховано, що електромагнітні хвилі теплового випромінювання мають дві взаємно перпендикулярні лінійні поляризації.

Третій пункт схеми

Релей і Джинс визначили середню енергію одного коливання, виходячи з теореми класичної статистичної фізики про рівномірний розподіл кінетичної енергії за ступенями вільності. Згідно з цією теоремою на кожен ступінь вільності припадає однакова кінетична енергія, що дорівнює $kT/2$, де T – абсолютна температура; k – стала Больцмана. Якщо ступінь вільності коливальна, то потрібно врахувати ще й потенціальну енергію. У випадку гармонічних коливань середнє значення потенціальної енергії дорівнює також $kT/2$. Таким чином, у стані статистичної рівноваги на кожний коливальний ступінь вільності припадає середня енергія, що дорівнює kT . Тобто

$$\langle \epsilon \rangle = kT. \quad (70.8)$$

Четвертий пункт схеми

Енергію в одиниці об'єму $u_{\omega} d\omega$, що припадає на спектральний інтервал $d\omega$, можемо знайти, перемножуючи кількість коливань $n_{\omega} d\omega$ в цьому самому спектральному інтервалі на середню енергію такого коливання $\langle \epsilon \rangle = kT$. Таким чином, використовуючи (70.7) та (70.8) знаходимо

$$u_{\omega} = \frac{\omega^2 kT}{\pi^2 c^3}. \quad (70.9)$$

Далі використовуючи (70.1), знаходимо шукану універсальну функцію Кірхгофа за Релеєм-Джинсом:

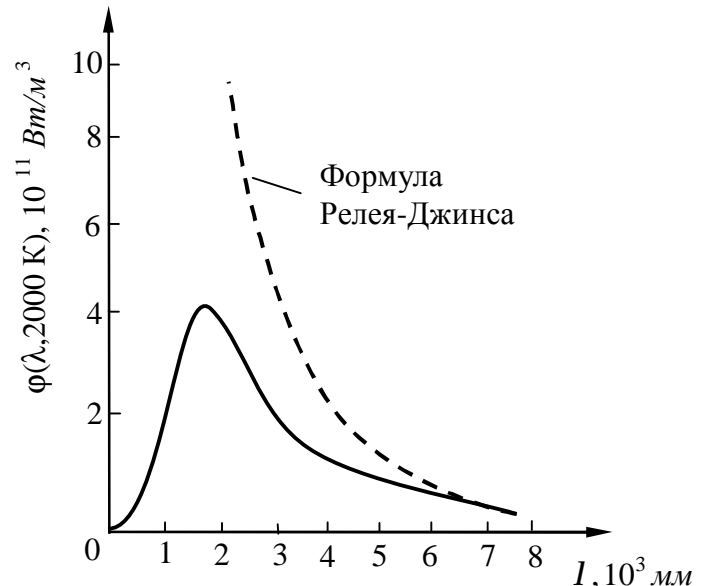


Рисунок 70.1 Криві залежності випромінювальної здатності $\phi(\lambda)$ абсолютно чорного тіла від довжини хвилі. Суцільна крива отримана експериментально, штрихова крива побудована за формулою Релея-Джинса

$$f(\omega, T) = \frac{c \omega^2 kT}{4 \pi^2 c^3} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT \quad (70.10)$$

Співвідношення (70.9) та (70.10) називаються **формулами Релея-Джинса** для теплового випромінювання.

4 Формули Релея-Джинса (70.9), (70.10) для теплового випромінювання задовільно узгоджуються з експериментальними даними лише при великих довжинах хвиль і різко розходяться з дослідом для малих довжин хвиль (див. рис. 70.1, на якому суцільною лінією зображена експериментальна крива, штриховою – крива, побудована за формулою Релея-Джинса).

Інтегрування виразу (70.10) за ω у межах від 0 до ∞ дає для енергетичної світності абсолютно чорного тіла R нескінченно велике значення. Цей результат, який отримав назву **ультрафіолетової катастрофи**, також суперечить досліду.

Із класичної точки зору доведення формули Релея-Джинса є бездоганним. Тому розбіжність цієї формули з дослідом указувало на існування якихось закономірностей, несумісних з уявленнями класичної фізики.

§ 71 Гіпотеза Планка. Формула Планка [6]

1 Схема доведення формули для універсальної функції Кірхгофа $f(\omega, T)$ така сама, як і у випадку доведення формули Релея-Джинса:

$$f(\omega, T) = c \cdot n_\omega \langle \epsilon \rangle / 4. \quad (71.1)$$

Тут

$$n_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \quad (71.2)$$

є спектральною густиною власних коливань теплового випромінювання; c – швидкість світла; $\langle \epsilon \rangle$ – середня енергія одного коливання.

Відмінність полягає лише у визначенні середньої енергії одного коливання $\langle \epsilon \rangle$.

2 Розглянемо, як М.Планк визначив середню енергію власного коливання теплового випромінювання, і потім знайдемо формулу Планка для універсальної функції Кірхгофа.

Щоб отримати функцію Кірхгофа $f(\omega, T)$, яка узгоджується з експериментальними даними, М.Планку довелося використати далеке від класичних уявлень припущення (**гіпотеза Планка**): **електромагнітне випромінювання випускається у вигляді окремих порцій енергії (квантів), які пропорційні частоті випромінювання:**

$$\boxed{\epsilon = \hbar\omega = h\nu}, \quad (71.3)$$

де $\omega = 2\pi\nu$; ν – частота електромагнітної хвилі, коефіцієнти пропорційності \hbar та h отримали з часом назву **сталой Планка**. Визначене з досліду значення цієї сталої дорівнює

$$\hbar = 1,0545915 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}, \quad h = 2\pi\hbar = 6,6261937 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}. \quad (71.4)$$

Гіпотеза Планка дала початок новому напрямку розвитку фізики, який отримав назву квантової фізики. Гіпотеза Планка дала початок зміні уявлень людства про мікроскопічний світ.

Якщо випромінювання випускається порціями $\hbar\omega$, то енергія такої хвилі ϵ_n повинна бути кратною цій величині:

$$\epsilon_n = n\hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (71.5)$$

У стані теплової рівноваги розподіл коливань за значеннями енергії повинен підкорятися розподілу Больцмана

$$N_n = A \exp(-\varepsilon_n / (kT)), \quad (71.6)$$

де N_n – кількість коливань, енергія кожного з якого дорівнює ε_n ; A – нормувальний множник; k – стала Больцмана.

У цьому випадку середня енергія коливання знаходиться так:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{N_0 \cdot 0 + N_1 \cdot \varepsilon_1 + N_2 \cdot \varepsilon_2 + \dots}{N_0 + N_1 + N_2 + \dots} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} N_n \varepsilon_n}{\sum_{n=0}^{\infty} N_n}. \quad (71.7)$$

Тут N_n – число коливань, енергія яких $\varepsilon_n = n\hbar\omega$. Вважаємо, що число можливих значень енергії не обмежено. У чисельнику стоїть сумарна енергія коливань, у знаменнику – повне число коливань.

Підстановка в (71.7) значення (71.5) для ε_n й (71.6) для N_n приводить до формули

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega A \exp(-n\hbar\omega / kT)}{\sum_{n=0}^{\infty} A \exp(-n\hbar\omega / kT)}. \quad (71.8)$$

Щоб виконати обчислення, позначимо $\hbar\omega / (kT) = x$ й припустимо, що x може змінюватися, набуваючи неперервного ряду значень. Тоді вираз (71.8) можна написати у вигляді

$$\langle \varepsilon \rangle = \hbar\omega \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \exp(-nx)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nx)} = -\hbar\omega \frac{d}{dx} \left(\ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nx) \right) \right). \quad (71.9)$$

Під знаком логарифма у формулі (71.9) стоїть сума членів нескінченної геометричної прогресії з першим доданком, що дорівнює одиниці ($b_1 = 1$), і знаменником прогресії, що дорівнює $q = \exp(-x)$. Через те що знаменник менше одиниці, прогресія буде спадною, і сума цієї прогресії буде дорівнювати

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nx) = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-\exp(-x)}. \quad (71.10)$$

Підставивши це значення суми в (71.9) і виконавши диференціювання, отримаємо

$$\langle \varepsilon \rangle = -\hbar\omega \frac{d}{dx} \left(\ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nx) \right) \right) = -\hbar\omega \frac{d}{dx} \left(\ln \left(\frac{1}{1-\exp(-x)} \right) \right) = \hbar\omega \frac{\exp(-x)}{1-\exp(-x)} = \frac{\hbar\omega}{\exp(x)-1}. \quad (71.11)$$

Нарешті, замінивши x його значенням $\hbar\omega / (kT)$, отримаємо остаточний вираз для середньої енергії випромінювання частоти ω :

$$\boxed{\langle \varepsilon \rangle = \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega / (kT)) - 1}}. \quad (71.12)$$

Зазначимо, що за умови, коли \hbar прямує до нуля, формула (71.12) переходить у класичний вираз $\langle \varepsilon \rangle = kT$. У цьому можна переконатися, поклавши $\exp(\hbar\omega / (kT)) \approx 1 + \hbar\omega / (kT)$, яке виконується тим точніше, чим менше \hbar . Таким чином, якщо б енергія могла набувати безперервного ряду значень, її середнє значення дорівнювало б kT .

Підставимо отриманий вираз для середньої енергії коливання у (71.1), використаємо (71.2) і отримуємо **формулу Планка** для універсальної функції Кірхгофа

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/(kT)) - 1}. \quad (71.13)$$

Формула Планка (71.13) точно узгоджується з експериментальними даними у всьому інтервалі частот від 0 до ω . Функція (71.13) задовольняє формулі Віна $\left(f(\omega, T) = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right) \right)$.

За умови, що $\hbar\omega/(kT) \ll 1$ (малі частоти, або великі довжини хвиль), експоненту $\exp(\hbar\omega/(kT))$ можна вважати такою, що приблизно дорівнює $1 + \hbar\omega/(kT)$. У результаті цього формула Планка переходить у формулу Релея-Джинса. Це впливає також з того, що при зазначеній вище умові вираз (71.12) наближено дорівнює kT .

З формули Планка випливають закони Стефана-Больцмана й Віна. Отже, формула Планка дає вичерпний опис рівноважного теплового випромінювання.

Таким чином, ідея про те, що випромінювання випускається у вигляді окремих порцій енергії (квантів), а не неперервно привела до результату, який повністю узгоджується з експериментом.

ТЕМА 12 ФОТОНИ

§ 72 Гальмівне рентгенівське випромінювання. Короткохвильова межа рентгенівського випромінювання [6]

1 У 1895 р. Рентген виявив, що при бомбардуванні скла й металів швидкими електронами виникає випромінювання, яке має велику проникну здатність. Сам Рентген назвав відкрите ним випромінювання X-променями (ікс-променями). Потім воно отримало назву **рентгенівських променів**. Подальші дослідження показали, що рентгенівське випромінювання є електромагнітним випромінюванням з довжиною хвилі в межах від 10^{-2} нм до 10 нм.

2 Сучасна **рентгенівська трубка** (рис. 72.1) складається з евакуйованого балона з декількома електродами. Катод K є джерелом вільних електронів, які випромінюються внаслідок термоелектронної емісії. Циліндричний електрод Γ призначений для фокусування електронного пучка. Мішенню є анод A , який називають також антикатодом. Його виготовляють із важких металів (W , Cu , Pt і т.д.). Прискорення електронів здійснюється високою напругою, що створюється між катодом і антикатодом. Майже вся енергія електронів виділяється на антикатоді у вигляді теплоти (у випромінювання перетворюється лише 1-3 % енергії). Тому в потужних трубках антикатод доводиться інтенсивно охолоджувати. Із цією метою в тілі антикатада роблять канали, по яких циркулює охолоджуюча рідина (вода або масло).

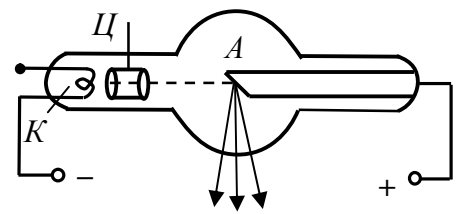


Рисунок 72.1 – Схема рентгенівської трубки

3 Якщо між катодом і антикатодом прикладені напруга U , електрони розганяються до енергії eU . Потрапивши в речовину антикатада, електрони сильно гальмуються, тобто рухаються з великим прискоренням і тому стають джерелом електромагнітних хвиль. При достатньо великій початковій швидкості електронів, крім **гальмівного випромінювання** (тобто випромінювання, яке обумовлене гальмуванням електронів), збуджується також **характеристичне випромінювання** (викликане збудженням внутрішніх електронних оболонок атомів антикатада). У цьому параграфі нас буде цікавити тільки гальмівне випромінювання. Відповідно до класичної електродинаміки при гальмуванні електрона повинні виникати хвилі всіх довжин – від нуля до нескінченності. Довжина хвилі, на яку припадає максимум потужності випромінювання, повинна зменшуватися зі збільшенням швидкості електронів, тобто напруги U на трубіці. На рис. 72.2 подані експериментальні

криві розподілу потужності гальмівного рентгенівського випромінювання за довжинами хвиль, які отримані для різних значень U . З рисунка випливає, що висновки теорії в основному підтверджуються на досліді. Однак є одне принципове неузгодження з класичною електродинамікою. Воно полягає у тому, що *криві розподілу потужності не йдуть до початку координат, а обриваються при скінченних значеннях довжини хвилі λ_{\min}* . Ці значення довжини хвиль називають **короткохвильовою межею рентгенівського випромінювання**.

Експериментально встановлено, що короткохвильова межа гальмівного рентгенівського спектра λ_{\min} (у нанометрах) пов'язана із прискорювальною напругою U (у вольтах) співвідношенням

$$\lambda = 1239 / U. \quad (72.1)$$

Існування короткохвильової межі є одним з підтверджень уявлень про випромінювання електромагнітних хвиль порціями $\hbar\omega$. Дійсно, якщо випромінювання виникає за рахунок енергії, що втрачається електроном при гальмуванні, то величина кванта $\hbar\omega$ не може перевищувати енергію електрона eU :

$$\hbar\omega \leq eU.$$

Звідси випливає, що частота випромінювання не може перевищувати $\omega_{\max} = eU/\hbar$, а, отже, довжина хвилі не може бути меншою ніж

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi c}{\omega_{\max}} = \frac{2\pi\hbar c}{e}. \quad (72.2)$$

Порівнюючи чисельники формул (72.1) і (72.2), прийдемо до рівності $2\pi\hbar c/e = 1239 \cdot 10^{-9}$ (ми перейшли від нанометрів до метрів). Звідси для \hbar отримуємо значення

$$\hbar = \frac{1239 \cdot 10^{-9} e}{2\pi c} = 1,053 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с},$$

яке збігається зі значенням, що випливає із законів теплового випромінювання.

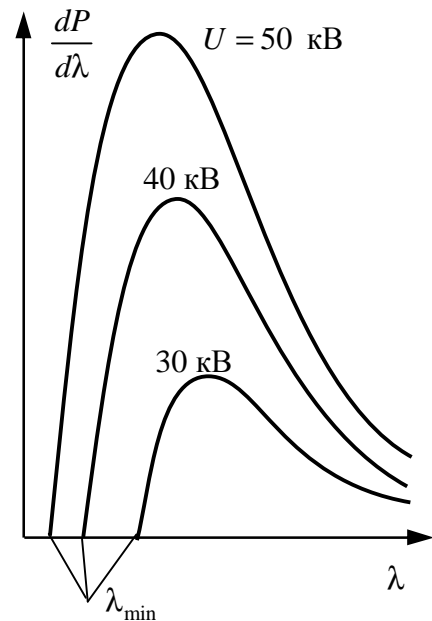


Рисунок 72.2 – Криві розподілу потужності гальмівного рентгенівського випромінювання за довжинами хвиль

§ 73 Зовнішній фотоэффект. Закони фотоэффекту. Формула Ейнштейна для фотоэффекту [6]

1 Фотоелектричний ефект, або фотоэффектом називається вибивання електронів речовиною під дією світла. Це явище було відкрито Г.Герцом у 1887 р. Він помітив, що проскакування іскри між кульками розрядника значно полегшується, коли одну з кульок освітити ультрафіолетовими променями.

У 1888-1889 рр. А.Г.Столетов провів систематичне дослідження фотоэффекту за допомогою установки, схема якої показана на рис. 73.1. Конденсатор, що утворений дротяною сіткою й суцільною пластиною, був включений послідовно з гальванометром G у ланцюг батареї. Світло, проходячи через сітку, падало на суцільну пластину. У результаті в електричному колі виникав струм, який реєструвався гальванометром. На базі своїх дослідів Столетов дійшов до таких висновків: 1) найбільшу дію мають ультрафіолетові промені; 2) сила струму

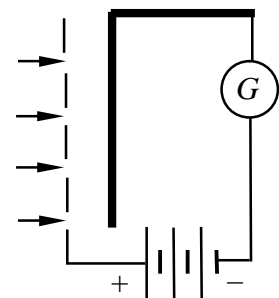


Рисунок 73.1

зростає зі збільшенням освітленості пластини; 3) заряди, що випускаються під дією світла, мають від'ємний знак.

Через 10 років (у 1898 р.) Ленард і Томсон, вимірявши питомий заряд частинок, які вибиваються під дією світла, встановили, що ці частинки є електронами (електрон був відкритий Томсоном у 1897 р.).

2 Ленард й інші дослідники вдосконалили прилад Столетова, помістивши електроди в евакуйований балон (рис. 73.2). Світло, що проникає через кварцове віконце $Kв$, освітлює катод K , який виготовлений з досліджуваного матеріалу. Електрони, вибиті внаслідок фотоэффекту, рухаються під дією електричного поля до анода A . У результаті цього у електричному колі приладу проходить фотострум, який вимірюється гальванометром G . Напругу між анодом і катодом можна змінювати за допомогою потенціометра Π .

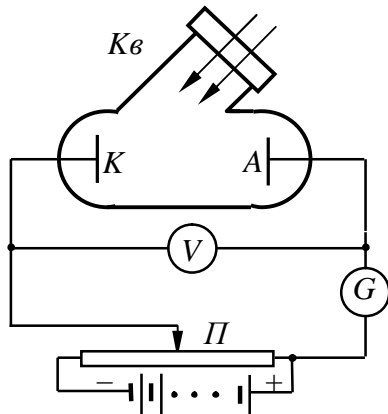


Рисунок 73.2

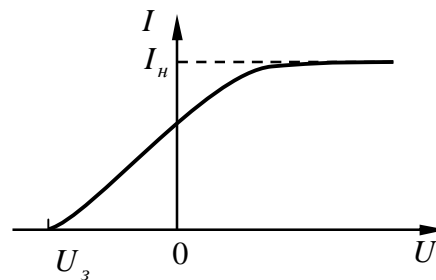


Рисунок 73.3

Отримана на такому приладі вольт-амперна характеристика (тобто крива залежності фотоструму I від напруги між електродами U) наведена на рис. 73.3. Зрозуміло, що вольт-амперна характеристика знімається при незмінному потоці світла Φ . Із цієї кривої видно, що при деякій не дуже великій напрузі фотострум досягає насичення – всі електрони, які випущені катодом, попадають на анод. Отже, сила струму насичення I_n визначається кількістю електронів, які випускаються катодом за одиницю часу під дією світла.

Пологий хід кривої вказує на те, що електрони вилітають із катода з різними за величиною швидкостями. Частина електронів, що відповідає силі струму при $U = 0$, має швидкості, які є достатніми для того, щоб долетіти до анода «самостійно», без допомоги прискорювального поля. Для того щоб сила струму стала дорівнювати нулю, потрібно прикласти **затримуючу напругу** $U_з$. При такій напрузі жодному з електронів, який навіть має при вильоті з катода *найбільше значення швидкості* v_m , не вдається перебороти затримуюче поле й досягти анода. Тому можна написати, що

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = eU_з, \quad (73.1)$$

де m – маса електрона. Таким чином, вимірявши затримуючу напругу $U_з$, можна визначити максимальне значення швидкості фотоелектронів.

До 1905 р. було експериментально з'ясовано, що максимальна швидкість фотоелектронів не залежить від інтенсивності світла, а залежить тільки від його частоти – збільшення частоти приводить до зростання швидкості. Також було визначено, що струм насичення I_n є пропорційним до інтенсивності світла, яке падає на поверхню досліджуваного матеріалу.

Таким чином, дослідним шляхом були встановлені **три закони фотоэффекту**:

1) *Максимальна початкова швидкість фотоелектронів визначається частотою світла й не залежить від його інтенсивності.*

2) Для кожної речовини існує червона межа фотоефекту, тобто така найменша частота світла ω_0 , при якій ще можливий фотоефект.

3) Число фотоелектронів, що вириваються з катода за одиницю часу (струм насичення I_n), прямо пропорційне інтенсивності світла.

Установлені експериментально залежності не вкладаються в рамки класичних уявлень. Наприклад, швидкість фотоелектронів за класичними поняттями повинна зростати з амплітудою, а, отже, і з інтенсивністю електромагнітної хвилі.

3 У 1905 р. А. Ейнштейн показав, що всі закономірності фотоефекту легко пояснюються, якщо припустити (гіпотеза Ейнштейна), що світло поглинається такими самими порціями $\hbar\omega$ (квантами), якими він, за припущенням Планка, випромінюється. На думку Ейнштейна, енергія, отримана електроном, передається йому у вигляді кванта $\hbar\omega$, який ним поглинається повністю. Частина цієї енергії, яка дорівнює роботі виходу A , витрачається на те, щоб електрон міг покинути тіло. Якщо електрон звільняється світлом не біля поверхні, а на деякій глибині, то частина енергії, яка дорівнює E' , може бути загублена внаслідок випадкових зіткнень у речовині. Залишок енергії утворює кінетичну енергію E_k електрона, який покинув речовину. Енергія E_k буде максимальною, коли $E' = 0$. У цьому випадку повинне виконуватися співвідношення

$$\hbar\omega = \frac{1}{2}mv_m^2 + A \quad (73.2)$$

яке називається **формулою Ейнштейна** для фотоефекту.

Фотоефект і робота виходу залежать від стану поверхні металу (зокрема, від окисів, що знаходяться на ній, адсорбованих речовин). Тому довгий час не вдавалося перевірити формулу Ейнштейна з достатньою точністю. У 1916 р. Міллікен створив прилад, у якому досліджувані поверхні піддавалися очищенню у вакуумі, після чого вимірялася робота виходу й досліджувалася залежність максимальної кінетичної енергії фотоелектронів від частоти світла (ця енергія визначалася шляхом виміру затримуючого потенціалу U_3). Результати виявилися в повній відповідності до формули (73.2).

Підставивши у формулу (73.2) виміряні значення A й $mv_m^2/2$ (при даній ω), Міллікен визначив значення сталої Планка \hbar , яка збігалася зі значеннями, знайденими зі спектрального розподілу рівноважного теплового випромінювання й з короткохвильової межі гальмівного рентгенівського спектра.

З формули (73.2) випливає, що у випадку, коли робота виходу A перевищує енергію кванта $\hbar\omega$, електрони не можуть покинути метал. Отже, для виникнення фотоефекту необхідне виконання умови $\hbar\omega \geq A$, або

$$\omega \geq \omega_0 = A/\hbar. \quad (73.3)$$

Відповідно для довжини хвилі маємо умову

$$\lambda \leq \lambda_0 = \frac{2\pi\hbar c}{A}. \quad (73.4)$$

Частота ω_0 або довжина хвилі λ_0 називається **червоною межею фотоефекту**.

Число електронів, які вивільняються внаслідок фотоефекту, повинне бути пропорційне числу падаючих на поверхню квантів світла. Разом з тим світловий потік Φ визначається кількістю квантів світла, що падають на поверхню за одиницю часу. Відповідно до цього струм насичення I_n повинен бути пропорційний падаючому світловому потоку:

$$I_n \sim \Phi. \quad (73.5)$$

Зазначимо, лише мала частина квантів передає свою енергію фотоелектронам. Енергія інших квантів витрачається на нагрівання речовини, яка поглинає світло.

Крім розглянутого нами вище зовнішнього фотоефекту (який називають просто фотоефектом), існує також внутрішній фотоефект, який спостерігається у діелектриках і напівпровідниках. Про нього буде йти мова пізніше.

§ 74 Фотони. Дослід Боте. Властивості фотонів. Корпускулярно-хвильовий дуалізм світла [6]

1 Щоб пояснити розподіл енергії у спектрі рівноважного теплового випромінювання, досить, як показав Планк, припустити, що світло тільки випромінюється порціями $\hbar\omega$. Для пояснення фотоефекту досить припустити, що світло поглинається такими самими порціями. Однак Ейнштейн пішов значно далі. Він висунув гіпотезу, що світло й поширюється у вигляді дискретних частинок, які спочатку назвали світловими квантами. Потім ці квазічастинки отримали назву **фотонів**.

2 Найбільш безпосереднє підтвердження гіпотези Ейнштейна дав **дослід Боте**. Тонка металева фольга Φ (рис. 74.1) знаходилася між двома газорозрядними лічильниками L . Фольга опромінювалася слабким пучком рентгенівських променів, під дією яких вона сама ставала джерелом рентгенівських променів (це явище називається рентгенівською флуоресценцією). Внаслідок малої інтенсивності первинного пучка кількість квантів, що випромінювалась фольгою, була невеликою. При попаданні рентгенівських променів на лічильник він спрацьовував і пускав у хід особливий механізм M , що робив відмітку на рухомій стрічці C . Якби випромінювана енергія поширювалася рівномірно в усі сторони, як це впливає із хвильових уявлень, обидва лічильники повинні були б спрацьовувати одночасно й відмітки на стрічці знаходились б одна проти одної. У дійсності ж спостерігалось абсолютне невпорядковане розміщення відміток. Це можна пояснити лише тим, що в окремих актах випромінювання виникають світлові частинки, які летять то в одному, то в іншому напрямку.

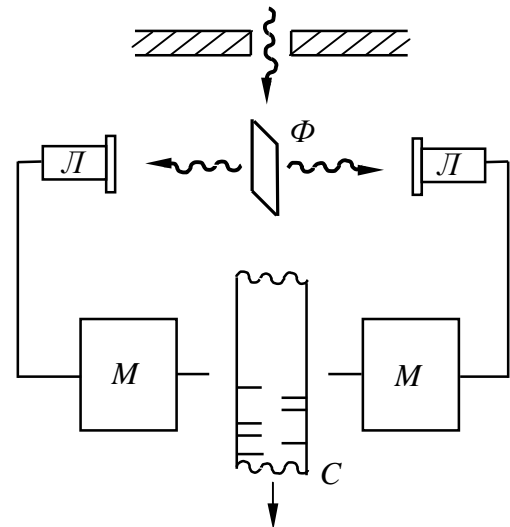


Рисунок 74.1

Отже, було експериментально доведено існування особливих частинок світла – фотонів.

3 Розглянемо властивості фотонів. Енергія фотона у відповідно до гіпотези Ейнштейна визначається його частотою:

$$E = \hbar\omega. \quad (74.1)$$

Фотон рухається з такою самою швидкістю, як і електромагнітна хвиля у вакуумі. Це означає, що швидкість фотона

$$v = c$$

дорівнює швидкості світла. Слід взяти до уваги, що фотони рухаються зі швидкістю c не тільки у вакуумі, але й у речовині. «Уповільнення» світла в речовині обумовлене тим, що при проходженні через речовину фотони поглинаються атомами й слідом за цим випромінюються знову. Між актами поглинання й випромінювання проходить деякий час, внаслідок чого середня швидкість фотонів у речовині виявляється меншою за c .

Енергія E й імпульс частинки p , як впливає зі спеціальної теорії відносності, пов'язані між собою таким виразом:

$$p = \frac{E}{c^2} v. \quad (74.2)$$

Підставивши у цю формулу вираз для енергії (74.1), отримаємо для імпульсу фотона зв'язок з частотою світла

$$p = \frac{E}{c^2} c = \frac{\hbar\omega}{c}. \quad (74.3)$$

Замінивши у формулі (74.3) частоту ω через довжину хвилі λ , отримаємо для імпульсу фотона вираз

$$p = \frac{\hbar 2\pi}{\lambda} = \hbar k \quad (74.4)$$

(k – хвильове число). Фотон летить у напрямку поширення електромагнітної хвилі. Тому напрями імпульсу \vec{p} і хвильового вектора \vec{k} збігаються. Отже, формулу (74.4) можна записати у векторному вигляді:

$$\boxed{\vec{p} = \hbar \vec{k}}. \quad (74.5)$$

Зі спеціальної теорії відносності також відоме співвідношення, яке пов'язує імпульс p , повну енергію E та масу спокою m частинки:

$$E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4. \quad (74.6)$$

Підставимо в (74.6) формули (74.1) та (74.3) і отримаємо для маси спокою

$$m = \frac{\sqrt{E^2 - c^2 p^2}}{c^2} = \frac{\sqrt{(\hbar\omega)^2 - c^2 (\hbar\omega/c)^2}}{c^2} = 0. \quad (74.7)$$

Отже, маса спокою фотона дорівнює нулю.

При взаємодії з речовиною фотони можуть випромінюватися, поглинатися й розсіюватися. Збереження числа фотонів не має місця. Але закони збереження енергії й імпульсу для фотонів повинні виконуватися.

Таким чином, фотон є частинкою особливого роду, яка відрізняється від таких частинок, як електрон, протон і т.п., що можуть існувати, рухаючись зі швидкостями, меншими за швидкість світла c , і навіть перебувати у стані спокою.

4 Ми розглянули ряд явищ, у яких світло веде себе як потік частинок (фотонів). Однак не слід забувати, що такі явища, як інтерференція й дифракція світла, можуть бути пояснені тільки на основі хвильових подань. *Таким чином, світло виявляє корпускулярно хвильовий дуалізм (подвійність): в одних явищах проявляється його хвильова природа, і він веде себе як електромагнітна хвиля, в інших явищах проявляється корпускулярна природа світла, і він веде себе як потік фотонів.* Далі ми побачимо, що корпускулярно-хвильовий дуалізм властивий не тільки квантам світла (фотонам), але й частинкам речовини (електронам, протонам, атомам і т.д.).

З'ясуємо, як пов'язані між собою хвильова й корпускулярна картина. Відповідь на це питання можна отримати, розглянувши з обох точок зору освітленість деякої поверхні. Відповідно до хвильових уявлень освітленість у деякій точці поверхні пропорційна квадрату амплітуди світлової хвилі. З корпускулярної точки зору освітленість пропорційна густині потоку фотонів. Отже, між квадратом амплітуди світлової хвилі й густиною потоку фотонів є пряма пропорційність. Таким чином, хвильові властивості світла пов'язані з кількістю фотонів, що попадають у дану точку простору. *Тобто хвильові властивості світла з точки зору корпускулярних уявлень пов'язані зі статистичними властивостями потоку фотонів.*

§ 75 Ефект Комптона. Зміна довжини хвилі фотона при його розсіюванні на електроні [6]

1 Особливо виразно проявляються корпускулярні властивості світла в явищі, яке отримало назву *ефекту Комптона*. У 1923 р. Комптон, досліджуючи розсіювання

рентгенівських променів різними речовинами, виявив, що в розсіяних променях разом з випромінюванням початкової довжини хвилі λ містяться також промені більшої довжини хвилі λ' . Різниця $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ виявилася залежною тільки від кута θ між напрямками розсіяного випромінювання та первинного пучка. Виявилось, що від довжини хвилі λ й від природи речовини, на якій відбувається розсіювання, $\Delta\lambda$ не залежить.

2 Схема досліду Комптона показана на рис. 75.1. Діафрагмами D виділяється вузький пучок монохроматичного (характеристичного) рентгенівського випромінювання і спрямовується на розсіювальну речовину PP . Спектральний склад розсіяного випромінювання досліджується за допомогою рентгенівського спектрографа, який складається із кристала Kp й іонізаційної камери IK .

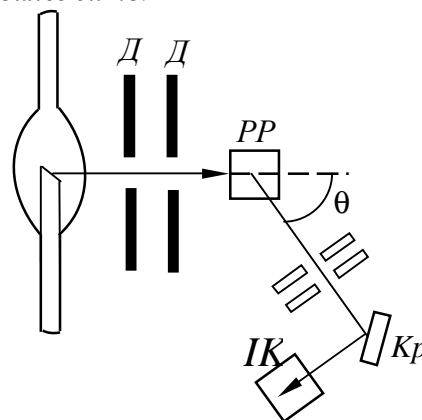


Рисунок 75.1 – Схема досліду Комптона

На рис. 75.2 наведені результати дослідження розсіювання монохроматичного рентгенівського випромінювання (лінія K_α молібдену) на графіті. Крива a характеризує первинне випромінювання. Інші криві належать до різних кутів розсіювання θ , значення яких подані на рисунку. Вздовж осі ординат відкладена інтенсивність випромінювання, вздовж осі абсцис – довжина хвилі.

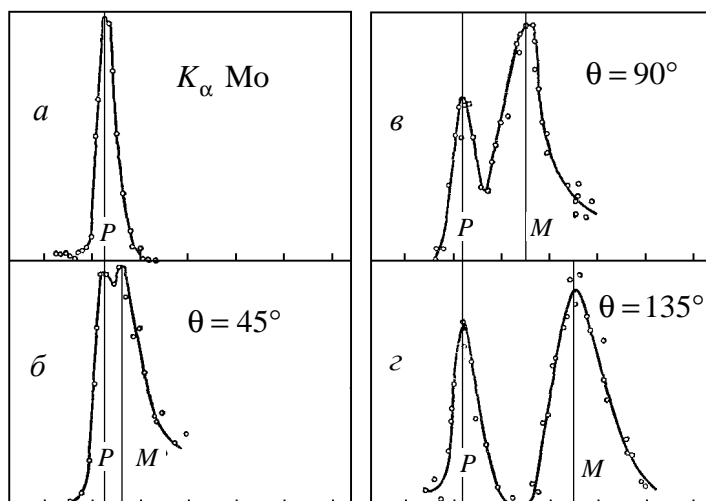


Рисунок 75.2 – Залежність інтенсивності розсіяного на графіті рентгенівського випромінювання від довжини хвилі

3 Усі особливості ефекту Комптона можна пояснити, розглядаючи розсіювання як процес пружного зіткнення рентгенівських фотонів із практично вільними електронами. Вільними можна вважати електрони, які слабо зв'язані з атомами, енергія зв'язку яких значно менша від тієї енергії, яку фотон може передати електрону при зіткненні.

Нехай на вільний електрон, який у початковому стані перебуває у стані спокою, падає фотон з енергією $\hbar\omega$ й імпульсом $\hbar\vec{k}$ (рис. 75.3). Енергія електрона до зіткнення дорівнює mc^2 (m – маса електрона), імпульс дорівнює нулю. Після зіткнення електрон буде мати імпульс \vec{p} й енергію, яка дорівнює $c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$ (див. відповідну формулу спеціальної теорії відносності). Енергія й імпульс фотона також зміняться й будуть дорівнювати $\hbar\omega'$ й $\hbar\vec{k}'$. Із законів збереження енергії й імпульсу випливають дві рівності:

$$\hbar\omega + mc^2 = \hbar\omega' + c\sqrt{p^2 + m^2c^2}, \quad (75.1)$$

$$\hbar\vec{k} = \vec{p} + \hbar\vec{k}' \quad (75.2)$$

Розділимо першу рівність на c й напишемо її у вигляді

$$\sqrt{p^2 + m^2 c^2} = \hbar(k - k') + mc$$

($\omega/c = k$). Піднесення до квадрата дає

$$p^2 = \hbar^2(k^2 + k'^2 - 2kk') + 2\hbar mc(k - k'). \quad (75.3)$$

З (75.2) випливає, що

$$p^2 = \hbar^2(\vec{k} - \vec{k}')^2 = \hbar^2(k^2 + k'^2 - 2kk' \cos \theta) \quad (75.4)$$

(θ – кут між векторами \vec{k} й \vec{k}' , див. рис. 75.3). З порівняння виразів (75.3) і (75.4) отримуємо

$$mc(k - k') = \hbar k k' (1 - \cos \theta).$$

Помножимо цю рівність на 2π й розділимо на $mckk'$:

$$\frac{2\pi}{k'} - \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{mc} (1 - \cos \theta).$$

Нарешті, врахувавши, що $2\pi/k = \lambda$, прийдемо до формули

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C (1 - \cos \theta), \quad (75.5)$$

де

$$\lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{mc}. \quad (75.6)$$

Обумовлена цим виразом величина λ_C називається **комptonівською довжиною хвилі** тієї частинки, маса m якої мається на увазі. У розглянутому нами випадку λ_C – комptonівська довжина хвилі електрона. Підстановка значень \hbar , m і c дає для λ_C електрона значення

$$\lambda_C = 0,00243 \text{ нм}. \quad (75.7)$$

Результати вимірів Комптона знаходяться у повній узгодженості з формулою (75.5), якщо підставити в неї значення (75.7) для λ_C .

4 При розсіюванні фотонів на електронах, зв'язок яких з атомом достатньо сильний, обмін енергією й імпульсом відбувається з атомом як цілим. Оскільки маса атома набагато перевершує масу електрона, комptonівське зміщення у цьому випадку є дуже малим й λ' практично збігається з λ . У міру зростання атомного номера збільшується відносно число електронів із сильним зв'язком, чим і обумовлюється ослаблення зміщеної лінії.

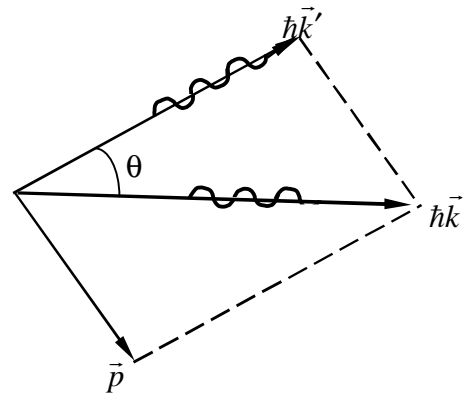


Рисунок 75.3 – Розсіювання рентгенівського фотона на електроні, який спочатку перебував у стані спокою: \vec{p} – імпульс електрона; $\hbar\vec{k}$ – імпульс фотона до зіткнення з електроном; $\hbar\vec{k}'$ – імпульс фотона після зіткнення; θ – кут розсіювання

РОЗДІЛ 5 ЕЛЕМЕНТИ АТОМНОЇ ФІЗИКИ ТА КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

ТЕМА 13 БОРІВСЬКА ТЕОРІЯ АТОМА

§ 76 Дослід Резерфорда. Ядерна модель атома. Залежність кількості α -частинок в одиниці тілесного кута від кута розсіювання. Проблема стабільності атома з точки зору ядерної моделі атома [6]

1 Дослід Резерфорда. Цікавість людини є безмежною. Яка внутрішня структура атома – найдрібнішої частинки хімічного елемента? Атом є електрично нейтральним, як усередині атома розподілені додатні та від’ємні електричні заряди? Відповіді на ці питання шукали Резерфорд і його співробітники за допомогою α -частинок, спостерігаючи зміну напрямку їх польоту (розсіювання), при проходженні через тонкі шари речовини.

У той час, коли Резерфорд приступав до своїх дослідів, було відомо, що α -частинки випромінюються деякими речовинами при радіоактивному розпаді. Швидкості α -частинок мають порядок 10^7 м/с. Вони мають додатний заряд, що дорівнює подвоєному елементарному заряду. При втраті цього заряду (при приєднанні двох електронів) α -частинка перетворюється в атом гелію.

Дослід виконувався так (рис. 76.1). α -частинки випромінювалися радіоактивною речовиною P , проходили через вузький отвір і попадали на тонку металеву фольгу Φ . При проходженні через фольгу α -частинки відхилялися від початкового напрямку руху на різні кути. Розсіяні α -частинки вдарялися об екран E , який був покритий сірчистим цинком, і викликане ударами світіння спостерігалися в мікроскоп M . Мікроскоп і екран можна було обертати навколо осі, що проходить через центр розсіювальної фольги, і встановлювати під будь-яким кутом θ . Весь прилад розміщувався у посудині, з якої було відкачано повітря. Це було зроблено для того, щоб усунути розсіювання α -частинок за рахунок зіткнень із молекулами повітря.

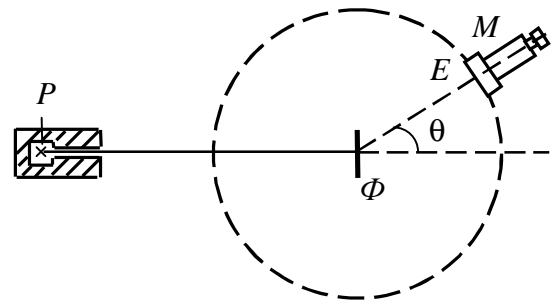


Рисунок 76.1 – Схема досліду Резерфорда

2 Ядерна модель атома.

Виявилось, що деяка кількість α -частинок розсіюється на дуже великі кути (майже до 180°). Проаналізувавши результати досліду, Резерфорд дійшов висновку, що настільки сильне відхилення α -частинок можливо тільки в тому випадку, коли усередині атома є надзвичайно сильне електричне поле, що створюється зарядом, який пов'язаний з великою масою й сконцентрований у дуже малому об'ємі. Грунтуючись на цьому висновку, Резерфорд запропонував у 1911 р. **ядерну модель атома**. Відповідно до Резерфорда атом являє собою систему зарядів, у

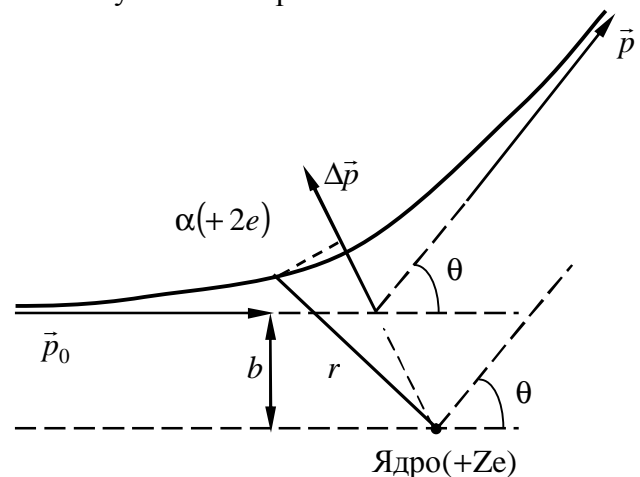


Рисунок 76.2

центрі якої розміщене важке додатне ядро із зарядом Ze із розміром не більше 10^{-14} м, а навколо ядра розміщені Z електронів, що розподілені в усьому об'ємі атома. Майже вся маса атома зосереджена в ядрі.

3 Залежність кількості α -частинок в одиниці тілесного кута від кута розсіяння.

Виходячи з таких припущень, Резерфорд розробив кількісну теорію розсіювання α -частинок і довів формулу для розподілу розсіяних частинок залежно від кута θ . При доведенні формули Резерфорд міркував так. Відхилення α -частинок обумовлені впливом на них атомних ядер. Помітного відхилення через взаємодію з електронами не може бути, оскільки маса електрона на чотири порядки менша від маси α -частинки.

Коли частинка пролітає поблизу ядра, на неї діє кулонівська сила відштовхування

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r^2}. \quad (76.1)$$

У цьому випадку траєкторія частинки являє собою гіперболу. Кут між асимптотами гіперболи позначимо буквою θ (рис. 76.2). Цей кут характеризує відхилення частинки від первісного напрямку. Відстань b від ядра до первісного напрямку польоту α -частинки називається прицільним параметром. Чим ближче пролітає частинка від ядра (чим менше b), тим, природно, сильніше вона відхиляється (тим більше θ). Величини b і θ пов'язані між собою співвідношенням

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{4\pi\epsilon_0 m_\alpha v^2}{2Ze^2} b, \quad (76.2)$$

яке можна довести, використовуючи закон збереження повної механічної енергії та моменту імпульсу.

Розглянемо настільки тонкий шар розсіювальної речовини, щоб кожна частинка при проходженні через нього пролітала поблизу тільки одного ядра, тобто щоб кожна частинка мала лише однократне розсіювання. Для того щоб частинка відхилилася на кут, що лежить у межах від θ до $\theta + d\theta$, вона повинна пролетіти поблизу одного з ядер по траєкторії, прицільний параметр якої міститься у межах від b до $b + db$ (рис. 76.3), причому db й $d\theta$, як випливає з (76.2), пов'язані співвідношенням

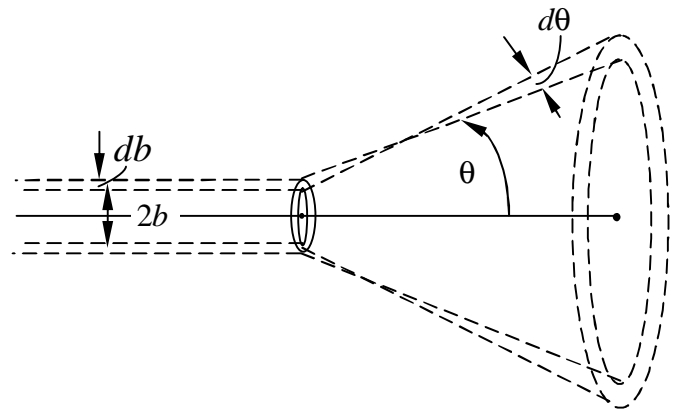


Рисунок 76.3

$$-\frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \frac{d\theta}{2} = \frac{4\pi\epsilon_0 m_\alpha v^2}{2Ze^2} db. \quad (76.3)$$

Знак мінус у цьому виразі обумовлений тим, що зі збільшенням b (тобто при $db > 0$) кут відхилення зменшується ($d\theta < 0$). Надалі нас буде цікавити лише абсолютне значення db у функції від θ , і тому знак мінус ми не будемо враховувати.

Позначимо площу поперечного перерізу пучка α -частинок буквою S . Тоді кількість атомів фольги на шляху пучка можна подати у вигляді nSa , де n – число атомів в одиниці об'єму, a – товщина фольги. Якщо α -частинки розподілені рівномірно по перерізу пучка й число їх дуже велике (що насправді має місце), то відносна кількість α -частинок, що пролітають поблизу одного з ядер по траєкторії із прицільним параметром від b до $b + db$ (і, отже, які відхиляються в межах кутів від θ до $\theta + d\theta$), буде дорівнювати відношенню відповідних площ (див. рис. 76.4):

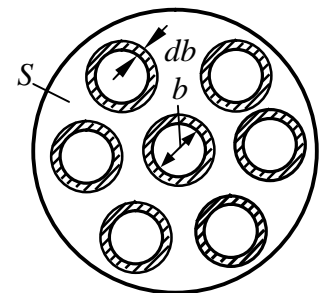


Рисунок 76.4

$$\frac{dN_\theta}{N} = \frac{nSa \cdot 2\pi b db}{S} = na2\pi b db. \quad (76.4)$$

У цьому виразі dN_θ – потік частинок, що розсіюються в межах кутів від θ до $\theta + d\theta$, N – повний потік частинок у пучку.

Замінивши у формулі (76.4) b і db через θ і $d\theta$ відповідно до (76.2) і (76.3), отримаємо

$$\frac{dN_\theta}{N} = na \left(\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_\alpha v^2} \right)^2 2\pi \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \frac{d\theta}{2}. \quad (76.5)$$

Перетворимо множники, що містять кут θ :

$$\frac{\operatorname{ctg}(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} = \frac{\cos(\theta/2) \sin(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} = \frac{\sin \theta}{2\sin^4(\theta/2)}.$$

З урахуванням цього перетворення

$$\frac{dN_\theta}{N} = na \left(\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_\alpha v^2} \right)^2 \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{4\sin^4(\theta/2)}.$$

Вираз $2\pi \sin \theta d\theta$ дає тілесний кут $d\Omega$, у межах якого знаходяться напрями, що відповідають кутам розсіювання від θ до $\theta + d\theta$. Тому можна написати

$$\boxed{\frac{dN_\theta}{N} = na \left(\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_\alpha v^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{4\sin^4(\theta/2)}} \quad (76.6)$$

Ми отримали **формулу Резерфорда** для розсіювання α -частинок. У 1913 р. співробітники Резерфорда зробили перевірку цієї формули шляхом підрахунку точок світіння на екрані, що спостерігалися під різними кутами θ за однакові проміжки часу. В умовах досліду (див. рис. 76.1) враховувалися α -частинки, які перебували в межах одного і того самого тілесного кута (який визначається відношенням площі екрана E до квадрата відстані його від фольги), тому число точок світіння, що спостерігалися під різними кутами, повинне було бути, відповідно до формули Резерфорда, пропорційно $1/(\sin(\theta/2))^4$. Цей результат теорії добре підтвердився на досліді. Залежність розсіювання від товщини фольги й швидкості α -частинок також виявилася узгодженою з формулою (76.6).

Справедливість теорії, що впливає із кулонівської взаємодії між α -частинкою і ядром атома, свідчить про те, що α -частинка, яка відбивається у зворотному напрямку, не проникає в область додатного заряду атома. Разом з тим α -частинка, що летить точно у напрямку ядра, підійшла б до його центра на відстань, яку можна визначити, прирівнявши кінетичну енергію α -частинки до потенціальної енергії взаємодії α -частинки з ядром у момент повної зупинки частинки

$$\frac{m_\alpha v^2}{2} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}}$$

(r_{\min} – мінімальна відстань між центрами α -частинки і ядра). Поклавши $Z = 47$ (срібло), $v = 10^7$ м/с і $m_\alpha = 6,6 \cdot 10^{-27}$ кг, отримаємо

$$r_{\min} = \frac{4Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_\alpha v^2} \approx 6 \cdot 10^{-14} \text{ м.}$$

4 Проблема стабільності атома з точки зору ядерної моделі атома. Отже, результати дослідів з розсіювання α -частинок свідчать на користь запропонованої Резерфордом ядерної моделі атома. Однак ядерна модель виявилася суперечливою відносно законів класичної механіки й електродинаміки. Оскільки система нерухомих зарядів не може перебувати в стійкому стані, то Резерфорду довелося відмовитися від статичної моделі атома

й припустити, що електрони рухаються навколо ядра, описуючи викривленні траєкторії. Але в цьому випадку електрон буде рухатися із прискоренням, у зв'язку із чим відповідно до класичної електродинаміки він повинен безперервно випромінювати електромагнітні (світлові) хвилі. Процес випромінювання супроводжується втратою енергії, так що електрон повинен в остаточному підсумку впасти на ядро.

§ 77 Постулати Бора. Правило квантування орбіт. Досліди Франка й Герца [6]

1 Постулати Бора. Правило квантування орбіт. У попередньому параграфі було з'ясовано, що ядерна модель атома з точки зору класичної механіки й електродинаміки виявилася нездатною пояснити стійкість атома. Вихід з цього утруднення був знайдений в 1913 р. датським фізиком Нільсом Бором, щоправда, ціною введення припущень, що суперечать класичним уявленням. Припущення, запропоновані Бором, містяться у двох сформульованих ним постулатах (*постулати Бора*).

1) *Атом (і будь-яка атомна система) може перебувати не у всіх станах, що допускаються класичною механікою, а тільки в деяких вибраних (квантових) станах, що характеризуються певними перервними, дискретними значеннями енергії E_1, E_2, E_3, \dots . У цих станах, всупереч класичній електродинаміці, атом не випромінює. Тому вони називаються стаціонарними станами.*

2) *Випромінювання випускається або поглинається у вигляді світлового кванта енергії $\hbar\omega$ при переході електрона з одного стаціонарного стану в інший. Величина світлового кванта дорівнює різниці енергій стаціонарних станів, між якими відбувається квантовий перехід електрона:*

$$\hbar\omega = E_n - E_m. \quad (77.1)$$

Які ж орбіти потрібно вважати стаціонарними? На це питання відповідає **правило квантування орбіт**: у стаціонарному стані атома електрон, рухаючись по орбіті, повинен мати дискретні, квантовані значення моменту імпульсу:

$$L = m_e v r = n\hbar \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (77.2)$$

Тут m_e – маса електрона; v – його швидкість; r – радіус кругової орбіти; n – ціле число, що з часом отримало назву головного квантового числа. Правило квантування орбіт Бор отримав, виходячи з гіпотези Планка, відповідно до якої реалізуються тільки такі стани гармонічної коливальної системи (гармонічного осцилятора), енергія яких дорівнює $n\hbar\omega'$, де ω' – частота коливальної системи. Отримане правило для гармонічного осцилятора Бор поширив і на інші механічні системи.

Постулати Бора стали обґрунтуванням планетарної (ядерної) моделі атома, пояснили ряд експериментів.

2 Досліди Франка й Герца. Існування дискретних енергетичних рівнів атома підтверджується дослідями, виконаними в 1914 р. Франком і Герцем. Схема їх установки наведена на рис. 77.1. У трубці, яка заповнена парами ртуті під невеликим тиском (~1 мм рт. ст.), знаходяться три електроди: катод K , сітка C й анод A . Електрони, що вилітають з катода внаслідок термоелектронної емісії, прискорюються різницею потенціалів U , яка прикладена між катодом і сіткою. Цю різницю потенціалів

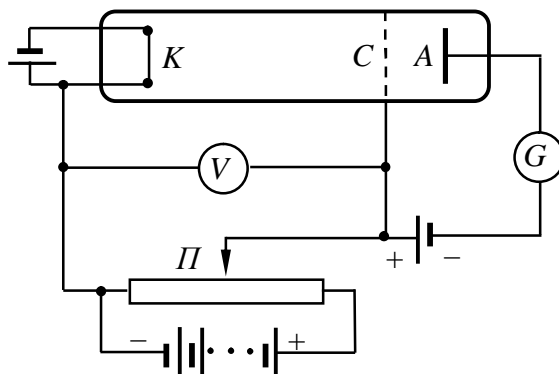


Рисунок 77.1

можна плавно змінювати за допомогою потенціометра Π . Між сіткою й анодом створювалося слабе електричне поле (різниця потенціалів порядку 0,5 В), яке гальмувало рух електронів до анода. На рис. 77.2 показана зміна потенціальної енергії електрона

$E_p = -e\phi$ у зазорі між електродами при різних значеннях напруги U між катодом і сіткою (ϕ – потенціал, у відповідній точці поля).

Досліджувався струм I в колі анода залежно від напруги U між катодом і сіткою. Сила струму вимірялася гальванометром G , напруга – вольтметром V . Отримані результати подані на рис. 77.3. Бачимо, що сила струму спочатку монотонно зростала, досягаючи максимуму при $U = 4,9$ В, після чого з подальшим збільшенням U різко спадала, досягаючи мінімуму, і знову починала зростати. Максимуми сили струму повторювалися при напрузі U , що дорівнювала 9,8 В, 14,7 В і т.д.

Такий хід кривої пояснюється тим, що внаслідок дискретності енергетичних рівнів атоми можуть поглинати енергію тільки порціями:

$$\Delta E_1 = E_2 - E_1 \text{ або } \Delta E_2 = E_3 - E_2 \text{ і так далі,}$$

де E_1, E_2, E_3, \dots – енергія 1-го, 2-го й т.д. стаціонарних станів.

Поки енергія електрона менша за ΔE_1 , зіткнення між електроном і атомом ртуті мають пружний характер, причому оскільки маса електрона набагато менша від маси атома ртуті, енергія електрона при зіткненнях практично не змінюється. Частина електронів попадає на сітку, інші ж, проскочивши через сітку, досягають анода, створюючи струм у колі гальванометра G . Чим більша швидкість, з якої електрони досягають сітки (чим більше U), тим більше буде електронів, які проскочили через сітку, і, отже, тим більшою буде сила струму I .

Коли енергія, що отримується електроном у проміжку катод-сітка, досягає значення ΔE_1 , зіткнення перестають бути пружними – електрони при ударах об атоми передають їм енергію ΔE_1 й продовжують потім рухатися з меншою швидкістю. Тому число електронів, що досягають анода, зменшується. Наприклад, при $U = 5,3$ В електрон передає атому енергію, що відповідає 4,9 В (перший потенціал збудження атома ртуті), і продовжує рухатися з енергією 0,4 еВ. Якщо навіть такий електрон з'явиться між сіткою й анодом, він не зможе перебороти затримуючу напругу 0,5 В і буде повернутий назад на сітку.

Атоми, що отримали при зіткненні з електронами енергію ΔE_1 , переходять у збуджений стан, з якого вони через час порядку 10^{-8} с повертаються в основний стан, випромінюючи фотон із частотою $\omega = \Delta E_1 / \hbar$.

При напрузі, що перевищує 9,8 В, електрон на шляху катод-анод може двічі перетерпіти непружне зіткнення з атомами ртуті, втрачаючи при цьому енергію 9,8 еВ, внаслідок чого сила струму I знову почне зменшуватися. При ще більшій напрузі можливі трикратні непружні зіткнення електронів з атомами, що приводить до виникнення максимуму при $U = 14,7$ В, і т.д.

При достатньому розрідженні парів ртуті й відповідній величині прискорювальної напруги електрони за час до зіткнення з атомами можуть отримати швидкість, достатню для переведення атома у стан з енергією E_3 . У цьому випадку на кривій $I = f(U)$ будуть спостерігатися максимуми при напругах, кратних другому потенціалу збудження атома (для ртуті цей потенціал дорівнює 6,7 В), або при напругах, що дорівнюють сумі першого й другого потенціалів збудження і т.д.

Таким чином, у дослідах Франка й Герца безпосередньо спостерігається існування в атомів дискретних енергетичних рівнів.

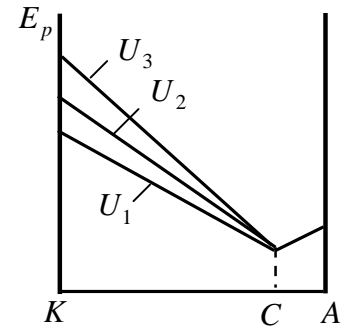


Рисунок 77.2

Чим більша швидкість, з якої електрони досягають сітки (чим більше U), тим більше буде електронів, які проскочили через сітку, і, отже, тим більшою буде сила струму I .

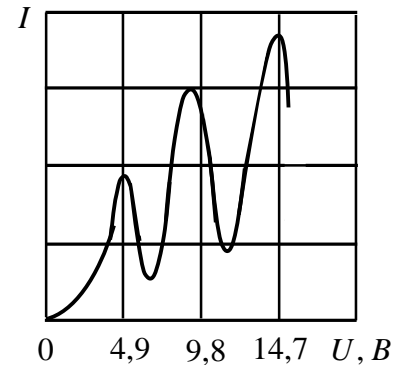


Рисунок 77.3

§ 78 Спектральні закономірності у випромінюванні атома водню. Терми. Комбінаційний принцип Рітца [6]

1 Випромінювання незв'язаних один з одним атомів складається з відокремлених спектральних ліній. Відповідно до цього спектр випромінювання атомів називається *лінійчастим*.

Вивчення атомних спектрів стало ключем до пізнання будови атомів. Насамперед було помічено, що лінії в спектрах атомів розміщені не безсистемно, а поєднуються в групи або, як їх називають, *серії ліній*. Краще всього це проявляється в спектрі найпростішого атома – водню. На рис. 78.1 подана частина спектра атомарного водню у видимій і близькій ультрафіолетовій області. Символами H_α , H_β , H_γ і H_δ позначені видимі лінії. H_∞ вказує межу серії (див. нижче). Очевидно, що лінії розміщені у певному порядку. Відстань між лініями закономірно зменшується при переході від більш довгих хвиль до більш коротких.

Швейцарський фізик Бальмер (1885) виявив, що довжини хвиль цієї серії ліній водню можуть бути точно подані формулою

$$\omega = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 3, 4, 5, \dots), \quad (78.1)$$

де n – ціле число, що набуває значень 3, 4, 5 і т.д.; R – константа, названа на честь шведського спектроскопіста *сталою Рідберга*¹. Вона дорівнює

$$R = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ c}^{-1}. \quad (78.2)$$

Формула (78.1) називається *формулою Бальмера*¹, а відповідна серія спектральних ліній водневого атома – *серією Бальмера*. Подальші дослідження показали, що у спектрі водню є ще кілька серій. В ультрафіолетовій частині спектра знаходиться серія Лаймана. Інші серії лежать в інфрачервоній області. Лінії цих серій можуть бути подані у вигляді формул, аналогічних до (78.2):

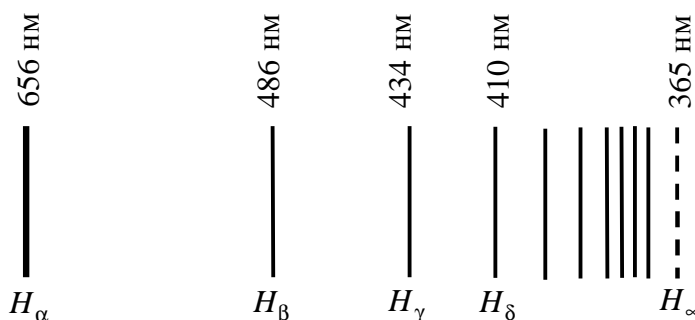


Рисунок 78.1

$$\text{серія Лаймана} \quad \omega = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 2, 3, 4, \dots),$$

$$\text{серія Пашена} \quad \omega = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 4, 5, 6, \dots),$$

$$\text{серія Брекета} \quad \omega = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 5, 6, 7, \dots),$$

¹ У спектроскопії спектральні лінії характеризують не частотою, а величиною, яка обернена до довжини хвилі

$$1/\lambda = \omega/(2\pi c).$$

Формула Бальмера, що написана для цієї величини, має такий самий вигляд, як (78.1):

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 3, 4, 5, \dots).$$

Стала Рідберга набуває у цьому випадку значення $R' = 10973731,77 \pm 0,83 \text{ м}^{-1}$.

$$\text{серія Пфунда } \omega = R \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 6, 7, 8, \dots).$$

Частоти усіх ліній спектра водневого атома можна подати однією формулою

$$\omega = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (78.3)$$

де m має значення 1 для серії Лаймана, 2 – для серії Бальмера і т.д. Для заданого m число n набуває всіх цілих значень, починаючи з $m+1$. Вираз (78.3) називають *узагальненою формулою Бальмера*.

При зростанні n частота лінії в кожній серії прямує до граничного значення R/m^2 , яке називається *межею серії* (на рис. 78.1 символом H_∞ позначена межа серії Бальмера).

2 Візьмемо ряд значень виразів $T(n) = R/n^2$:

$$\frac{R}{1^2}, \frac{R}{2^2}, \frac{R}{3^2}, \dots \quad (78.4)$$

Частота будь-якої лінії спектра водню може бути подана у вигляді різниці двох чисел ряду (78.4). Ці числа називають *спектральними термами*, або просто *термами*. Так, наприклад, частота першої лінії серії Бальмера дорівнює $T(2) - T(3)$, другої лінії серії Пфунда $T(5) - T(7)$ і т.д.

Вивчення спектрів інших атомів показало, що частоти ліній і в цьому випадку можуть бути подані у вигляді різниці двох термів:

$$\omega = T_1(m) - T_2(n). \quad (78.5)$$

Формула (78.5) виражає основний закон спектроскопії, встановлений емпірично в 1908 р., який називається *комбінаційним принципом Рітца*. *Принцип Рітца полягає у тому, що все різноманіття спектральних ліній атома може бути отримане шляхом попарних комбінацій набагато меншого числа величин, які називаються спектральними термами*. Частота кожної спектральної лінії дорівнює різниці двох термів (78.5). Однак терм $T(n)$ для інших атомів звичайно має більш складний вигляд, ніж для водневого атома. Крім того, перший і другий члени формули (78.5) беруться з різних рядів термів.

§ 79 Борівська теорія воднеподібного атома. Узагальнена формула Бальмера. Стала Рідберга. Недоліки теорії Бора [3]

1 Використовуючи постулати (Бора), умови квантування орбіт та деякі закони класичної механіки, Бор створив напівкласичну теорію воднеподібного атома. Розглянемо детально цю теорію.

Відповідно до моделі атома Резерфорда електрон у воднеподібному атомі рухається в полі атомного ядра із зарядом Ze по колу під дією сили Кулона. При $Z = 1$ така система відповідає атому водню, при інших Z – воднеподібному іону, тобто атому з порядковим номером Z , у якого вилучені всі електрони, крім одного. В атомі електрон під дією сили Кулона рухається по коловій орбіті радіуса r зі швидкістю v з доцентровим прискоренням $a_{\text{доц}} = v^2/r$. Рівняння другого закону Ньютона для електрона в цьому випадку має вигляд

$$m_e a_{\text{доц}} = F_K, \text{ або } m_e \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2}. \quad (79.1)$$

Також згідно з першим постулатом Бора електрон може рухатися тільки по стаціонарних орбітах, для яких момент імпульсу електрона $L = m_e v r$ відповідно до правила квантування орбіт задовольняє умову:

$$m_e v r = n\hbar \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (79.2)$$

Число n у виразі (79.1) називається *головним квантовим числом*, де m_e – маса електрона; v – його швидкість; r – радіус орбіти; \hbar – стала Планка.

Система рівнянь (79.1) (79.2) повністю описує поведінку електрона у воднеподібному атомі.

Виключивши швидкість v із рівнянь (79.1) і (79.2), отримаємо вираз для радіусів стаціонарних орбіт:

$$r \equiv r_n = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{m_e Z e^2} n^2 \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (79.3)$$

Радіус першої орбіти ($n=1$) атома водню ($Z=1$) називається *борівським радіусом*. Його значення дорівнює

$$r_0 = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м}. \quad (79.4)$$

Відзначимо, що борівський радіус має порядок значення газокінетичних розмірів атома.

Внутрішня енергія атома складається з кінетичної енергії електрона (ядро є нерухомим) і енергії електростатичної взаємодії електрона з ядром:

$$E = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z e^2}{r}.$$

З (79.1) випливає, що

$$\frac{m_e v^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z e^2}{r}.$$

Отже,

$$E = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Z e^2}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z e^2}{r} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Z e^2}{r}.$$

Підставивши сюди вираз (79.3) для r , знайдемо значення енергії атома на стаціонарних орбітах:

$$E \equiv E_n = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{m_e Z^2 e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (79.5)$$

Як бачимо, повна енергія воднеподібного атома визначається числом n . Саме тому число n отримало назву *головного квантового числа*.

При переході атома водню ($Z=1$) зі стану n в стан m випромінюється фотон, енергія якого визначається другим постулатом Бора

$$\hbar\omega = E_n - E_m = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right).$$

Частота випромінюваного світла дорівнює

$$\omega = \frac{E_n - E_m}{\hbar} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{m_e e^4}{2\hbar^3} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Ми прийшли до узагальненої формули Бальмера, причому для сталої Рідберга отримали значення

$$R = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{m_e e^4}{2\hbar^3} = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}. \quad (79.6)$$

Як бачимо, при підстановці у вираз (79.6) числових значень m_e , e і \hbar отримуємо величину, що дуже добре узгоджується з експериментальним значенням сталої Рідберга.

2 Теорія Бора була великим кроком у розвитку теорії атома. Вона пояснила ряд експериментальних фактів, стала потужним стимулом для проведення багатьох експериментальних досліджень, які принесли важливі результати. Навіть у тих випадках (а таких випадків була більшість), коли теорія не могла кількісно пояснити багато явищ, два постулати Бора були керівною ниткою при класифікації і якісній інтерпретації цих явищ. На їх основі, наприклад, був класифікований величезний емпіричний матеріал атомної й молекулярної спектроскопії.

Після перших успіхів теорії Бора усе чіткіше проявлялися її недоліки. Особливо тяжкою була невдача при побудові теорії атома гелію – одного з найпростіших атомів після атома водню.

Самою слабкою стороною теорії Бора була її внутрішня логічна суперечливість: вона не була ні послідовно класичною, ні послідовно квантовою теорією. Після відкриття хвильових властивостей речовини стало зрозуміло, що теорія Бора, яка опирається на класичну механіку, є перехідним етапом на шляху до створення послідовної квантової теорії атомних явищ.

ТЕМА 14 ХВИЛЬОВІ ВЛАСТИВОСТІ МІКРОЧАСТИНОК

§ 80 Гіпотеза де Бройля. Довжина хвилі де Бройля для електрона, що вільно рухається [6, 11]

1 У результаті поширення уявлень про природу світла з'ясувалося, що світло виявляє корпускулярно хвильовий дуалізм (подвійність). В одних явищах проявляється його хвильова природа, і він веде себе як електромагнітна хвиля (інтерференція, дифракція), в інших явищах проявляється корпускулярна природа світла, і він веде себе як потік фотонів (фотоэффект, явище Комптона).

У 1924 р. **де Бройль висунув сміливу гіпотезу, що дуалізм не є особливістю тільки світла. Він припустив, що і частинки речовини поряд з корпускулярними властивостями мають також і хвильові (корпускулярно-хвильовий дуалізм частинок). Де Бройль переніс на частинки речовини такі самі правила переходу від корпускулярних характеристик до хвильових, які є справедливими у випадку світла.**

Так відомо, що фотон світла має енергію

$$E = \hbar\omega \quad (80.1)$$

й імпульс

$$p = 2\pi\hbar/\lambda, \quad (80.2)$$

які пов'язані з частотою ω та довжиною λ світлової хвилі.

За гіпотезою де Бройля рух будь-якої частинки пов'язаний із хвильовим процесом, довжина хвилі визначається аналогічно до (80.2)

$$\boxed{\lambda = 2\pi\hbar / p} \quad (80.3)$$

а частота – аналогічно до (80.1)

$$\boxed{\omega = E / \hbar}. \quad (80.4)$$

Формули (80.3) та (80.4) визначають довжину та частоту хвилі де Бройля (хвилі, що відповідає частинці речовини).

2 Все викладене вище є гіпотетичним і тому не має доказової сили. Точним доведенням або спростуванням отриманих результатів може бути тільки дослід. У яких саме явищах природи можуть виявитися хвильові властивості речовини, якщо вони дійсно існують? Незалежно від фізичної природи хвиль до таких явищ відносять інтерференцію й дифракцію. Безпосередньо величиною, яка тут досліджується, є довжина хвилі λ . У всіх випадках довжини хвиль де Бройля визначаються формулою (80.3). Застосуємо її до

нерелятивістського руху частинок. Для електронів з масою m_e , які прискорені різницею потенціалів U , імпульс визначається із закону збереження енергії

$$\frac{p^2}{2m_e} = \frac{m_e v^2}{2} = eU,$$

тобто

$$p = \sqrt{2eUm_e}. \quad (80.5)$$

Тоді з (80.3) отримаємо

$$\lambda = 2\pi\hbar / \sqrt{2eUm_e}. \quad (80.6)$$

Визначимо довжину хвилі де Бройля для електронів, які прискорені напругою від 100 В до 10 кВ. Підставивши у співвідношення (80.6) відповідні числа, отримаємо, що довжина хвилі де Бройля такого електрона змінюється від 0,39 нм до 0,012 нм, тобто відповідає рентгенівському діапазону.

Таким чином, довжина хвилі де Бройля для електронів, які прискорені напругою від 100 В до 10 кВ, мають такий самий порядок, що й довжини хвиль рентгенівських променів. Тому дифракцію таких електронів потрібно намагатися шукати методами, аналогічними до тих, які застосовуються у випадку рентгенівських променів. Однак гіпотеза де Бройля уявлялась настільки фантастичною, що порівняно довго ніхто з експериментаторів не намагався піддати її експериментальній перевірці.

§ 81 Досліди Девісона й Джермера. Досліди Томсона й Тартаковського [3]

1 Гіпотеза де Бройля була підтверджена експериментально в дослідах Девісона й Джермера, а також Томсона (1927) та Тартаковського.

Девісон і Джермер досліджували в 1927 р. відбиття електронів від монокристала нікелю, що належить до кубічної системи. Вузький пучок моноенергетичних електронів спрямовувався на поверхню монокристала, який був відшліфований перпендикулярно до великої діагоналі кристалічної комірки. Відбиті електрони вловлювалися циліндричним електродом, який був приєднаним до гальванометра (рис. 81.1). Інтенсивність відбитого пучка оцінювалася за силою електричного струму, що проходить через гальванометр. Змінювалися швидкість електронів і кут φ . На рис. 81.2 показана залежність сили струму, яка вимірювалася гальванометром, від кута φ при різних енергіях електронів.

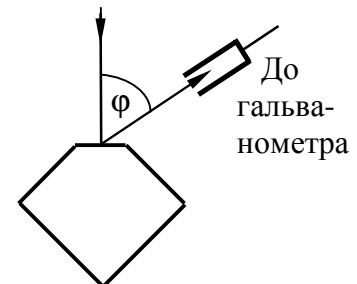


Рисунок 81.1

Вертикальна вісь на графіках визначає напрям електронного пучка, що падає на монокристал. Сила струму в заданому напрямку відображається довжиною відрізка, який проведено від початку координат до точки перетину з кривою. З рисунка бачимо, що розсіювання виявилось особливо інтенсивним при певному значенні кута φ . Цей кут відповідав відбиттю від атомних площин, відстань d між якими була відома з рентгенографічних досліджень. При даному φ сила струму виявилася особливо значною при прискорювальній напрузі, яка дорівнювала 54 В. Обчислена за формулою де Бройля довжина хвилі електрона

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}, \quad (81.1)$$

яка відповідає цій напрузі, дорівнює 0,167 нм. Бреггівська довжина хвилі, що відповідає умові² (див. питання «Дифракція на просторових структурах. Закон Вульфа-Брегга»)

$$2d \sin \theta = m\lambda$$

дорівнювала 0,165 нм. Збіг цих довжин хвиль настільки вражаючий, що досліди Девісона й Джермера визнано блискучим підтвердженням ідеї де Бройля.

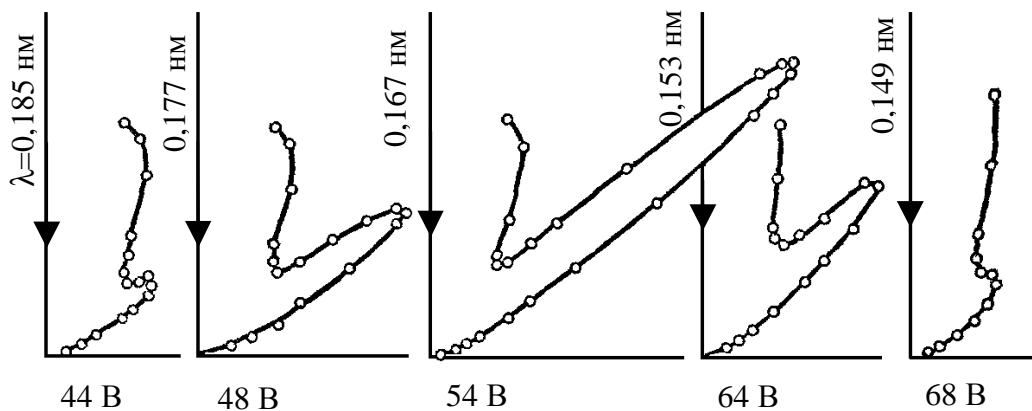


Рисунок 81.2

2 Г.П.Томсон (1927) і незалежно від нього П.С.Тартаковський отримали дифракційну картину при проходженні електронного пучка через металеву фольгу. Схема досліду подана на рис. 81.3. Пучок електронів, прискорений різницею потенціалів порядку декількох десятків кіловольт, проходив через тонку металеву фольгу й попадав на фотопластинку. Електрон при ударі об фотопластинку відіграє таку саму роль, як і фотон. Отримана таким способом електроннограма золота (рис. 81.4а) подібна до рентгенограми алюмінію (рис. 81.4б), яка отримана в аналогічних умовах. Подібність обох картин вражає.

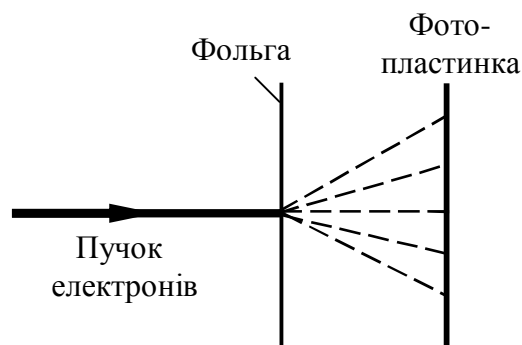


Рисунок 81.3

Штерн і його співробітники показали, що дифракційні явища мають місце також і для атомних та молекулярних пучків. У всіх перелічених випадках дифракційна картина відповідає довжині хвилі, яка визначається співвідношенням (81.1).

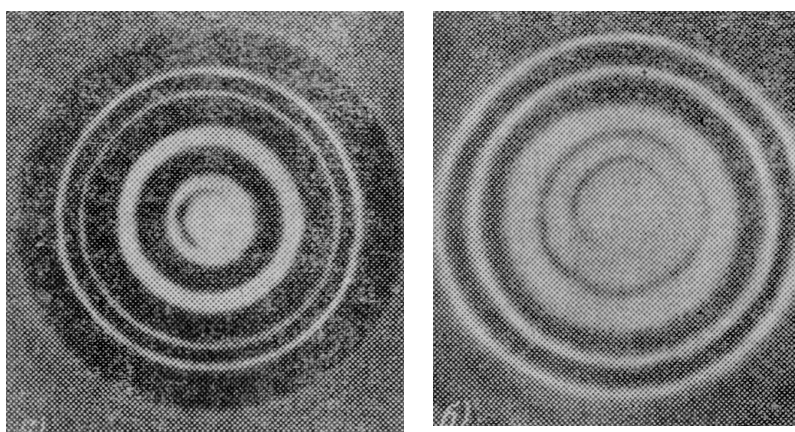


Рисунок 81.4

² Кут ковзання θ пов'язаний з кутом φ співвідношенням $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$.

§ 82 Статистична інтерпретація хвиль де Бройля [11]

Який же фізичний зміст хвиль де Бройля і який їх зв'язок із частинками речовини? Об'єкти мікросвіту є частинками, чи хвилями?

1 *Одна з хибних гіпотез*, за допомогою якої Шредінгер спробував відповісти на це питання, а потім швидко відмовився від неї, полягає у такому. Ніякого дуалізму хвиль і частинок у дійсності не існує. Існують тільки хвилі. Частинки ж є суперпозицією хвиль. Справа в тому, що через математичну теорему Фур'є із хвиль різних частот і напрямків завжди можна скласти *хвильовий пакет*, тобто таке хвильове утворення, що при накладенні в певний момент часу хвилі будуть підсилювати одна одну в деякій малій області простору, а поза цією областю відбудеться їх повне гасіння. *Такий хвильовий пакет і є частинка*. Інтенсивність хвиль де Бройля розглядається тут як величина, яка пропорційна густині середовища, з якої утворюється частинка. Здавалося, що підтвердженням такої точки зору є та обставина, що центр хвильового пакета, подібно до центра групи хвиль, повинен у вакуумі поширюватися із груповою швидкістю. А групова швидкість хвиль де Бройля і дорівнює швидкості частинки. Однак хвильовий пакет не може поводитися як частинка тривалий час. Причиною цього є те, що навіть у вакуумі хвилі де Бройля мають *дисперсію*. Внаслідок дисперсії такий хвильовий пакет буде еволюціонувати в часі. Монохроматичні хвилі різних частот, з яких утворений пакет, будуть розходитися з різними фазовими швидкостями. Це призведе до деформації, розпливання і зрештою до *розпаду* первісного хвильового пакета. Таким чином, частинка, якщо вона була хвильовим утворенням, була б нестійкою й швидко розпадалася б. Це жодною мірою не відповідає дійсності. **Таким чином, частинка не може бути хвильовим пакетом, утвореним із хвиль де Бройля.**

2 *Не можна прийняти й протилежну точку зору: первинними є частинки, а хвилі представляють їхні утворення, тобто виникають у середовищі, що складається із частинок, подібних до звуку, що поширюється у повітрі*. Дійсно, таке середовище повинно бути досить щільним, тому що про хвилі в середовищі частинок має сенс говорити лише тоді, коли середня відстань між частинками є дуже малою у порівнянні з довжиною хвилі. А в типових випадках для хвиль де Бройля ця умова не виконується. Але якщо б навіть ми перебороли це утруднення, то все-таки зазначена точка зору повинна бути відкинута. Насправді вона означає, що *хвильові властивості притаманні системам багатьох часток, а не окремим частинкам*. Тим часом хвильові, інтерференційні властивості часток не зникають і при малих інтенсивностях падаючих пучків. Це було доведено прямими дослідями Бібермана, Сушкіна й Фабриканта з електронами. У дослідях Бібермана, Сушкіна й Фабриканта застосовувалися настільки слабкі пучки електронів, що середній проміжок часу між двома послідовними проходженнями електрона через дифракційну систему був приблизно в 30 000 разів більше часу, яке витрачається одним електроном на проходження всього приладу. За таких умов взаємодія між електронами, звичайно, не відіграла ніякої ролі. Тим часом при досить тривалій експозиції виникала дифракційна картина, яка нічим не відрізнялася від картини, що отримували при короткій експозиції з пучками електронів, інтенсивність яких була приблизно у 10^7 разів більше. Важливим є те, що в обох випадках загальне число електронів, які потрапили на фотопластинку, було однаково. Це показує, що **й окремі частинки мають хвильові властивості**. Побічним доказом цього є також те, що хвильові властивості мають електрони атомних оболонок, наприклад, єдиний електрон атома водню, і при цьому про середовище, що утворене електронами, говорити не доводиться.

3 Так який же фізичний зміст хвиль де Бройля? Щоб відповісти на вищепоставлене питання, розглянемо такий експеримент. Припустимо, що пучок частинок (для визначеності будемо говорити про електрони) падає на деякий дифракційний пристрій, наприклад кристал. Як показують експерименти, дифракція властива й хвилям де Бройля, що відповідають тільки одній частинці. Тому можна припустити, що у пучок, який падає, складається всього з одного електрона. При проходженні відповідної електронної хвилі де Бройля через кристал вона розбивається на кілька дифракційних пучків. *Не можна припускати, що в кожному з таких пучків знаходиться якась частинка електрона.*

Електрон діє завжди як ціле й ніколи не проявляється частина електрона, – у цьому проявляється атомізм, що властивий мікросвіту. Припустимо, що на шляху одного з дифрагованих пучків поставлений лічильник для вловлювання електронів. Якщо лічильник спрацьовує, то він завжди виявляє цілий електрон, а аж ніяк не його частину. Із цього не можна зробити висновок, що до виявлення електрон знаходився тільки в одному розглянутому дифрагованому пучку, а тому всі інші дифраговані пучки ніякої ролі не відіграли – їх просто не існувало. Така точка зору означала б, що електрон проходить через експериментальний пристрій як матеріальна точка класичної механіки. *Це є несумісним з явищами інтерференції й дифракції електронів.* Якщо повторити той самий дослід з іншим електроном, то електрон виявиться також в одному з дифрагованих пучків, але в загальному випадку не в тому самому. Подібні труднощі змусили Борна запропонувати **статистичну інтерпретацію хвиль де Бройля**, що дозволяє об'єднати атомізм частинок з їх хвильовими властивостями.

4 Відповідно до статистичної інтерпретації хвилі де Бройля потрібно розглядати як хвилі ймовірності. А саме: **інтенсивність хвилі де Бройля в будь-якому місці простору пропорційна ймовірності виявити частинку в цьому місці.** Але статистичні або ймовірнісні властивості частинок можуть бути встановлені на досліді не з одною частинкою, а лише з *багатьма частинками* або тільки з однією частинкою, якщо дослід за певних умов повторений багаторазово. Говорити про статистику й ймовірність має сенс лише стосовно певної сукупності елементів, до яких ці поняття відносять. Це може бути або сукупність багатьох одночасних елементів, які спостерігаються, або один елемент, який спостерігається у послідовні моменти часу. Такі сукупності елементів у квантовій механіці називаються **квантовими ансамблями**. Квантовий ансамбль, і це є одним з основних положень квантової механіки, реалізується шляхом встановлення деяких макроскопічних параметрів. Це, звичайно, не означає, що хвильові властивості властиві ансамблям частинок, а не самим частинкам. Ансамблі необхідні тільки для виявлення таких властивостей.

5 Як зі статистичної точки зору пояснюється дифракція частинок, наприклад електронів? Перед влученням на дифракційний пристрій електрони проходять певну прискорювальну різницю потенціалів, якій відповідає одне і те саме значення довжини хвилі де Бройля. Прискорювальний потенціал і є тим макроскопічним параметром, що виділяє квантовий ансамбль частинок. Нехай реєстрація електронів виконується за допомогою фотопластинки. У яке місце фотопластинки потрапить індивідуальний електрон, достовірно передбачити неможливо; це можна зробити тільки з тим або іншим ступенем ймовірності. Ймовірність влучення електрона в те або інше місце фотопластинки пропорційне інтенсивності хвилі де Бройля в цьому місці. Окремий електрон залишає на фотопластинці (після її прояву) пляму. Якщо електронів мало, то фотопластинка буде нагадувати мішень, що прострелена невеликою кількістю куль. У розміщенні плям на фотопластинці не виявиться ніякої закономірності. Закономірність буде статистичною, коли на пластинку потрапить дуже багато електронів. У цьому випадку вони переважно потраплять у ті місця фотопластинки, де повинні бути дифракційні максимуми хвиль де Бройля. Сукупність відповідних плям і є дифракційною картиною, що отримується на досліді. Поки електростатичне відштовхування між електронами несуттєве, дифракційна картина буде однією й тією самою незалежно від того, чи утвориться вона електронами, що послідовно проходять по одному через прилад, або відразу інтенсивним пучком однаково прискорених електронів, який складається з такого самого числа частинок.

§ 83 Співвідношення невизначеностей Гейзенберга [11]

1 У класичній механіці стан матеріальної точки в довільний момент часу характеризується її положенням й імпульсом, тобто можна одночасно встановити їх точні значення координат та імпульсу. Для реальних мікрочастинок миттєвий стан не можна

характеризувати точними значеннями їх координат й імпульсу. Причина цього полягає у тому, що будь-яка мікрочастинка має як корпускулярні, так і хвильові властивості.

Не можна сказати, що в певній точці простору довжина хвилі дорівнює λ , якщо про хвильове поле у всіх інших точках простору нічого не відомо. Довжина хвилі є характеристикою синусоїди, а синусоїда – нескінченна періодична крива. Вираз «довжина хвилі в даній точці простору x дорівнює λ » або «частота хвильового процесу в цей момент часу t дорівнює ω » не мають ніякого змісту – величина λ не є функцією x , а величина ω – функцією t .

З іншого боку, якщо деяке хвильове утворення займає обмежену область простору, то його завжди можна подати синусоїдами. Тільки однієї синусоїди для цього недостатньо. Необхідний хвильовий пакет – суперпозиція великої кількості синусоїд різних частот, які підсилювалися б у певному інтервалі простору й взаємно гасили б один одного поза цим інтервалом. Якщо довжина хвильового пакета дорівнює Δx (заради простоти ми обмежуємося одним виміром), то хвильові числа k , які необхідні для його утворення, не можуть займати який завгодно вузький інтервал Δk . Мінімальна ширина інтервалу хвильових чисел хвильового пакета Δk , як доводять математики, повинна приблизно задовольняти співвідношення

$$\Delta x \cdot \Delta k \geq 2\pi. \quad (83.1)$$

Це – чисто хвильове співвідношення.

Розглянемо тепер хвильовий пакет із хвиль де Бройля, розміри якого й відповідні межі хвильових чисел задовольняють умову (83.1). Відповідно до статистичної інтерпретації ймовірність виявлення частинки буде відмінна від нуля тільки в межах пакета. А чому буде дорівнювати імпульс частинки? Кожній хвилі де Бройля із хвильовим числом k відповідає значення імпульсу $p_x = \hbar k$ (заради простоти ми розглядаємо випадок руху вздовж осі X). Певного імпульсу для всього пакета не існує. Існує набір імпульсів, що заповнюють інтервал $p_x = \hbar k$ до $p_x + \Delta p_x = \hbar(k + \Delta k)$. Невідомо, який імпульс буде виявлений у хвильовому пакеті при вимірі. У найкращому разі можна з'ясувати тільки його ймовірність. При вимірі імпульс буде виявлений з тією або іншою ймовірністю між $p_x = \hbar k$ і $p_x + \Delta p_x = \hbar(k + \Delta k)$. Тому, виражаючи k через p_x , співвідношення (83.1) можна переписати у вигляді

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p_x \geq 2\pi\hbar = h}. \quad (83.2)$$

Це співвідношення називається **співвідношенням або принципом невизначеностей Гейзенберга для координати й імпульсу частинки**.

Співвідношення Гейзенберга визначає допустиму *принципову межу неточностей* Δx і Δp_x , з якими стан частинки можна характеризувати класично, тобто координатою x й імпульсом p_x . Чим точніше x , тим з меншою точністю можливо характеризувати p_x , і навпаки. Але співвідношення Гейзенберга жодним чином не можна тлумачити у тому розумінні, що частинка в кожному момент часу має певні значення x й p_x , але ми їх принципово не можемо визначити з більшою точністю, чим це дозволяє співвідношення невизначеностей (83.2). Така точка зору зовсім не відповідає природі досліджуваних мікрооб'єктів. *Справжній зміст співвідношення (83.2) відображає той факт, що в природі об'єктивно не існує станів частинок з точно визначеними значеннями обох змінних x і p_x .*

Принцип невизначеностей був сформульований Гейзенбергом у 1927 р. і став важливим кроком в інтерпретації закономірностей мікросвіту й побудові квантової механіки.

2 У тривимірному випадку класична частинка характеризується трьома прямокутними координатами x, y, z й пов'язаними з ними імпульсами p_x, p_y, p_z . У цьому випадку **співвідношення невизначеностей Гейзенберга** виражаються трьома нерівностями

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h}, \quad \boxed{\Delta y \cdot \Delta p_y \geq h}, \quad \boxed{\Delta z \cdot \Delta p_z \geq h}. \quad (83.3)$$

Ніяких обмежень на добутки типу $\Delta x \cdot \Delta p_y$, $\Delta y \cdot \Delta p_z$ співвідношення невизначеностей не накладають. Величини x й p_y , x і p_z одночасно можуть мати й зовсім точні значення.

3 Разом зі співвідношенням (83.1) у хвильовій теорії виводиться також формула

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \geq 2\pi. \quad (83.4)$$

Зміст цього співвідношення полягає в тому, що обмежений у часі хвильовий процес не може бути монохроматичним. Якщо процес триває протягом часу Δt , то розкид частот $\Delta \omega$ хвиль, якими цей процес характеризується, у найкращому разі задовольняє співвідношенню (83.4). Тому якщо для спостереження навіть монохроматичного процесу надано малий час Δt , то частота процесу принципово буде знайдена в найкращому разі з помилкою, що підпорядковується співвідношенню (83.4).

Якщо частоті зіставити енергію за формулою $E = \hbar\omega$, то вираз (83.4) перейде в

$$\boxed{\Delta t \cdot \Delta E \geq 2\pi\hbar = h}. \quad (83.5)$$

Формула (83.5) називається *співвідношенням невизначеностей Гейзенберга для часу й енергії*.

4 Вимірювання у квантовій області принципово відрізняються від класичних вимірів. Звичайно, і ті й інші вимірювання супроводжуються помилками. Однак класична фізика вважала, що шляхом поліпшення методики й техніки вимірів помилки в принципі можуть бути зроблені як завгодно малими. Навпроти, *відповідно до квантової фізики існує принципова межа точності вимірювань. Вона лежить у природі речей і не може бути зменшена ніяким удосконалюванням приладів і методів вимірювань*. Співвідношення невизначеностей Гейзенберга й встановлюють одну з таких меж. Взаємодію між макроскопічним вимірювальним приладом і мікрочастинкою під час вимірювання принципово не можна зробити як завгодно малою. Якщо вимірюється, наприклад, координата частинки, то вимірювання неминуче приводить до принципово непереборної неконтрольованої зміни початкового стану частинки, а отже, і до невизначеності в значенні імпульсу при подальшому вимірюванні. Те саме відбувається, якщо порядок вимірювання координати й імпульсу частинки поміняти місцями.

ТЕМА 15 КВАНТУВАННЯ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН

§ 84 Хвильова функція. Фізична сутність у-функції. Стандартні умови для хвильової функції [6]

1 Розглянемо частинку, яка рухається вільно у просторі з сталим імпульсом p уздовж осі X . Де Бройль припустив, що з такою частинкою пов'язана деяка плоска монохроматична хвиля

$$\xi = A \cos(\omega t - kx),$$

яка поширюється в напрямку тієї самої осі X . Сутність цієї хвилі спочатку залишалась незрозумілою. Замінивши відповідно до гіпотези де Бройля ω й λ через E і p , рівняння хвилі де Бройля для вільної частинки запишемо у вигляді

$$\Psi = A \exp\left[\frac{i}{\hbar}(px - Et)\right]. \quad (84.1)$$

Функцію Ψ називають *хвильовою функцією (або псі-функцією)*. Вона описує стан частинки. Функція Ψ , як правило, буває комплексною й у ряді випадків (коли частинка рухається в силовому полі) має не властивий для хвилі неперіодичний характер. Незважаючи на це, її й у цих випадках називають хвильовою.

2 Правильну інтерпретацію хвильової функції дав у 1926 р. Борн. Згідно з Борном *квадрат модуля хвильової функції визначає ймовірність dP того, що частинка буде виявлена в межах об'єму dV* :

$$dP = |\Psi|^2 dV = \Psi^* \Psi dV. \quad (84.2)$$

Співвідношення визначає фізичну сутність хвильової функції: квадрат модуля хвильової функції в деякій точці простору є густиною ймовірності знаходження частинки в цій точці простору ($dP/dV = |\Psi|^2$).

Виходячи з фізичного змісту квадрата модуля хвильової функції можемо знайти, що інтеграл від виразу (84.2), узятий в усьому просторі, повинен дорівнювати одиниці:

$$\int \Psi^* \Psi dV = 1. \quad (84.3)$$

Дійсно, цей інтеграл дає ймовірність того, що частинка знаходиться в одній із точок простору, що є подією достовірною. Відомо, що ймовірність достовірної події дорівнює одиниці. Співвідношення (84.3) називають умовою нормування.

З інтерпретації Борна (84.2) випливає, що квадрат модуля хвильової функції є густиною імовірності (імовірністю, віднесеною до одиниці об'єму) знаходження частинки у відповідному місці простору. З цього випливають такі властивості хвильової функції. Псі-функція повинна:

- 1) бути однозначною, неперервною й скінченною (за винятком, може бути, особливих точок);
- 2) мати однозначну, неперервну та скінченну похідну;
- 3) інтеграл $\int \Psi^* \Psi dV$, узятий по всьому простору, повинен бути скінченним.

Сукупність перелічених вище вимог називають **стандартними умовами для хвильової функції**.

§ 85 Загальне й стаціонарне рівняння Шредінгера [6]

1 Розвиваючи ідеї де Бройля про хвильові властивості речовини, Шредінгер отримав у 1926 р. рівняння для визначення хвильової функції. Воно дозволяє знайти хвильові функції частинок, які рухаються в різних силових полях. Рівняння виглядає так:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \Psi = i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (85.1)$$

Тут m – маса частинки; i – уявна одиниця; U – потенціальна енергія частинки; Δ – оператор Лапласа, результат дії якого на деяку функцію є сумою других частинних похідних за координатами:

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}. \quad (85.2)$$

Рівняння (85.1) називають **загальним рівнянням Шредінгера**. З рівняння (85.1) випливає, що вигляд хвильової функції визначається потенціальною енергією U , тобто в остаточному підсумку характером сил, що діють на частинку.

Рівняння Шредінгера є основним рівнянням нерелятивістської квантової механіки. Воно не може бути доведене з інших співвідношень. Його варто розглядати як вихідне основне припущення, справедливості якого доводиться тим, що всі наслідки, які випливають із нього, точно узгоджуються з дослідними фактами.

Шредінгер установив своє рівняння, виходячи з оптико-механічної аналогії. Ця аналогія полягає в подібності рівнянь, які описують хід світлових променів, з рівняннями, що визначають траєкторії частинок у класичній механіці.

Пояснимо, як можна прийти до загального рівняння Шредінгера. Для простоти обмежимося одновимірним випадком. Розглянемо частинку, яка вільно рухається.

Відповідно до ідеї де Бройля такій частинці потрібно поставити у відповідність плоску хвилю

$$\Psi = A \exp\left[\frac{i}{\hbar}(px - Et)\right].$$

Продиференціюємо цю функцію один раз за t , а інший раз – двічі за x й отримаємо

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E \Psi, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 p^2 \Psi.$$

Звідси

$$E = \frac{1}{\Psi} i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad p^2 = -\frac{1}{\Psi} \hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}. \quad (85.3)$$

У нерелятивістській класичній механіці енергія E й імпульс p вільної частинки пов'язані співвідношенням

$$E = \frac{p^2}{2m}.$$

Підставивши в це співвідношення вираз (85.3) для E й p^2 і скоротивши потім на Ψ , отримаємо рівняння

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

яке збігається з рівнянням (85.1), якщо в останньому покласти $U = 0$.

У випадку частинки, що рухається в силовому полі, яке характеризується потенціальною енергією U , енергія E й імпульс p пов'язані співвідношенням

$$\frac{p^2}{2m} = E - U.$$

Поширивши й на цей випадок вираз (85.3) для E й p^2 , отримаємо

$$-\frac{1}{\Psi} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\Psi} i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} - U.$$

Помножимо це співвідношення на Ψ й перенесемо доданок $U\Psi$ ліворуч і прийдемо до рівняння

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U\Psi = i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

яке збігається з рівнянням (85.1).

Викладені міркування не мають доказової сили й не можуть розглядатися як доведення загального рівняння Шредінгера. Їх мета – пояснити, яким чином можна було прийти до встановлення цього рівняння.

2 Якщо силове поле, у якому рухається частинка, є стаціонарним (тобто сталим в часі), то функція U не залежить явно від t . У цьому випадку розв'язок рівняння Шредінгера розпадається на два множники, один із яких залежить тільки від координат, інший – тільки від часу:

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \exp[-i(E/\hbar)t]. \quad (85.4)$$

Тут E – повна енергія частинки, яка у випадку стаціонарного поля залишається сталою. Щоб переконатися у справедливості виразу (85.4), підставимо його в рівняння (85.1). У результаті цього отримаємо співвідношення

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \exp[-i(E/\hbar)t] \Delta\psi + U\psi \exp[-i(E/\hbar)t] = i\hbar[-i(E/\hbar)]\psi \exp[-i(E/\hbar)t] .$$

Скоротивши на загальний множник $\exp[-i(E/\hbar)t]$, прийдемо до диференціального рівняння, що визначає функцію ψ :

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi + U\psi = E\psi} . \quad (85.5)$$

Рівняння (85.5) називається **рівнянням Шредінгера для стаціонарних станів (стаціонарне рівняння Шредінгера)**. Надалі ми будемо мати справу тільки із цим рівнянням і для стислості будемо називати його просто рівнянням Шредінгера. Рівняння (85.5) часто пишуть у вигляді

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U)\psi = 0 . \quad (85.6)$$

У випадку стаціонарного силового поля хвильова функція має вигляд (85.4). Тоді

$$\Psi^* \Psi = \exp[i(E/\hbar)t]\psi^* \cdot \exp[-i(E/\hbar)t]\psi = \psi^* \psi .$$

Таким чином, густина імовірності дорівнює $\psi^* \psi$ й, отже, від часу не залежить. Саме тому стани, які описуються хвильовими функціями вигляду (85.4), називають стаціонарними.

3 У класичній механіці стан частинки (матеріальної точки) визначається завданням положення і швидкості (або імпульсу) частинки. Якщо є відомим стан у початковий момент часу й силове поле, у якому знаходиться частинка, то, розв'язавши рівняння Ньютона, можна знайти положення й швидкість частинки у будь-який наступний момент часу. У цьому полягає сутність причинності в класичній механіці.

У квантовій механіці класичне поняття стану позбавлене змісту, тому що координата й швидкість частинки принципово не можуть мати одночасно певних значень. Тому класичне поняття причинності також не можна застосовувати у квантовій теорії. Стан частинки задається у квантовій механіці хвильовою функцією. Якщо відомі хвильова функція в початковий момент часу й силове поле, у якому рухається частинка, то, розв'язавши рівняння Шредінгера, можна знайти хвильову функцію в наступні моменти часу. У цьому полягає сутність причинності у квантовій механіці. Таким чином, квантова механіка не скасувала принцип причинності. Вона лише надала йому форму, яка відповідає дійсній природі речей.

§ 86 Рівняння Шредінгера та квантування енергії [6]

1 Квантування енергії виникає тому, що на хвильові функції ψ , які є розв'язками рівняння Шредінгера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi + U\psi = E\psi , \quad (86.1)$$

накладаються певні обмеження – стандартні умови для хвильової функції. При цих обмеженнях рівняння (86.1) має розв'язки, у загальному випадку, не при всіх, а тільки при вибраних значеннях параметра E (E визначає енергію частинки). Тут маємо випадок, аналогічний до того, що має місце в задачі про вільні коливання струни із закріпленими кінцями. Через закріпленість кінців ці коливання є стоячими хвилями з такими вибраними частотами, що на довжині струни вкладається ціле число напівхвиль.

Стандартні умови для хвильової функції, що накладаються на розв'язки рівняння Шредінгера, полягають у тому, що хвильова функція $\psi(x, y, z)$ і її перші просторові похідні повинні бути скінченними, однозначними й неперервними, інтеграл від $\psi(x, y, z)$ по усьому

простору повинен бути скінченним. Вибрані значення параметра E , для яких рівняння Шредінгера має розв'язки, що задовольняють стандартні умови, називаються **власними значеннями** величини E для диференціального рівняння (86.1), а відповідні їм розв'язки – **власними функціями** того самого рівняння. Власні значення E і беруть за можливі значення енергії у стаціонарних станах. Власні значення енергії E можуть бути дискретними, а можуть неперервно заповнювати скінченний або нескінченний інтервал. У першому випадку говорять, що енергетичний спектр *дискретний*, а в другому – *неперервний*.

Таким чином, квантування енергії впливає з основних положень квантової механіки без будь-яких додаткових припущень.

§ 87 Частинка в одновимірній потенціальній ямі. Енергія і хвильова функція частинки в потенціальній ямі [6]

1 У нерелятивістській квантовій механіці основним принципом є рівняння Шредінгера. Пошук розв'язків цього рівняння, які задовольняють стандартні умови, приводить до дискретності енергетичних рівнів. Продемонструємо це на прикладі задачі про частинку, яка знаходиться в одновимірній нескінченно глибокій потенціальній ямі.

Знайдемо власні значення енергії й відповідні їм власні функції для частинки, що знаходиться в нескінченно глибокій одновимірній потенціальній ямі. Припустимо, що частинка може рухатися тільки уздовж осі X . Нехай рух обмежений непроникними для частинки стінками з такими координатами: $x=0$ і $x=l$. Потенціальна енергія U має в цьому випадку такий вигляд (рис. 87.1а): вона дорівнює нулю при $0 \leq x \leq l$ й перетворюється у нескінченність при $x < 0$ й $x > l$. Для розв'язання задачі використаємо стаціонарне рівняння Шредінгера

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0. \quad (87.1)$$

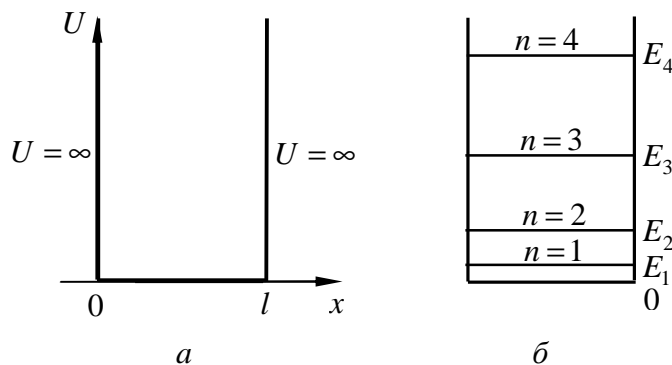


Рисунок 87.1: *a* – нескінченно глибока потенціальна яма; *б* – схема рівнів енергії частинки, що знаходиться в такій ямі

2 Оскільки хвильова функція залежить тільки від координати x , то рівняння (87.1) спрощується:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0. \quad (87.2)$$

За межі потенціальної ями частинка потрапити не може (там потенціальна енергія дорівнює нескінченності $U = \infty$). Тому ймовірність виявлення частинки за межами ями дорівнює нулю. Відповідно й функція ψ за межами ями дорівнює нулю. З умови неперервності випливає, що ψ повинна дорівнювати нулю й на межах ями, тобто

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \quad (87.3)$$

Це і є одна із стандартних умов, яку повинен задовольняти розв'язок рівняння (87.2). В області, де ψ не дорівнює тотожно нулю, рівняння (87.2) має вигляд

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0 \quad (87.4)$$

(у цій області $U = 0$). Увівши позначення

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E, \quad (87.5)$$

прийдемо до рівняння

$$\psi'' + k^2 \psi = 0,$$

яке в теорії коливань називають диференціальним рівнянням гармонічних коливань. Розв'язок такого рівняння має вигляд

$$\psi(x) = A \sin(kx + \alpha) \quad (87.6)$$

(у цьому випадку зручніше взяти синус замість косинуса). Умови (87.3) можна задовольнити відповідним вибором сталих k і α . Насамперед з умови $\psi(0) = 0$ отримуємо

$$\psi(0) = A \sin \alpha = 0,$$

звідки випливає, що α повинна дорівнювати нулю. Також повинна виконуватися умова

$$\psi(l) = A \sin(kl) = 0,$$

що можливо лише у випадку, коли

$$kl = \pm n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (87.7)$$

($n = 0$ не беремо до уваги, оскільки при цьому виходить, що $\psi = 0$ – частинка у потенціальній ямі відсутня).

Виключивши k з рівнянь (87.5) і (87.7), знайдемо **власні значення енергії частинки**:

$$E = E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (87.8)$$

Спектр енергії виявився дискретним. На рис. 87.1б зображена схема енергетичних рівнів.

Відповідно до формули (87.8) мінімальна енергія, яку може мати частинка, що знаходиться в потенціальній ямі, відмінна від нуля. Цей результат обумовлений хвильовими властивостями частинки й може бути отриманий зі співвідношення невизначеностей.

3 Далі знайдемо власну хвильову функцію рівняння Шредінгера. Підставивши в (87.6) значення k , яке отримали з умови (87.7), знайдемо власні хвильові функції:

$$\psi = \psi_n(x) = A \sin \frac{n\pi x}{l}$$

(нагадаємо, що $\alpha = 0$). Для знаходження коефіцієнта A використаємо умову нормування, яку у цьому випадку запишемо так:

$$A^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = 1.$$

Нескладно отримати, що

$$\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \int_0^l \frac{1 - \cos(2n\pi x/l)}{2} dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin(2n\pi x/l)}{2 \cdot (2n\pi/l)} \right) \Big|_0^l = \frac{l}{2}.$$

Звідси $A^2 \cdot l/2 = 1$, або $A = \sqrt{2/l}$. Таким чином, **власні функції частинки в потенціальній ямі** мають вигляд

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (87.9)$$

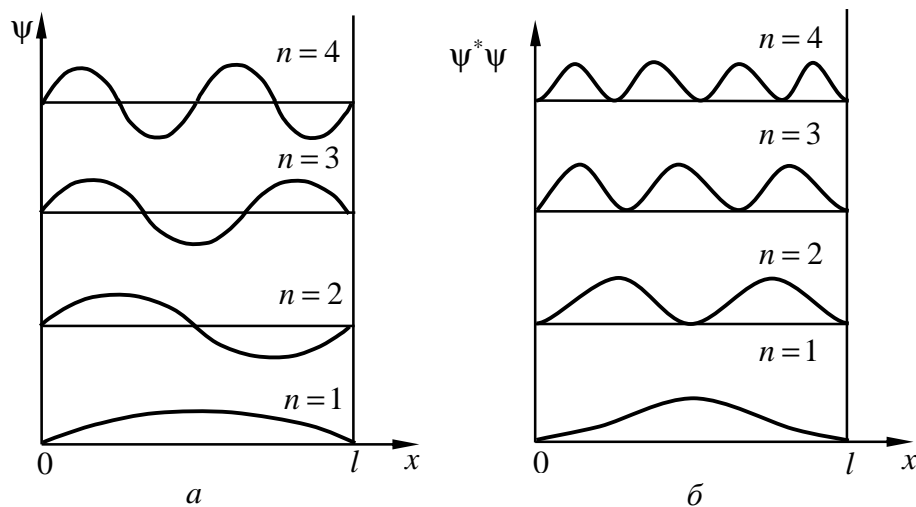


Рисунок 87.2: *а* – графіки власні функції частинки, що знаходиться в потенціальній ямі, яка зображена на рис. 87.1*а*; *б* – густина ймовірності знаходження частинки в точках з різними значеннями координати x

Графіки власних функцій зображені на рис. 87.2*а*. На рис. 87.2*б* подана густина ймовірності виявлення частинки на різних відстанях від стінок ями, що дорівнює $\psi^* \psi$. Із графіків, наприклад, випливає, що в стані із $n = 2$ частинка не може бути виявлена всередині ями й разом з цим однаково часто буває як у лівій, так і в правій половині ями. Така поведінка частинки є несумісною з класичними уявленнями про траєкторії. Відзначимо, що відповідно до класичних уявлень усі положення частинки в ямі мають однакову ймовірність.

§ 88 Тунельний ефект. Коефіцієнт проходження [3]

1 Нехай частинка, яка рухається зліва направо, зустрічає на своєму шляху потенціальний бар'єр висотою U_0 й шириною l (рис. 88.1). За класичними уявленнями частинка повинна вести себе так. Якщо енергія частинки більша за висоту бар'єра ($E > U_0$), частинка безперешкодно проходить над бар'єром (на ділянці $0 \leq x \leq l$ лише зменшується швидкість частинки, але потім при $x > l$ знову набуде початкового значення). Якщо ж E менше U_0 (як зображено на рисунку), то частинка відбивається від бар'єра й летить у зворотній бік; крізь бар'єр частинка проникнути не може.

Зовсім інакше виглядає поведінка частинки з точки зору до квантової механіки. По-перше, навіть при $E > U_0$ є відмінна від нуля ймовірність того, що частинка відіб'ється від бар'єра й полетить у зворотній бік. По-друге, при $E < U_0$ є відмінна від нуля ймовірність того, що частинка проникне «крізь» бар'єр і опиниться в області, де $x > l$. Така поведінка є цілком неможливою з класичної точки зору. Ця поведінка мікрочастинки впливає безпосередньо з рівняння Шредінгера.

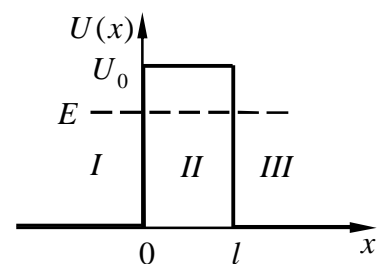


Рисунок 88.1

2 Розглянемо випадок $E < U_0$. Рівняння Шредінгера має вигляд

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0 \quad (88.1)$$

для областей *I* і *III* й

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0)\psi = 0 \quad (88.2)$$

для області *II*, причому $E - U_0 < 0$.

Будемо шукати розв'язок рівняння (88.1) у вигляді $\psi = e^{\lambda x}$. Підстановка цієї функції в (88.1) приводить до характеристичного рівняння

$$\lambda^2 + \frac{2m}{\hbar^2} E = 0.$$

Звідси $\lambda = \pm i\alpha$, де

$$\alpha = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}. \quad (88.3)$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння (88.1) має вигляд

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A_1 e^{i\alpha x} + B_1 e^{-i\alpha x} \text{ для області } I, \\ \psi_3 &= A_3 e^{i\alpha x} + B_3 e^{-i\alpha x} \text{ для області } III. \end{aligned} \quad (88.4)$$

Вирішивши підстановкою $\psi = e^{\beta x}$ рівняння (88.2), отримаємо загальний розв'язок цього рівняння у вигляді

$$\psi_2 = A_2 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x} \text{ для області } II. \quad (88.5)$$

Тут

$$\beta = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}. \quad (88.6)$$

Зазначимо, розв'язок вигляду $e^{i\alpha x}$ відповідає хвилі, яка поширюється в додатному напрямку осі *X*, а розв'язок вигляду $e^{-i\alpha x}$ – хвилі, яка поширюється в протилежному напрямку. Щоб це зрозуміти, згадаємо, що звичайна (звукова, електромагнітна і т.п.) плоска хвиля, яка поширюється в напрямку зростання *x*, описується дійсною частиною виразу $e^{i(\omega t - kx)}$, а хвиля, яка поширюється в напрямку зменшення *x*, – дійсною частиною виразу $e^{i(\omega t + kx)}$. Частиці, яка рухається в додатному напрямку осі *X*, зіставляється функція $\Psi = ae^{(i/\hbar)(px - Et)}$. Якщо відкинути в цій функції часовий множник, то для ψ отримаємо вираз $\psi = ae^{i(p/\hbar)x}$. Для частинки, яка рухається в протилежному напрямку, буде $\psi = ae^{-i(p/\hbar)x}$.

В області *III* є тільки хвиля, яка пройшла через бар'єр і поширюється зліва направо. Тому коефіцієнт B_3 у виразі (88.4) для ψ_3 потрібно покласти таким, що дорівнює нулю. Для знаходження інших коефіцієнтів скористаємося стандартними умовами, які повинна задовольняти хвильова функція ψ . Для того щоб ψ була безперервною у всій області *x* від $-\infty$ до $+\infty$, повинні виконуватися умови $\psi_1(0) = \psi_2(0)$ і $\psi_2(l) = \psi_3(l)$. Для того щоб ψ була гладкою, тобто не мала зломів, повинні виконуватися умови $\psi'_1(0) = \psi'_2(0)$ і $\psi'_2(l) = \psi'_3(l)$. Із цих умов випливають співвідношення:

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 &= A_2 + B_2, \\ A_2 e^{\beta l} + B_2 e^{-\beta l} &= A_3 e^{i\alpha l}, \\ i\alpha A_1 - i\alpha B_1 &= \beta A_2 - \beta B_2, \end{aligned} \quad (88.7)$$

$$\beta A_2 e^{\beta l} - \beta B_2 e^{-\beta l} = i \alpha A_3 e^{i \alpha l}.$$

Розділимо всі рівняння на A_1 й введемо позначення:

$$b_1 = \frac{B_1}{A_1}, \quad a_2 = \frac{A_2}{A_1}, \quad b_2 = \frac{B_2}{A_1}, \quad a_3 = \frac{A_3}{A_1},$$

а також

$$n = \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{U_0 - E}{E}}. \quad (88.8)$$

Тоді рівняння (88.7) наберуть вигляду

$$\begin{aligned} 1 + b_1 &= a_2 + b_2, \\ a_2 e^{\beta l} + b_2 e^{-\beta l} &= a_3 e^{i \alpha l}, \\ i - i b_1 &= n a_2 - n b_2, \\ n a_2 e^{\beta l} - n b_2 e^{-\beta l} &= i a_3 e^{i \alpha l}. \end{aligned} \quad (88.9)$$

Відношення квадратів модулів амплітуд відбитої й падаючої хвилі

$$R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} = |b_1|^2$$

визначає ймовірність відбиття частинки від потенціального бар'єра й називається **коефіцієнтом відбиття**.

Відношення квадратів модулів амплітуд хвилі, що пройшла, й падаючої хвилі

$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = |a_3|^2 \quad (88.10)$$

визначає ймовірність проходження частинки через бар'єр і називається **коефіцієнтом проходження (або коефіцієнтом прозорості)**.

Нас буде цікавити тільки проходження частинок через бар'єр, і ми обмежимося знаходженням величини D . Слід зазначити, знаючи D , легко знайти R , оскільки ці коефіцієнти пов'язані очевидним співвідношенням $R + D = 1$.

Помножимо перше з рівнянь (88.9) на i й складемо з третім. У результаті отримаємо

$$2i = (n+i)a_2 - (n-i)b_2. \quad (88.11)$$

Тепер помножимо друге з рівнянь (88.9) на i й віднімемо його від четвертого. Отримаємо:

$$(n-i)e^{\beta l} a_2 - (n+i)e^{-\beta l} b_2 = 0. \quad (88.12)$$

Вирішивши спільно рівняння (88.11) і (88.12), знайдемо, що

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{2i(n+i)e^{-\beta l}}{(n+i)^2 e^{-\beta l} - (n-i)^2 e^{\beta l}}, \\ b_2 &= \frac{2i(n-i)e^{\beta l}}{(n+i)^2 e^{-\beta l} - (n-i)^2 e^{\beta l}}. \end{aligned}$$

Нарешті, підставивши знайдені нами значення a_2 й b_2 у друге з рівнянь (88.9), отримаємо вираз для a_3 :

$$a_3 = \frac{4ni}{(n+i)^2 e^{-\beta l} - (n-i)^2 e^{\beta l}} e^{-i \alpha l}.$$

Величина

$$\beta l = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar} l,$$

як правило, є набагато більшою за одиницю. Тому в знаменнику виразу для a_3 доданком, який містить множник $e^{-\beta l}$, можна знехтувати у порівнянні з доданком, який містить множник $e^{\beta l}$ (комплексні числа $n+i$ й $n-i$ мають однаковий модуль). Отже, можна припустити

$$a_3 \approx -\frac{4nie^{-i\alpha l}}{(n-i)^2} e^{-\beta l}.$$

Згідно з (88.10) квадрат модуля цієї величини дає ймовірність проходження частинки через потенціальний бар'єр. Урахувавши, що $|n-i| = \sqrt{n^2+1}$, отримаємо

$$D = |a_3|^2 \approx \frac{16n^2}{(n^2+1)^2} e^{-2\beta l},$$

де

$$n^2 = \frac{U_0 - E}{E} = \frac{U_0}{E} - 1$$

(див. формулу (88.8)).

Вираз $16n^2/(n^2+1)^2$ має величину порядку одиниці. Тому можна вважати, що

$$D \approx e^{-2\beta l} = \exp\left[-\frac{2 \cdot l}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}\right]. \quad (88.13)$$

З отриманого нами виразу випливає, що ймовірність проходження частинки через потенціальний бар'єр істотно залежить від ширини бар'єра l й від величини $U_0 - E$. Якщо при якійсь ширині бар'єра коефіцієнт проходження D дорівнює, припустимо, 0,01, то при збільшенні ширини у два рази D буде дорівнювати $0,01^2 = 0,0001$, тобто зменшується в 100 разів. Той самий ефект у цьому випадку викликало б зростання в чотири рази величини $U_0 - E$. Коефіцієнт проходження різко зменшується при збільшенні маси частинки m .

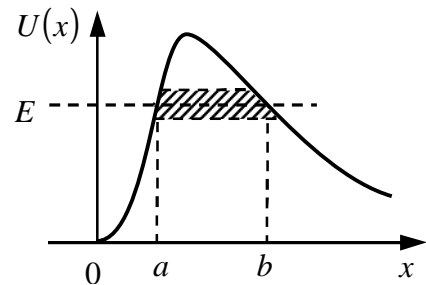


Рисунок 88.2

3 Подібний розрахунок можна виконати у випадку потенціального бар'єра довільної форми (рис. 88.2). У цьому разі формула (88.13) повинна бути замінена більше загальною:

$$D \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(U - E)} dx\right], \quad (88.14)$$

де $U = U(x)$.

При подоланні потенціального бар'єра частинка ніби проходить через «тунель» у цьому бар'єрі (див. заштриховану область на рис. 88.2). У зв'язку з цим розглянуте нами явище називають *тунельним ефектом*.

§ 89 Оператори фізичних величин. Власні функції та власні значення. Принцип суперпозиції [6]

Операторний метод широко використовується у більшості досліджень з квантової механіки. Розглянемо сутність цього методу.

1 Оператори. У квантовій механіці кожній фізичній величині ставиться у відповідність оператор. Під **оператором** мається на увазі правило, за допомогою якого одній функції (позначимо її через ϕ) зіставляється інша функція (позначимо її через f). Символічно це записується так:

$$f = \hat{Q}\phi. \quad (89.1)$$

Тут \hat{Q} – позначення оператора. Для того щоб відрізнити оператори від чисел, їх позначають через \hat{Q} , тобто ставлять кришечку над Q або використовують інше позначення.

Таким чином, під символом оператора розуміють сукупність дій, за допомогою яких вихідна функція (ϕ) перетворюється в іншу функцію (f).

Наприклад, символ **оператора Лапласа** $\Delta = \hat{Q}_1$ позначає дворазове частинне диференціювання за усіма трьома координатами x , y і z з подальшим підсумовуванням отриманих виразів. Тобто оператор Лапласа можна подати у вигляді

$$\Delta = \hat{Q}_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

За допомогою оператора можемо подати множення вихідної функції ϕ на деяку функцію U . Тоді наступне перетворення $f = U \cdot \phi$ можна записати у вигляді $f = \hat{Q}_2\phi$, де $\hat{Q}_2 = U$.

Використовуючи операторний підхід, рівняння Шредінгера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi = E\psi \quad (89.2)$$

можна записати в операторному вигляді

$$\boxed{\hat{H}\psi = E\psi}. \quad (89.3)$$

У цьому рівнянні символом \hat{H} позначений оператор, який дорівнює

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U. \quad (89.4)$$

Цей оператор називають **гамільтоніаном, або оператором Гамільтона**. Гамільтоніан є оператором енергії E .

2 Сутність операторного методу. У квантовій механіці кожній фізичній величині ставиться у відповідність оператор. Розглядаються оператори координат, імпульсу, моменту імпульсу і т.д. Для кожної фізичної величини q складається рівняння, аналогічне до рівняння Шредінгера в операторному вигляді (89.3). Воно має вигляд

$$\boxed{\hat{Q}\psi = q\psi}, \quad (89.5)$$

де \hat{Q} – оператор, який ставиться у відповідність фізичній величині q .

Значення q , при яких розв'язок рівняння (89.4) задовольняє стандартні умови для хвильової функції, називаються **власними значеннями величини q** , а самі розв'язки – **її власними функціями**. Власні значення величини q і беруться за можливі значення цієї величини, які спостерігаються в експерименті.

Розглядаючи з цих позицій рівняння Шредінгера (89.3), можемо стверджувати, що воно є рівнянням для власних значень енергії ($q = E$). Оператор енергії визначається співвідношенням (89.4) ($\hat{Q} = \hat{H}$).

3 Принцип суперпозиції. Спектр власних значень може бути як дискретним, так і суцільним. У випадку дискретного спектра власні значення й власні функції можна пронумерувати:

$$\begin{aligned} q_1, q_2, \dots, q_n, \dots, \\ \Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n, \dots \end{aligned} \quad (89.6)$$

За умови дискретного спектра власних значень фізичної величини спостерігаємо дві ситуації. Можливі стани, для яких при вимірюванні деякої величини q завжди отримуємо однакові значення q_n . Про такі стани говорять як про стани, у яких *величина q має певне значення*. Цей стан описується функцією Ψ_n . Однак можливі також стани, для яких при вимірюваннях отримуємо з різною ймовірністю різні власні значення оператора \hat{Q} . Про такі стани говорять як про стани, у яких *величина q не має певного значення*.

Хвильова функція стану, у якому q не має певного значення, є суперпозицією (накладенням) власних функцій величини q :

$$\boxed{\Psi = \sum_n c_n \Psi_n}, \quad (89.7)$$

де c_n , у загальному випадку, є комплексними числами, які не залежать від координат. Кількість доданків у сумі дорівнює числу різних власних функцій величини q .

Формула (89.7) виражає **принцип суперпозиції хвильових функцій**: коли хвильові функції $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n, \dots$ описують деякі стани, то і функція $\Psi = c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2 + \dots + c_n\Psi_n + \dots$ подає деяку хвильову функцію, що описує деякий стан системи. Обґрунтуванням принципу суперпозиції є узгодженість з дослідом наслідків, які впливають з нього. Так, за допомогою принципу суперпозиції квантова механіка пояснює дифракцію та інтерференцію частинок.

Квадрати модулів коефіцієнтів c_n дорівнюють імовірності того, що при вимірах, які виконуються над системою, що перебуває у стані Ψ , будуть отримані відповідні значення величини q . Оскільки сума всіх таких ймовірностей повинна дорівнювати одиниці, коефіцієнти c_n задовольняють умову

$$\sum_n |c_n|^2 = 1.$$

§ 90 Середні значення фізичних величин з точки зору операторного підходу. Оператори радіуса-вектора, імпульсу, енергії. Зв'язок між власними й середніми значеннями [11]

1 Як визначають середнє значення фізичної величини в квантовій механіці, використовуючи операторний підхід? Для відповіді на це питання розглянемо приклад. Припустимо, що багаторазово проводиться вимір координати x частинки, причому частинка кожного разу перебуває в однакових макроскопічних умовах. Тоді стан частинки в цих дослідах можна характеризувати хвильовою функцією $\Psi(x)$, яку для спрощення будемо вважати функцією тільки однієї просторової координати x . Середнє значення координати, яке буде знайдено в результаті вимірів, можна записати у вигляді

$$\langle x \rangle = \int x dP = \int x \Psi^* \Psi dx = \int \Psi^* x \Psi dx. \quad (90.1)$$

Тут використано, що $dP = |\Psi|^2 dV = \Psi^* \Psi dx$ є, виходячи з фізичного змісту квадрата модуля хвильової функції, ймовірністю того, що частинка буде знайдена в інтервалі $x, x + dx$.

Використовуючи операторний підхід, вираз для середнього значення $\langle x \rangle$ записують інакше:

$$\langle x \rangle = \int \psi^* \hat{x} \psi dx, \quad (90.2)$$

де \hat{x} оператор величини x . Порівнюючи вирази (90.1) і (90.2), бачимо, що **оператор x -ї координати** має вигляд

$$\boxed{\hat{x} = x}. \quad (90.3)$$

Аналогічно можна показати, що **оператори y й z -координат** виражаються формулами

$$\boxed{\hat{y} = y}, \quad \boxed{\hat{z} = z}. \quad (90.4)$$

Таким чином, **оператор радіуса-вектора** можна записати в так:

$$\boxed{\hat{r} = \vec{e}_x \hat{x} + \vec{e}_y \hat{y} + \vec{e}_z \hat{z} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z = \vec{r}}. \quad (90.5)$$

Абсолютно так само обчислюється середнє значення довільної функції від координат $f(x, y, z)$:

$$\langle f(x, y, z) \rangle = \int \psi^* \hat{f} \psi dx dy dz, \quad (90.6)$$

де оператор функції $f(x, y, z)$ знаходять так, як і оператор радіуса-вектора (див. (90.5)):

$$\hat{f} = f(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = f(x, y, z). \quad (90.7)$$

Вищевикладений метод знаходження середніх значень поширюють у квантовій механіці на будь-яку фізичну величину (яка залежить не тільки від координат, а й від імпульсів). Для будь-якої фізичної величини $F(\vec{r}, \vec{p})$ **середнє значення** визначається як

$$\boxed{\langle F \rangle = \int \psi^* \hat{F} \psi dV}, \quad (90.9)$$

де \hat{F} – оператор величини $F(\vec{r}, \vec{p})$, який має вигляд

$$\boxed{\hat{F} = F(\hat{r}, \hat{p})}. \quad (90.10)$$

2 Знайдемо в явному вигляді оператор імпульсу.

Як відомо, енергія частинки дорівнює сумі кінетичної та потенціальної енергії і визначається функцією

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{p^2}{2m} + U(x, y, z). \quad (90.11)$$

Використовуючи правило (90.10), енергії (90.11) можна поставити у відповідність оператор

$$\hat{H} = H(\hat{p}, \hat{r}) = \frac{(\hat{p})^2}{2m} + U(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \frac{(\hat{p})^2}{2m} + U(x, y, z). \quad (90.12)$$

Порівняємо оператор (90.12) з **оператором Гамільтона (оператор енергії, який визначили з рівняння Шредінгера)**

$$\boxed{\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x, y, z)}. \quad (90.13)$$

З порівняння (90.12) та (90.13) випливає

$$\frac{(\hat{p})^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla})^2 \equiv \frac{(-i\hbar \vec{\nabla})^2}{2m}.$$

Тут використали зв'язок між оператором Лапласа Δ та оператором набла $\vec{\nabla}$: $\Delta = (\vec{\nabla})^2$. З порівняння знаходимо, що **оператор імпульсу має вигляд**

$$\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla} \equiv -i\hbar\left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right). \quad (90.14)$$

Зрозуміло, що оператор енергії визначається співвідношенням (90.13).

З'ясуємо, як пов'язані між собою середні значення, що визначаються способом (90.9) та власні значення фізичних величин.

Для спрощення математичних перетворень розглянемо випадок стану системи, у яких величина q має певне значення. Це означає, що цей стан описується хвильовою функцією $\psi = \psi_n$, яка відповідає власному значенню q_n . Хвильова функція ψ_n і власне значення q_n задовольняють рівнянню

$$\hat{Q}\psi_n = q_n\psi_n, \quad (90.15)$$

де \hat{Q} – оператор величини q . Середнє значення величини q в цьому випадку відповідає власному значенню, тобто $\langle q \rangle = q_n$.

З іншого боку, середнє значення можемо також визначити у спосіб (90.9). Тому

$$\langle q \rangle = \int \psi_n^* \hat{Q} \psi_n dV.$$

Використаємо в цьому співвідношенні рівняння (90.15) і отримаємо

$$\langle q \rangle = \int \psi_n^* q_n \psi_n dV = q_n \int \psi_n^* \psi_n dV = q_n. \quad (90.16)$$

Тут використали, що власне значення q_n не залежить від координат, а також умову нормування для хвильової функції $\int \psi_n^* \psi_n dV = 1$.

Таким чином, **середні значення, що визначаються способом (90.9) та за допомогою власних значень, мають одне і те саме значення.**

§ 91 Комутативність операторів. Умови, за яких дві фізичні величини можуть бути виміряні одночасно [11]

1 Розглянемо дві фізичні величини a та b , яким відповідають оператори \hat{A} та \hat{B} . Чи завжди існує стан ψ , у якому обидва оператори мають визначені власні значення a та b ? Тобто, чи завжди хвильова функція ψ є власною функцією одночасно як для оператора \hat{A} , так і для оператора \hat{B} ? Іншими словами, чи можливо обидві фізичні величини a та b точно виміряти одночасно?

Для відповіді на це питання припустимо, що ψ є власною функцією як оператора \hat{A} , так і оператора \hat{B} . Тобто

$$\hat{A}\psi = a\psi, \quad \hat{B}\psi = b\psi,$$

де a й b – власні значення операторів \hat{A} і \hat{B} в стані, якому відповідає одна і та сама хвильова функція ψ . Помножимо першу рівність на оператор \hat{B} . Отримаємо

$$\hat{B}\hat{A}\psi = \hat{B}a\psi = a\hat{B}\psi = a \cdot b \cdot \psi.$$

Аналогічно

$$\hat{A}\hat{B}\psi = \hat{A}b\psi = b\hat{A}\psi = b \cdot a \cdot \psi.$$

Звідси випливає, що

$$(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\psi = 0,$$

або

$$\boxed{\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}} \quad (91.1)$$

Оператори, які мають властивість (91.1), називають **комутативними**.

Отже, якщо всі власні функції операторів \hat{A} і \hat{B} збігаються, то ці оператори комутують між собою. Справедлива й зворотна теорема: якщо оператори \hat{A} й \hat{B} комутують між собою, то збігаються і їх власні функції.

Наведеній теоремі можна надати й інше формулювання. Дві величини a й b можна виміряти одночасно, тоді й тільки тоді, коли відповідні їм оператори \hat{A} й \hat{B} комутують між собою.

2 Розглянемо приклади. Так координату x й відповідний їй імпульс p_x одночасно виміряти неможливо, оскільки оператори \hat{x} й \hat{p}_x не є комутативними між собою. Переконаємося у цьому. Як відомо,

$$\hat{x} = x, \quad \hat{p}_x = -i\hbar\partial/\partial x.$$

Тоді

$$\begin{aligned} (\hat{p}_x\hat{x} - \hat{x}\hat{p}_x)\psi &= -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot x - x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x}(x \cdot \psi) - x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\psi\right) = \\ &= -i\hbar\left(\psi + x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\psi - x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\psi\right) = -i\hbar\psi \neq 0. \end{aligned}$$

Тобто $\hat{p}_x\hat{x} \neq \hat{x}\hat{p}_x$, оператори \hat{x} й \hat{p}_x не комутують між собою. Звідси випливає, що одночасно точно визначити координату x та її проекцію імпульсу p_x неможливо. Це твердження узгоджується з принципом невизначеностей Гейзенберга.

Аналогічно можна впевнитись в тому, що координати x й y можна виміряти одночасно, тому що оператори \hat{x} й \hat{y} комутують.

§ 92 Квантування моменту імпульсу. Модуль і одна з проекцій моменту імпульсу. Азимутальне і магнітне квантові числа [6]

1 Момент імпульсу частинки \vec{L} відносно початку координат O у класичній механіці визначається векторним добутком

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}. \quad (92.1)$$

У квантовій механіці моменту імпульсу частинки \vec{L} відповідає оператор

$$\hat{L} = [\hat{r} \times \hat{p}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \hat{p}_x & \hat{p}_y & \hat{p}_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} & -i\hbar\frac{\partial}{\partial y} & -i\hbar\frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}. \quad (92.2)$$

Тут використали, що оператор радіуса-вектора дорівнює самому радіусу-вектору, а оператор імпульсу визначається виразом $\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ ($\vec{\nabla}$ – оператор набла).

Можна виділити чотири величини, які пов'язані з моментом імпульсу частинки. Це три проекції і квадрат моменту імпульсу: L_x , L_y , L_z і $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$. Виникає питання: чи можна одночасно виміряти усі вищеперелічені чотири величини? Щоб відповісти на це питання, потрібно перевірити: чи комутують один з одним оператори цих фізичних величин? А саме, чи комутують оператори проекцій

$$\hat{L}_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \hat{L}_y = i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad \hat{L}_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (92.3)$$

і оператор квадрата моменту імпульсу

$$\hat{L}^2 = (\hat{L}_x)^2 + (\hat{L}_y)^2 + (\hat{L}_z)^2 \quad (92.4)$$

між собою? Нескладно провести розрахунки й переконатися, що комутують між собою тільки дві величини: оператор z -компоненти моменту імпульсу частинки й оператор квадрата моменту імпульсу. Це означає, що **одночасно можливо визначити лише z -компоненту моменту імпульсу частинки й оператор квадрата моменту імпульсу**. Дві інші проекції виявляються при цьому абсолютно невизначеними. Це означає, що «вектор» моменту не має певного напрямку й, отже, не може бути зображений, як у класичній механіці, за допомогою спрямованого відрізка прямої.

2 Знайдемо квадрат модуля моменту імпульсу. Для цього потрібно розв'язати рівняння на визначення власних значень квадрата моменту імпульсу

$$\hat{L}^2 \psi = L^2 \psi,$$

де \hat{L}^2 – оператор квадрата моменту імпульсу частинки (див. вираз (92.4)); L^2 – власне значення квадрата моменту імпульсу частинки. Розв'язання цього рівняння є досить складним. Тому ми обмежимося наведенням лише кінцевих результатів: власні значення оператора квадрата моменту імпульсу дорівнюють

$$L^2 = \hbar^2 l(l+1) \quad (l = 0, 1, 2, \dots). \quad (92.5)$$

Тут l – **квантове число, яке отримало назву азимутального**. Отже, модуль моменту імпульсу може мати лише дискретні значення, які описуються формулою

$$\boxed{|L| = \hbar \sqrt{l(l+1)} \quad (l = 0, 1, 2, \dots)}. \quad (92.6)$$

3 Знайдемо z -компоненту моменту імпульсу. Для цього потрібно розв'язати рівняння на визначення власних значень z -компоненти моменту імпульсу

$$\hat{L}_z \psi = L_z \psi, \quad (92.7)$$

де \hat{L}_z – оператор z -компоненти моменту імпульсу частинки; L_z – власне значення цієї величини. У сферичних координатах (r, θ, ϕ) оператор проекції моменту імпульсу на полярну вісь Z (від якої відлічується полярний кут θ) має достатньо простий вигляд

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

Отже, рівняння (92.7) набуває вигляду:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = L_z \psi. \quad (92.8)$$

Підстановка $\psi = \exp(i\alpha\phi)$ у рівняння (92.8) приводить після скорочення на загальний множник $\exp(i\alpha\phi)$ до алгебраїчного рівняння

$$-i\hbar\alpha = L_z,$$

з якого для α отримуємо значення iL_z / \hbar . Таким чином, розв'язок рівняння (92.8) має вигляд

$$\psi = C \exp[i(L_z / \hbar)\varphi] .$$

Для того щоб ця функція була однозначною (одна з стандартних умов для хвильової функції), необхідно виконати умову $\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$, або

$$\exp[i(L_z / \hbar)(\varphi + 2\pi)] = \exp[i(L_z / \hbar)(\varphi)] .$$

Ця умова буде виконаною, коли буде виконуватись співвідношення $\exp[i(L_z / \hbar) \cdot 2\pi] = 1$, або $L_z = m\hbar$, де m – ціле додатне або від'ємне число або нуль. Отже, власні значення z -компоненти моменту імпульсу мають дискретний спектр:

$$\boxed{L_z = m\hbar \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)} . \quad (92.9)$$

Із причин, які з'ясуються далі, число m називається **магнітним квантовим числом**.

Оскільки проекція вектора не може перевищувати модуль цього вектора, то повинна виконуватись умова

$$|m\hbar| \leq \hbar\sqrt{l(l+1)} .$$

Звідси випливає, що максимальне можливе значення $|m|$ дорівнює l . Таким чином, можемо записати

$$\boxed{|L| = \hbar\sqrt{l(l+1)} \quad (l = 0, 1, 2, \dots)} ,$$

$$\boxed{L_z = m\hbar \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l)} . \quad (92.10)$$

Із цих формул випливає, що $|L_z|$ завжди менше $|L|$. Отже, напрям моменту імпульсу не може збігатися з виділеним у просторі напрямом Z . Це узгоджується з тією обставиною, що напрям моменту в просторі є невизначеним.

Слід відзначити, що з правил квантування моменту випливає, що сталу Планка \hbar можна розглядати як природну одиницю моменту імпульсу.

4 Момент імпульсу системи, що складається з декількох мікрочастинок, дорівнює сумі моментів окремих часток. Сумарний момент, як і будь-який момент взагалі, визначається виразом

$$|L_{рез}| = \hbar\sqrt{L(L+1)} , \quad (92.11)$$

де L – азимутальне квантове число результуючого моменту. Для випадку системи, яка складається з двох частинок, число L може мати такі значення:

$$L = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, \dots, |l_1 - l_2| , \quad (92.12)$$

де l_1 й l_2 – числа, що визначають модулі моментів, які складаються, за формулою

$$|L_i| = \hbar\sqrt{l_i(l_i + 1)} .$$

ТЕМА 16 ФІЗИКА АТОМІВ І МОЛЕКУЛ

§ 93 Атом водню з погляду квантової механіки. Квантові числа: n , l , m_l . Кратність виродження. Правило відбору [6]

1 Розглянемо систему, яка складається з нерухомого ядра із зарядом Ze (Z – ціле число), і електрона, який рухається навколо нього. При $Z > 1$ така система називається воднеподібним іоном; при $Z = 1$ вона є атомом водню.

Потенціальна енергія електрона дорівнює

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}$$

(r – відстань електрона від ядра). Отже, рівняння Шредінгера має вигляд

$$\nabla^2\psi + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left(E + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \right) \psi = 0 \quad (93.1)$$

(m_e – маса електрона).

Поле, у якому рухається електрон, є центральносиметричним. Тому доцільно скористатися сферичною системою координат: r, θ, φ . Підставивши в (93.1) вираз оператора Лапласа в сферичних координатах, прийдемо до рівняння

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left(E + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \right) \psi = 0. \quad (93.2)$$

Можна показати, що рівняння (93.2) має розв'язки для хвильової функції, які задовольняють стандартні умови (тобто однозначні, скінченні й безперервні), у таких випадках: 1) при будь-яких додатних енергіях E ; 2) при дискретних від'ємних значеннях енергії, що дорівнюють

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2} \frac{Z^2}{n^2} \quad (n=1,2,3,\dots). \quad (93.3)$$

Випадок $E > 0$ відповідає електрону, що пролітає поблизу ядра й віддаляється знову на нескінченність. Випадок $E < 0$ відповідає електрону, який рухається навколо ядра. Порівняння з виразом для енергії, яке отримано в теорії Бора, показує, що квантова механіка приводить до таких самих значень енергії водневого атома. Однак у квантовій механіці ці значення утворюються як наслідок основних положень цієї науки. Бору ж для отримання такого результату довелося вводити спеціальні додаткові припущення.

Власні функції рівняння (93.2) містять три цілих параметри n, l й m :

$$\psi = \psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi). \quad (93.4)$$

Параметр n , який називають **головним квантовим числом**, збігається з номером рівня енергії (див. формулу (93.3)). **Параметри l і m є азимутальним й магнітним квантовим числом**, які визначають за відповідними формулами модуль моменту імпульсу й проекцію моменту на деякий напрям Z .

Розв'язки для хвильової функції, які задовольняють стандартні умови, мають місце лише для значень l , які не перевищують $n-1$. Отже, при заданому n квантове число l може набувати n різних значень:

$$l = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

При заданому l квантове число m може набувати $2l+1$ різних значень:

$$m = -l, -l+1, \dots, -1, 0, +1, \dots, l-1, l.$$

2 Згідно з (93.3) енергія електрона залежить тільки від головного квантового числа n . Отже, кожному власному значенню енергії E_n (крім E_1) відповідає кілька власних функцій $\psi_{n,l,m}$, які відрізняються значеннями квантових чисел l і m . Це означає, що атом водню може мати одне і те саме значення енергії, перебуваючи в декількох різних станах. У табл. 1 наведені стани, що відповідають першим трьом енергетичним рівням.

Стани з однаковою енергією називаються **виродженими**, а число різних станів з яким-небудь значенням енергії називається **кратністю виродження** відповідного енергетичного рівня.

Кратність виродження рівнів водню легко обчислити, виходячи з можливих значень для l й m . Кожному з n значень квантового числа l відповідає $2l+1$ значень квантового числа m . Отже, число різних станів, що відповідають даному n , дорівнює

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2 \quad (93.5)$$

(див. також пункт 5 цього параграфа). Для обчислення суми в (93.5) використали формулу арифметичної прогресії.

Таблиця 93.1

Рівень енергії E_n	Псі-функція $\Psi_{n,l,m}$	Значення			Рівень енергії E_n	Псі-функція $\Psi_{n,l,m}$	Значення		
		n	l	m			n	l	m
E_1	$\Psi_{1,0,0}$	1	0	0	E_3	$\Psi_{3,0,0}$	3	0	0
E_2	$\Psi_{2,0,0}$	2	0	0		$\Psi_{3,1,-1}$	3	1	-1
	$\Psi_{2,1,-1}$	2	1	-1		$\Psi_{3,1,0}$	3	1	0
	$\Psi_{2,1,0}$	2	1	0		$\Psi_{3,1,+1}$	3	1	+1
	$\Psi_{2,1,+1}$	2	1	+1		$\Psi_{3,2,-2}$	3	2	-2
						$\Psi_{3,2,-1}$	3	2	-1
				$\Psi_{3,2,0}$		3	2	0	
				$\Psi_{3,2,+1}$		3	2	+1	
				$\Psi_{3,2,+2}$		3	2	+2	

Таким чином, кратність виродження енергетичних рівнів водневого атома дорівнює n^2 (див. також табл. 1, п.5 цього параграфа).

3 Стани з різними значеннями азимутального квантового числа l відрізняються величиною моменту імпульсу. В атомній фізиці застосовуються запозичені зі спектроскопії умовні позначення станів електрона з різними значеннями моменту імпульсу. Електрон, що перебуває у стані з $l=0$, називають *s-електроном* (відповідний стан – *s-станом*), з $l=1$ – *p-електроном*, з $l=2$ – *d-електроном*, з $l=3$ – *f-електроном*, потім ідуть *g, h* і т.д. вже за алфавітом. Значення головного квантового числа записують перед умовною позначкою квантового числа l . Таким чином, електрон у стані з $n=3$ і $l=1$ позначається символом $3p$ і т.д.

Оскільки l завжди менше n , можливі такі стани електрона:

$$\begin{aligned} &1s, \\ &2s, 2p, \\ &3s, 3p, 3d, \\ &4s, 4p, 4d, 4f \end{aligned}$$

Схема рівнів енергії зображена на рис. 93.1. На цій схемі відображено (правда, частково) виродження рівнів, крім того, вона має ще ряд істотних переваг, які скоро стануть очевидними.

4 Ми знаємо, що випромінювання й поглинання світла відбувається при переходах електрона з одного рівня на інший. У квантовій механіці доводять, що для *азимутального квантового числа* l є *правило відбору*

$$\boxed{\Delta l = \pm 1}. \quad (93.6)$$

Це означає, що можливі тільки такі переходи, при яких l змінюється на одиницю. Правило (93.5) обумовлене тим, що фотон має власний момент імпульсу (спін). При випромінюванні фотон виносить з атома цей момент, а при поглинанні приносить, так що правило відбору (93.6) є просто наслідок закону збереження моменту імпульсу.

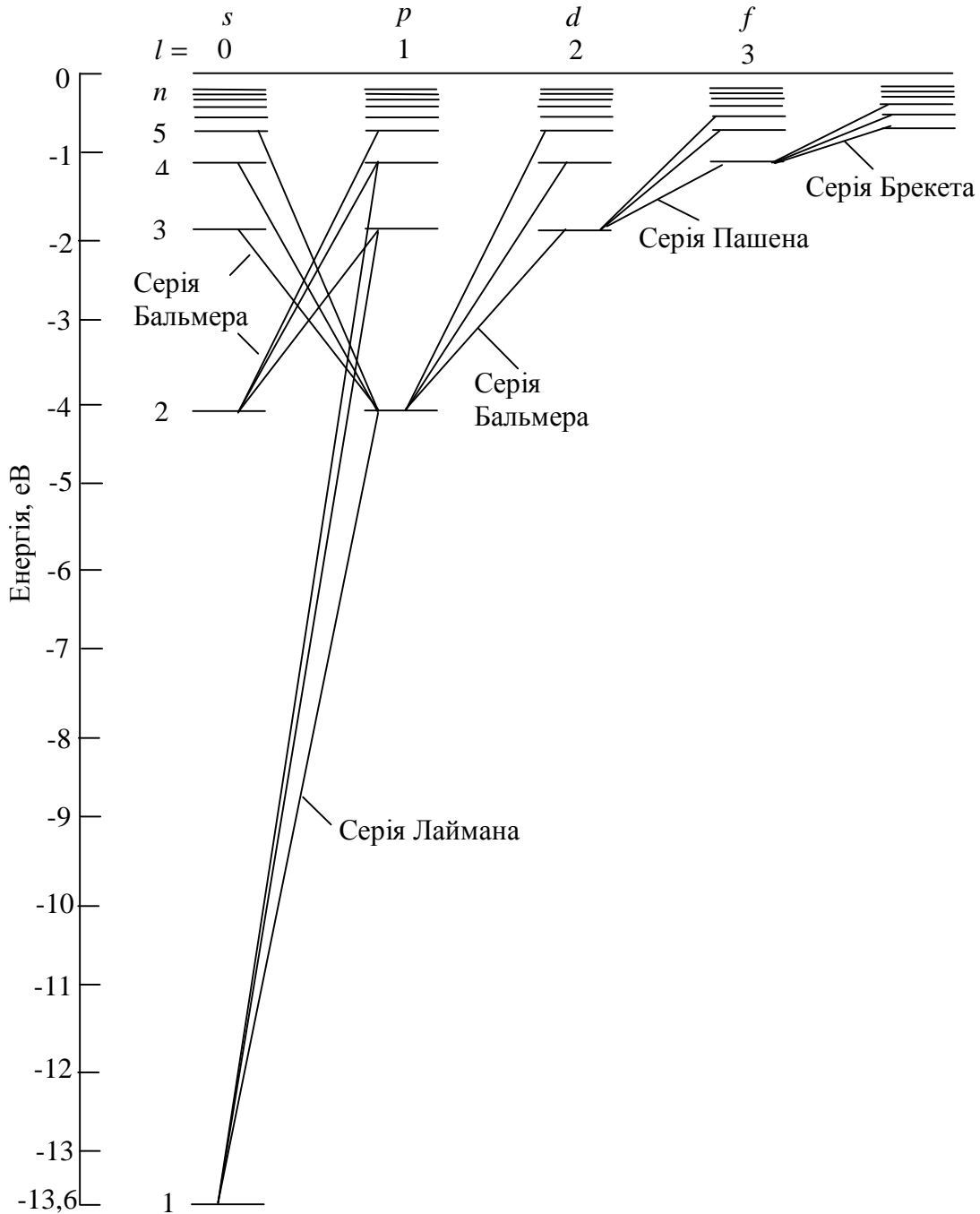


Рисунок 93.1

На рис. 93.1 показані переходи, які дозволені правилом (93.6). Користуючись умовними позначками станів електрона, переходи, які приводять до виникнення серії Лаймана, можна записати у вигляді

$$np \rightarrow 1s \quad (n = 2, 3, \dots);$$

серії Бальмера відповідають переходи

$$np \rightarrow 2s, \quad ns \rightarrow 2p, \quad nd \rightarrow 2p \quad (n = 3, 4, \dots) \text{ і т.д.}$$

Стан $1s$ є основним станом атома водню. У цьому стані атом має мінімальну енергію. Щоб перевести атом з основного стану в збуджене (тобто в стан з більшою енергією), йому необхідно передати енергію. Це може бути здійснене за рахунок теплового зіткнення атомів (із цієї причини нагріті тіла світяться – атоми випромінюють, повертаючись зі збудженого в основний стан), або за рахунок зіткнення атома з досить швидким електроном, або, нарешті, за рахунок поглинання атомом фотона.

Фотон при поглинанні його атомом зникає, передаючи атому всю свою енергію. Атом не може поглинути тільки частину фотона, тому що фотон, як і електрон, як й інші елементарні частинки, є неподільним. Оскільки атом, який поглинає, як правило, знаходиться в основному стані, спектр поглинання водневого атома повинен складатися з ліній, що відповідають переходам

$$1s \rightarrow np \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Цей результат повністю узгоджується з дослідом.

5 Слід зазначити, що в даному параграфі не було враховано, що електрон також має власний момент імпульсу (спін електрона). Спін електрона характеризується квантовим числом $s = 1/2$ (аналог орбітального квантового числа l). При цьому власний момент імпульсу електрона дорівнює $L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)} = \hbar\sqrt{3}/2$. Проекція на виділену вісь Z власного моменту імпульсу може набувати $2s+1=2$ дискретних значень. Тобто проекція власного моменту імпульсу дорівнює $L_{s_z} = m_s\hbar$, де спінове квантове число m_s (аналог магнітного квантового числа m) може набувати двох значень: $+s=1/2$ і $-s=-1/2$. Щоб урахувати спінове виродження, необхідно формулу (93.5) помножити на 2. Тобто **виродження в атомі водню дорівнює $2n^2$** .

§ 94 Магнетизм атомів. Дослід Штерна й Герлаха. Спін електрона [11]

1 Магнетизм атомів. Із часу Ампера магнетизм пояснювався електричними струмами, які, за його уявленнями, циркулюють усередині малих частинок речовини (атомів і молекул). Природа цих струмів була встановлена з появою електронних уявлень про будову речовини і теорії Бора. Вважалося, що молекулярні струми Ампера створюються електронами, які обертаються навколо ядра атома.

Оскільки електрони, які утворюють оболонку атома, електрично заряджені й мають маси, з їх рухом в оболонці (такий рух називають орбітальним) пов'язаний не тільки момент імпульсу $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$, але й магнітний момент атома $\vec{p}_m = I \cdot \vec{S}$. Зв'язок між цими двома моментами вже розглядався раніше. Для одного електрона, який рухається по круговій орбіті, використовуючи методи класичної фізики, було отримано

$$\vec{p}_m = \Gamma \vec{L}, \quad (94.1)$$

де

$$\Gamma = -\frac{|e|\hbar}{2m_e}. \quad (94.2)$$

У цьому випадку відношення магнітного моменту електрона до моменту імпульсу p_m/L називається **гіромагнітним відношенням** для орбітального руху електрона.

Такий самий зв'язок між магнітним моментом і моментом імпульсу зберігається й у квантовій механіці. Однак тепер необхідно класичні уявлення замінити квантовими. Як і у випадку моменту імпульсу квантова механіка розв'язує задачу про магнітний момент атома з використанням операторного методу. Таким чином, вивчення магнітного моменту частинки зводиться до вивчення властивостей оператора \hat{p}_m , який відповідно до (94.1) має вигляд

$$\hat{p}_m = \Gamma \hat{L}. \quad (94.3)$$

Оскільки оператори \hat{L} й \hat{p}_m відрізняються тільки сталим множником Γ , то їх властивості подібні. Магнітний момент і момент імпульсу квантуються за однаковими правилами. *Складові магнітного моменту на будь-які два різних напрями не можуть одночасно мати визначеного значення. У стаціонарному стані визначені значення можуть мати тільки квадрат магнітного моменту й одна з його проєкцій на координатні осі.* За таку проєкцію береться проєкція на вісь Z . З формул (94.3), (94.2) і того, що для орбітального руху електрона $L_z = m\hbar$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), безпосередньо випливає

$$p_{m,z} = \Gamma L_z = -\frac{|e|\hbar}{2m_e} L_z = -\mu_B \cdot m, \quad (94.4)$$

де

$$\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2m_e} = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/Тл}. \quad (94.5)$$

Сталу μ_B називають *магнетоном Бора*.

2 Схема досліду Штерна й Герлаха. Наявність в атомів магнітних моментів і їх квантування було доведено прямими дослідами Штерна й Герлаха в 1921 р. У посудині з високим вакуумом створювався за допомогою діафрагм D і D' (рис. 94.1) різко обмежений атомний пучок досліджуваного елемента, який випаровувався з печі K . Пучок проходив через сильне магнітне поле з індукцією B між полюсними наконечниками N й S електромагніта. Один з наконечників (N) мав вигляд призми з гострим ребром, а уздовж іншого (S) була виточена канавка. Завдяки такій конструкції полюсних наконечників магнітне поле було сильно неоднорідним. Після проходження через магнітне поле пучок попадав на фотопластинку P й залишав на ній слід.

3 Розрахунок поведінки атомного пучка. Якщо \vec{p}_m – магнітний момент атома, то на атом у неоднорідному магнітному полі діє сила (див. (6.4))

$$\vec{F} = (\vec{p}_m \cdot \nabla) \vec{B}.$$

Спрямуємо вісь Z уздовж магнітного поля (тобто від N до S перпендикулярно до полюсних наконечників). Тоді проєкція сили в цьому напрямку буде

$$F_z = p_{m,x} \frac{\partial B_z}{\partial x} + p_{m,y} \frac{\partial B_z}{\partial y} + p_{m,z} \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

Можна показати, що першими двома доданками в цьому виразі можна знехтувати. Тоді середнє за часом значення z -компоненти сили, що діє на атом з магнітним моментом \vec{p}_m , дорівнює

$$\bar{F}_z = p_{m,z} \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (94.6)$$

Під дією цієї сили атоми будуть зміщуватися вздовж осі Z (див. рис. 94.1).

Варто очікувати різних результатів досліду з класичної й з квантової точок зору. У дослідах Штерна й Герлаха спочатку отримували слід атомного пучка на фотопластинці при виключеному магнітному полі, а потім при включеному. Якщо б проєкція $p_{m,z}$ могла набувати будь-який неперервних значень, як того вимагає *класична теорія*, то сила \vec{F}_z також

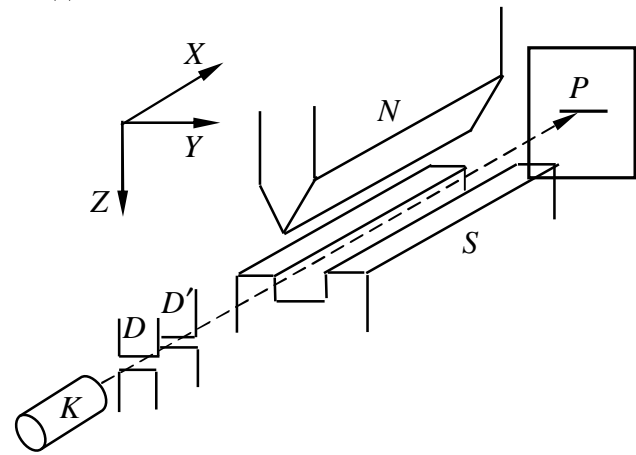


Рисунок 94.1

набувала б будь-який неперервних значень. Включення магнітного поля приводило б тоді тільки до *розширення пучка вздовж осі Z*.

Інший результат варто очікувати, виходячи з *квантової теорії*. У цьому випадку проекція $p_{m,z}$, а з нею й середня сила \vec{F}_z можуть набувати тільки *ряд дискретних вибраних значень*. Якщо орбітальне квантове число атома дорівнює l , то за квантовою теорією пучок вздовж осі Z розщепиться на $2l+1$ пучків (кількість таких пучків дорівнює числу можливих значень, які може набути квантове число m). Таким чином, залежно від значення числа l варто було б очікувати, що пучок розщепиться на 1,3,5,... складових. Очікуване число складових пучка **повинно було б бути завжди непарним**.

4 Результати досліду Штерна й Герлаха. У результаті досліду на фотопластинці спостерігалось розщеплення пучка атомів. *Таким чином, досліди Штерна й Герлаха довели квантування проекції $p_{m,z}$. Однак їх результати не завжди відповідали теорії, яка викладена вище*. Так у дослідах використовувалися пучки атомів срібла, для яких орбітальне квантове число дорівнювало нулю ($l=0$). Відповідно до квантової теорії, яка викладена вище, розщеплення пучків не повинно було б відбуватися (розщеплених пучків повинно бути $2l+1=2\cdot 0+1=1$). В експерименті ж спостерігалось, що у магнітному полі пучок розщеплювався вздовж осі Z на дві складові. Аналогічний результат було отримано для атомів водню. Для атомів інших хімічних елементів була отримана більш складна картина розщеплення, однак число розщеплених пучків було не тільки непарним, як це передбачала теорія, але й парним, що суперечило їй. Таким чином, *в квантову теорію необхідно було внести корективи*.

4 Спін. Розглядаючи невідповідність теорії та експерименту Штерна та Герлаха також потрібно взяти до уваги результати дослідів Ейнштейна й де Гааза з визначення гіромагнітного відношення. Для заліза виявилось, що гіромагнітне відношення дорівнює

$$\frac{p_m}{L} = \left| \frac{e}{m_e} \right|, \quad (94.7)$$

тобто є удвічі більшим, ніж впливає з класичної теорії (див. співвідношення (94.1) та (94.2)).

Також, виявилось, що спектральні терми лужних металів мають так звану дублетну структуру, тобто складаються із двох близько розміщених рівнів. Для опису цієї структури трьох квантових чисел n, l, m виявилось недостатньо – необхідно було ввести четверте квантове число. Це було головним мотивом, через який Уленбек й Гаудсміт у 1925 р. ввели *гіпотезу про спін електрона*. Сутність цієї гіпотези полягає в тому, що в електрона є не тільки момент імпульсу й магнітний момент, які пов'язані з переміщенням цієї частинки як цілого. *Електрон має також власний, або внутрішній механічний момент імпульсу. Цей власний момент імпульсу й називається **спіном** (від англійського слова to spin – вертїтися). Відповідний йому магнітний момент називається **спіновим магнітним моментом**. Ці моменти позначаються відповідно через L_s і $p_{m,s}$ на відміну від орбітальних моментів L_l і $p_{m,l}$. Четверте квантове число позначають просто через s і називають **спіном**.*

Самі Уленбек і Гаудсміт припускали, що спін виникає через обертання електрона навколо власної осі. Через це існуюча в той час модель атома отримала ще більшу подібність до Сонячної системи. Електрони (планети) не тільки обертаються навколо ядра (Сонця), але й навколо власних осей. Однак відразу ж з'ясувалася хибність такого класичного уявлення про спін (такі уявлення не змогли пояснити результат (94.7)). У 1928 р. Дірак показав, що спін електрона автоматично впливає з його теорії електрона, яка була заснована на релятивістському хвильовому рівнянні. У теорії Дірака було отримано гіромагнітне відношення для власних моментів, яке збігалось з дослідом (див. (94.7)). Таким чином, спін електрона є квантово-релятивістським ефектом, який не має класичного тлумачення. Потім

концепція спіну як внутрішнього моменту імпульсу була поширена на інші елементарні й складні частинки й знайшла підтвердження й широке застосування в сучасній фізиці.

5 Спін електрона. У загальному курсі фізики немає можливості викласти докладну теорію спіну. Ми візьмемо як вихідне положення, що спіновому моменту імпульсу відповідає векторний оператор, проекції якого мають властивості, подібні до властивостей оператора орбітального моменту імпульсу. Із цього випливає, що визначені значення в одному і тому самому стані можуть мати тільки квадрат повного спіну й одна з його проекцій на визначену вісь (вісь Z). Якщо максимальне значення проекції $L_{z,s}$ дорівнює $s \cdot \hbar$ (s – спінове квантове число, співвідношення написано за аналогією з $L_{z,l} = m_{\max} \hbar$, де $m_{\max} = l$), то число всіх можливих проекцій, які відповідають даному квантовому числу s , буде дорівнює $2s+1$ (у випадку орбітального руху має місце аналогічне співвідношення $2l+1$).

У Дослідах Штерна й Герлаха атоми водню перебували в s -стані, тобто їх орбітальні моменти дорівнювали нулю ($l=0$). Тому Уленбек і Гаудсміт припустили, що розщеплення пучка обумовлене не орбітальним, а спіновим магнітним моментом. Те саме стосується й дослідів з атомами срібла. Атом срібла має єдиний зовнішній електрон. Атомний остов через його симетрію спінового і магнітного моментів не має. Весь магнітний момент атома срібла створюється тільки одним зовнішнім електроном. Коли атом перебуває в нормальному, тобто s -стані, то орбітальний момент валентного електрона дорівнює нулю – весь момент є спіновим. Тому результати дослідів у цьому випадку визначалися виключно спіновими моментами електрона.

Досліди Штерна й Герлаха показали, що для атома срібла та водню ($l=0$) пучок розщеплювався на два пучки. Це означає, що $2s+1=2$. Звідси отримуємо для електрона $s=1/2$.

Для електрона, таким чином, спінове квантове число дорівнює $1/2$:

$$\boxed{s = 1/2}. \quad (94.8)$$

Для власного моменту імпульсу є справедливим співвідношення, аналогічне до орбітального моменту імпульсу електрона:

$$\boxed{L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)} = \hbar \sqrt{3}/2}. \quad (94.9)$$

Проекція власного моменту імпульсу на вісь Z визначається співвідношенням

$$\boxed{L_{z,s} = \hbar m_s \quad (m_s = \pm s = \pm 1/2)}. \quad (94.10)$$

Виміри проекції магнітного моменту $p_{m,z}$ в досліді Штерна й Герлаха показали, що для атомів водню й срібла величина $p_{m,z}$ дорівнює магнетону Бору μ_B . Таким чином, було отримано гіромагнітне відношення для електрона

$$\left| \frac{p_{m,z}}{L_z} \right| = \frac{\mu_B}{\hbar/2} = \left| \frac{e}{m_e} \right|, \quad (94.11)$$

яке відповідає результату, що був знайдений Ейнштейном і де Гаазом (див. (94.7)).

§ 95 Принцип Паулі. Періодична система елементів Д.І. Менделєєва з погляду квантової механіки [3]

1 У класичній механіці частинки однакової природи (наприклад, електрони) можна розрізняти. Пронумерувавши їх у деякий момент часу t_0 , можна спостерігати за кожною з них під час її руху по траєкторії й у будь-який момент часу t зазначити, який номер був привласнений тій або іншій частинці.

У квантовій механіці ця проблема розглядається принципово інакше. Через принцип невизначеності (співвідношення невизначеностей Гейзенберга) поняття траєкторії частинки втрачає зміст. Тому стежити за кожною з однакових частинок і тим самим розрізняти їх неможливо. Таким чином, у квантовій механіці частинки однакової природи повністю втрачають свою «індивідуальність» – вони виявляються нерозрізненими. Це твердження називають **принципом нерозрізненості**, або **принципом тотожності однакових частинок**.

2 Принцип нерозрізненості однакових частинок приводить до глибоких фізичних наслідків. Нехай є система із двох тотожних частинок. Позначивши сукупність координат і проєкції спіну частинок буквами ξ_1 й ξ_2 , розглянемо хвильову функцію системи $\psi(\xi_1, \xi_2)$. Оскільки частинки нерозрізнені, перестановка ξ_1 й ξ_2 не повинна приводити до зміни фізичних властивостей системи, тобто змінювати квадрат модуля хвильової функції. Отже, повинна виконуватися рівність

$$|\psi(\xi_1, \xi_2)|^2 = |\psi(\xi_2, \xi_1)|^2.$$

При цьому можливі два випадки:

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \psi(\xi_2, \xi_1) \text{ і } \psi(\xi_1, \xi_2) = -\psi(\xi_2, \xi_1).$$

У першому випадку функція ψ виявляється симетричною відносно зміни ξ_1 й ξ_2 , у другому випадку – антисиметричною.

Виявляється, що частинки з нульовим або цілим спіном описуються симетричними, а частинки з напівцілим спіном – антисиметричними хвильовими функціями. Подальший аналіз, який через його складність ми викладати тут не маємо можливості, приводить до таких результатів.

Частинки із цілим або нульовим спіном можуть перебувати в межах даної системи в однаковому стані в необмеженій кількості. Такі частинки підкоряються статистиці, розробленою Бозе й Ейнштейном, і тому називаються **бозонами**. Можна сказати, що бозони є «колективістами», їм «подобається» накопичуватися в одному і тому самому стані.

Частинки з напівцілим спіном можуть перебувати у квантових станах тільки поодиноці. Такі частинки підкоряються статистиці, розробленої Фермі й Діраком, і називаються **ферміонами**. Ферміони є «індивідуалістами».

У 1925 р. Паулі сформулював **принцип, що має його ім'я, відповідно до якого в одному і тому самому атомі (або в якій-небудь іншій квантовій системі) не може бути двох електронів (або інших частинок з напівцілим спіном), що мають однакову сукупність квантових чисел**. Іншими словами, у одному і тому самому стані не можуть перебувати одночасно два електрони.

3 Розподіл електронів за енергетичними станами в атомі. Нагадаємо, що стан електрона в атомі характеризується чотирма квантовими числами:

головним	n ($n = 1, 2, 3, \dots$),
азимутальним	l ($l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$),
магнітним	m_l ($m_l = 0, \pm 1, \dots, \pm l$),
спіновим	m_s ($m_s = +1/2, -1/2$).

Енергія стану атома в загальному випадку залежить в основному від чисел n і l . Крім того, є слабка залежність енергії від чисел m_l і m_s , оскільки їх значення пов'язані з взаємною орієнтацією моментів імпульсів, від якої залежить енергія спин-орбітальної взаємодії. Енергія стану сильніше зростає зі збільшенням числа n , ніж зі збільшенням l . Тому, як правило, стан з більшим n має незалежно від значення l більшу енергію.

В основному (незбудженому) стані атома електрони повинні розміщуватися на найнижчих доступних для них енергетичних рівнях. Пояснення характеру заповнення основних станів атомів дає принцип Паулі. Стосовно до електронів в атомі цей принцип

можна сформулювати так: в одному і тому самому атомі не може бути двох електронів, що мають однакову сукупність квантових чисел n, l, m_l і m_s .

Аналізуючи атом водню з погляду квантової механіки було показано, що даному n відповідає n^2 станів, які відрізняються значеннями l й m_l . Квантове число m_s може набувати двох значень: $\pm 1/2$. Тому в станах з даним значенням n можуть знаходитися в атомі не більше $2n^2$ електронів:

- стани з $n = 1$ можуть мати 2 електрони,
- стани з $n = 2$ можуть мати 8 електронів,
- стани з $n = 3$ можуть мати 18 електронів,
- стани з $n = 4$ можуть мати 32 електрона,
- стани з $n = 5$ можуть мати 50 електронів і т.д.

Сукупність електронів, що мають однакові значення квантового числа n , утворюють **оболонку**. Оболонки підрозділяються на **підоболонки**, що відрізняються значенням квантового числа l . Відповідно до значень n оболонкам дають позначення, запозичені зі спектроскопії рентгенівських променів:

Значення n	1	2	3	4	5	6	7...
Позначення оболонки	<i>K</i>	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>N</i>	<i>O</i>	<i>P</i>	<i>Q</i> ...

Розподіл можливих станів електрона в атомі на оболонки й підоболонки показаний у табл. 1, у якій замість позначень $m_s = \pm 1/2$ застосовані для наочності символи $\uparrow\downarrow$. Підоболонки, як зазначено в таблиці, можуть позначатися двома способами, наприклад, L_1 (нижній індекс 1 позначає номер підоболонки) або $2s$ ($n = 2, l = 0$).

Для повністю заповненої підоболонки характерна рівність нулю сумарних орбітальних і сумарного спінового моментів ($L = 0, S = 0$). Отже, момент імпульсу такої підоболонки дорівнює нулю. Переконаємося в цьому на прикладі $3d$ -підоболонки. Спіни всіх десяти електронів, що входять у цю підоболонку, попарно компенсують один одного, внаслідок чого квантове число сумарного спінового моменту $S = 0$. Квантове число проекції **результуючого орбітального моменту імпульсу** цієї підоболонки на вісь Z має єдине значення $m_L = \sum m_l = 0$. Отже, квантове число результуючого орбітального моменту імпульсу L також дорівнює нулю. Таким чином, при визначенні L й S атома заповнені підоболонки можна не брати до уваги.

4 Принцип Паулі дає пояснення періодичної повторюваності властивостей атомів. Простежимо побудову **періодичної системи елементів Д.І.Менделєєва**. Почнемо з атома водню, який має один електрон. Кожний наступний атом будемо отримувати, збільшуючи заряд ядра попереднього атома на одиницю й додаючи один електрон, який ми будемо розміщувати в доступний для нього відповідно до принципу Паулі стан з найменшою енергією.

В атомі водню є в основному стані один $1s$ -електрон з довільною орієнтацією спіна. Квантові числа атома мають значення: $L = 0, S = 1/2, J = 1/2$. Тут квантове число J характеризує результуючий момент імпульсу атома, що складається з орбітального й спінового моментів імпульсу. Відповідно символ основного стану водневого атома має вигляд $^2S_{1/2}$ ($2 = 2S + 1$, де $S = 1/2$; символ S позначає, що $L = 0$; індекс $1/2 = J$; не слід плутати спінове квантове число S з позначенням S , яке вказує, що орбітальне квантове число дорівнює нулю $L = 0$).

Якщо заряд ядра атома водню збільшити на одиницю й додати ще один електрон, отримаємо атом гелію. Обидва електрони в цьому атомі можуть перебувати в K -оболонці,

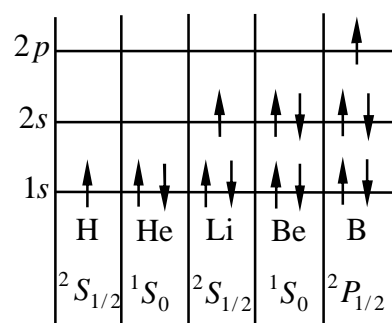


Рисунок 95.1 – Схема заповнення електронами енергетичних рівнів

але з антипаралельною орієнтацією спінів. Так звана **електронна конфігурація** атома може бути записана як $1s^2$ (два $1s$ -електрони). Основним станом буде $^1S_0 (L=0, S=0, J=0)$.

На атомі гелію закінчується заповнення K -оболонки. Третій електрон атома літію може зайняти лише рівень $2s$ (рис. 95.1). Утворюється електронна конфігурація $1s^2 2s$. Основний стан характеризується квантовими числами $L=0, S=1/2, J=1/2$. Тому основним станом, як і у водню, буде $^2S_{1/2}$. Третій електрон атома літію, займаючи більш високий енергетичний рівень, ніж інші два електрони, виявляється слабкіше, ніж вони, пов'язаним з ядром атома. У результаті він визначає оптичні й хімічні властивості атома.

У четвертого елемента, берилія, повністю заповнюється підоболонка $2s$. У наступних шести елементів (B, C, N, O, F і Ne) відбувається заповнення електронами підоболонки $2p$, у результаті чого неон має повністю заповнені оболонки K (двома електронами) і L (восьма електронами), що утворюють стійку систему, подібну до системи гелію, чим обумовлюються специфічні властивості інертних газів.

Процес забудови електронних оболонок перших 36 елементів періодичної системи поданий у табл. 95.2. Одинадцятий елемент – натрій, крім заповнених оболонок K і L , має один електрон у підоболонці $3s$. Електронна конфігурація має вигляд $1s^2 2s^2 2p^2 3s$. Основним станом буде $^2S_{1/2}$. Електрон $3s$ пов'язаний з ядром слабкіше від інших і є **валентним**, або **оптичним електроном**. У зв'язку із цим хімічні й оптичні властивості натрію подібні до властивостей літію.

Таблиця 95.1

Оболонка	n	l	m_l	m_s	Підоболонка	Оболонка	n	l	m_l	m_s	Підоболонка	
K	1	0	0	$\uparrow\downarrow$	$K(1s)$	N	4	0	0	$\uparrow\downarrow$	$N_1(4s)$	
L	2	0	0	$\uparrow\downarrow$	$L_1(2s)$			1	-1 0 +1	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$	$N_2(4p)$	
		1	-1 0 +1	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$	$L_2(2p)$			2	-2 -1 0 +1 +2	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$	$N_3(4d)$	
M	3	0	0	$\uparrow\downarrow$	$M_1(3s)$			3	3	-3 -2 -1 0 +1 +2 +3	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$	$N_4(4f)$
		1	-1 0 +1	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$	$M_2(3p)$							
		2	-2 -1 0 +1 +2	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$	$M_3(3d)$							

У наступних за натрієм елементів нормально заповнюються підоболонки $3s$ й $3p$. Підоболонка $3d$ при даній загальній конфігурації виявляється енергетично вищою від підоболонки $4s$, у зв'язку із чим при незавершеному в цілому заповненні оболонки M починається заповнення оболонки N . Підоболонка $4p$ лежить уже вище, ніж $3d$, так що після $4s$ заповнюється підоболонка $3d$.

З аналогічними відступами від звичайної послідовності, що повторюються час від часу, здійснюється забудова електронних рівнів всіх атомів. При цьому періодично

повторюються подібні електронні конфігурації (наприклад, $1s, 2s, 3s$ і т.д.) понад повністю заповнених підоболонки, чим обумовлюється періодична повторюваність хімічних і оптичних властивостей атомів.

Таблиця 95.2

Елемент	<i>K</i>	<i>L</i>		<i>M</i>			<i>N</i>	
	1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p
1 H	1	–	–	–	–	–	–	–
2 He	2	–	–	–	–	–	–	–
3 Li	2	1	–	–	–	–	–	–
4 Be	2	2	–	–	–	–	–	–
5 B	2	2	1	–	–	–	–	–
6 C	2	2	2	–	–	–	–	–
7 N	2	2	3	–	–	–	–	–
8 O	2	2	4	–	–	–	–	–
9 F	2	2	5	–	–	–	–	–
10 Ne	2	2	6	–	–	–	–	–
11 Na	2		8	1	–	–	–	–
12 Mg	2		8	2	–	–	–	–
13 Al	2		8	2	1	–	–	–
14 Si	2		8	2	2	–	–	–
15 P	2		8	2	3	–	–	–
16 S	2		8	2	4	–	–	–
17 Cl	2		8	2	5	–	–	–
18 Ar	2		8	2	6	–	–	–
19 K	2		8		8	–	1	–
20 Ca	2		8		8	–	2	–
21 Sc	2		8		8	1	2	–
22 Ti	2		8		8	2	2	–
23 V	2		8		8	3	2	–
24 Cr	2		8		8	5	1	–
25 Mn	2		8		8	5	2	–
26 Fe	2		8		8	6	2	–
27 Co	2		8		8	7	2	–
28 Ni	2		8		8	8	2	–
29 Cu	2		8		8	10	1	–
30 Zn	2		8		8	10	2	–
31 Ga	2		8		8	10	2	1
32 Ge	2		8		8	10	2	2
33 As	2		8		8	10	2	3
34 Se	2		8		8	10	2	4
35 Br	2		8		8	10	2	5
36 Kr	2		8		8	10	2	6

§ 96 Спонтанне й вимушене випромінювання. Коефіцієнти Ейнштейна [10]

1 Відповідно до теорії Бора мають місце два види переходів атомів між енергетичними рівнями. Перший вид – перехід з більш високого енергетичного рівня E_n на більш низький E_m з випромінюванням фотона $\hbar\omega = E_n - E_m$. Такі переходи будемо називати *спонтанними* (атом спонтанно, самочинно переходить із більш високого енергетичного

рівня на більш низький) (див. рис. 96.1а). Другий вид – перехід з більш низького енергетичного рівня E_m на більш високий E_n під дією випромінювання (поглинання фотона $\hbar\omega = E_n - E_m$, який падає на атом). Такі переходи називаються **вимушеним поглинанням** (перехід залежить від наявності й інтенсивності поля випромінювання, тому називається вимушеним) (див. рис. 96.1б).

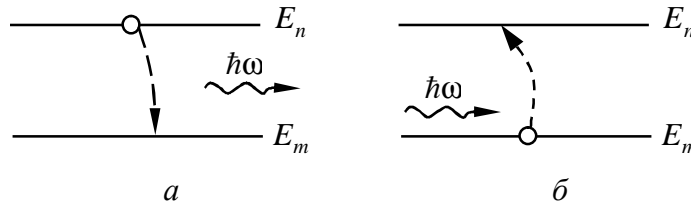


Рисунок 96.1 – Схеми: *a* – спонтанного випромінювання; *б* – вимушеного поглинання

2 У 1916 р. Ейнштейн звернув увагу на те, що двох зазначених вище видів випромінювання недостатньо для пояснення існування стану теплової рівноваги між випромінюванням і речовиною. Дійсно, імовірність спонтанних переходів визначається лише внутрішніми властивостями атомів і, отже, не може залежати від інтенсивності падаючого випромінювання, у той час як імовірність «поглинальних» переходів залежить як від властивостей атомів, так і від інтенсивності падаючого випромінювання. Для можливості встановлення рівноваги при довільній інтенсивності падаючого випромінювання необхідно існування «випромінювальних» переходів, імовірність яких зростала б зі збільшенням інтенсивності випромінювання. Тобто «випромінювальних» переходів, які залежать, спричиняються випромінюванням. Випромінювання, яке виникає в результаті таких переходів, називається **вимушеним**, або **індукованим випромінюванням**.

Вимушене випромінювання має досить важливі властивості. Напрямо його поширення в точності збігається з напрямом поширення зовнішнього випромінювання, яке спричинило перехід. Також збігаються частоти, фази й поляризації цих випромінювань. Отже, вимушене випромінювання й те, яке спричинило перехід, виявляються строго когерентними. Ця особливість вимушеного випромінювання лежить в основі дії підсилювачів і генераторів світла, яких називають лазерами.

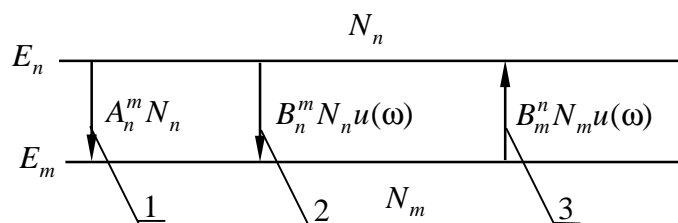


Рисунок 96.2 – Переходи атома: 1 – спонтанне випромінювання; 2 – вимушене випромінювання; 3 – вимушене поглинання

3 Опишемо якісно стан термодинамічної рівноваги між випромінюванням і речовиною. Досліджуємо перехід атомів між станами з енергіями E_n й E_m (див. рис. 96.2). Нехай N_n і N_m – число атомів у станах E_n і E_m , причому стани E_n й E_m можуть бути взяті якими завгодно з ряду припустимих станів. Середнє число переходів атомів зі стану E_n в стан E_m за одиницю часу через спонтанне випромінювання буде пропорційне вихідному числу атомів N_n . Подамо його у вигляді $A_n^m N_n$. Ейнштейн постулював, що через індуковане випромінювання середнє число переходів між тими самими рівнями буде як і раніше пропорційно N_n , а також спектральній густині випромінювання $u(\omega_{mn})$ при частоті світла,

яка випромінюється у розглянутому переході. Позначимо це число через $B_n^m N_n u(\omega_{mn})$. Аналогічно, середнє число переходів з рівня E_m на рівень E_n через поглинання світла можемо подати як $B_m^n N_m u(\omega_{mn})$. Величини A_n^m , B_n^m , B_m^n називаються **коефіцієнтами Ейнштейна**. Вони є характеристиками тільки самого атома й можуть залежати лише від частоти ω_{mn} .

4 Визначимо зв'язок між B_n^m і B_m^n . Припустимо, що поле випромінювання, у якому знаходяться атоми, рівноважне й має температуру T . Тоді має місце термодинамічна рівновага і тому

$$A_n^m N_n + B_n^m N_n u(\omega_{mn}) = B_m^n N_m u(\omega_{mn}). \quad (96.1)$$

Будемо підвищувати температуру системи. Коефіцієнти Ейнштейна при цьому змінюватися не будуть, тому що вони від температури не залежать. Спектральна густина електромагнітного випромінювання $u(\omega_{mn})$ буде зростати. Тому спонтанне випромінювання (не залежить від $u(\omega_{mn})$) буде відігравати все меншу й меншу роль у порівнянні з вимушеним. За умови $T \rightarrow \infty$ ним можна знехтувати. Тоді умова детальної рівноваги при $T \rightarrow \infty$ набере вигляду

$$B_n^m N_n u(\omega_{mn}) = B_m^n N_m u(\omega_{mn}). \quad (96.2)$$

Відповідно до формули Больцмана $N = N_0 \exp(-E/(kT))$. Тому

$$\frac{N_n}{N_m} = \frac{N_0 \exp(-E_n/(kT))}{N_0 \exp(-E_m/(kT))} = \exp\left(-\frac{E_n - E_m}{kT}\right) \rightarrow \exp\left(-\frac{E_n - E_m}{\infty}\right) = \exp(-0) = 1.$$

Тобто при $T \rightarrow \infty$ заселеність рівнів N_n , N_m повинна зрівнятися. Звідси й з формули (96.2) випливає, що

$$B_n^m = B_m^n. \quad (96.3)$$

Таким чином, існують три види переходу атомів: спонтанне випромінювання, вимушене (індуковане) поглинання, вимушене (індуковане) випромінювання. Ці переходи характеризуються коефіцієнтами Ейнштейна A_n^m , B_n^m , B_m^n , причому $B_n^m = B_m^n$.

§ 97 Інверсна заселеність. Лазери [10]

1 В 50-х роках ХХ ст. були створені пристрої, при проходженні через які електромагнітні хвилі підсилюються за рахунок відкритого Ейнштейном вимушеного випромінювання. У 1953 р. Басовим і Прохоровим і незалежно від них Таунсом були створені перші молекулярні генератори, які працюють у діапазоні сантиметрових хвиль і які отримали назву мазерів. (У 1964 р. Басову, Прохорову й Таунсу за це була присуджена Нобелівська премія.) Слово «мазер» походить від перших букв англійської назви Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation (посилення мікрохвиль за допомогою вимушеного випромінювання).

У 1960 р. Мейманом був створений перший аналогічний прилад, що працює в оптичному діапазоні, – **лазер** (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation – посилення світла за допомогою вимушеного випромінювання). Лазери називають також **оптичними квантовими генераторами**. У цей час термін «лазер» поєднує в собі не тільки оптичні квантові генератори.

2 Лазер працює за **принципом індукованого випромінювання**. Припустимо, що на атом падає фотон з енергією $\hbar\omega = E_2 - E_1$, де E_2 й E_1 – деякі два енергетичні рівні атома. Якщо атом знаходиться на нижньому рівні E_1 , то фотон, що падає на нього, може

поглинутися. Якщо ж атом знаходиться на верхньому рівні E_2 , то може відбутися вимушений перехід на нижній рівень E_1 із випромінюванням другого фотона. Індуковано випромінений фотон характеризується не тільки тією самою частотою ω (як і при спонтанному випромінюванні), але також тими ж фазою, поляризацією й напрямком поширення. Замість одного падаючого фотона утворюється два тотожних фотони. Ця особливість індукованого випромінювання й використовується в лазерах.

Розглянемо тепер не одиничний атом, а середовище з атомів. Позначимо через N_1 і N_2 числа атомів в одиниці об'єму на рівнях E_1 і E_2 відповідно. Припустимо, що в середовищі поширюється плоска монохроматична хвиля, частота якого визначається умовою $\hbar\omega = E_2 - E_1$. За час dt із нижнього рівня на верхній переходить у середньому $u(\omega)B_1^2N_1dt$ атомів і таке саме число фотонів поглинається. Через індуковане випромінювання з верхнього рівня на нижній перейде $u(\omega)B_2^1N_2dt$ атомів і утвориться таке саме число фотонів тієї самої поляризації й напрямку поширення, що й у розглянутій хвилі. Фотони, які випромінені спонтанно, а також фотони, які індуковані іншими хвилями, можна не враховувати, тому що серед них тільки незначна частина поширюється в потрібному напрямку й має потрібну поляризацію. Збільшення числа фотонів в одиниці об'єму за час dt можна подати виразом

$$dN_{\text{фот}} = (B_2^1N_2 - B_1^2N_1)u(\omega)dt = B_2^1(N_2 - N_1)u(\omega)dt. \quad (97.1)$$

Тут урахували, що коефіцієнти Ейнштейна B_1^2 й B_2^1 зв'язані співвідношенням $B_1^2 = B_2^1$. З (97.1) випливає, щоб хвиля підсилювалася ($dN_{\text{фот}} > 0$), необхідне виконання умови

$$N_2 - N_1 > 0, \text{ або } N_2 > N_1. \quad (97.2)$$

У звичайних умовах, коли середовище перебуває в термодинамічній рівновазі, співвідношення (97.2) не виконується. Тобто має місце зворотне співвідношення $N_2 < N_1$, на кожному *простому верхньому рівні перебуває менше атомів, ніж на нижньому*. Це безпосередньо випливає з формули Больцмана

$$N = N_0 \exp(-E/(kT)). \quad \frac{N_1}{N_2} = \exp\left(-\frac{E_1 - E_2}{kT}\right) = \exp\left(\frac{E_2 - E_1}{kT}\right) > 1, \text{ тому що } E_2 > E_1.$$

Можна штучно отримати *термодинамічно нерівноважне середовище*, у якого виконується співвідношення (97.2). Таке середовище називається *активним*, або середовищем з *інверсною заселеністю відносно енергетичних рівнів* E_1 і E_2 . Отже, для посилення світлової хвилі необхідно, щоб середовище, у якому хвиля поширюється, було активним. Ідея використання індукованого випромінювання для посилення хвилі була вперше висловлена в 1939 р. В.А. Фабрикантом. У той час на ідею Фабриканта не було звернено належної уваги. Здавалося, що створення систем з інверсною заселеністю енергетичних рівнів – справа безперспективна.

Посилення світла в активному середовищі звичайно порівнюють зі сходженням лавини, зображуючи фотони у вигляді кульок. Фотон-кулька, яка летить, породжує другий фотон-кульку з переходом атома з верхнього рівня на нижній. Утворюються дві однакових кульки, що летять у попередньому напрямку, потім чотири кульки і т.д.

3 Щоб активне середовище перетворити у генератор світлових коливань, необхідно здійснити *зворотний зв'язок* (другий принцип, що використовується під час роботи лазера). Ідея реалізації зворотного зв'язку вперше була висловлена в 1957 р. А.М.Прохоровим і Н.Г.Басовим і незалежно від них Ч.Таунсом. Необхідно, щоб частина випроміненого світла увесь час перебувала в зоні активної речовини й викликала вимушене випромінювання все нових і нових атомів. Для цього активну речовину поміщають між двома паралельними дзеркалами. Припустимо, наприклад, що воно являє собою циліндр, а площини дзеркал S_1 і S_2 перпендикулярні до осі цього циліндра (рис. 97.1).

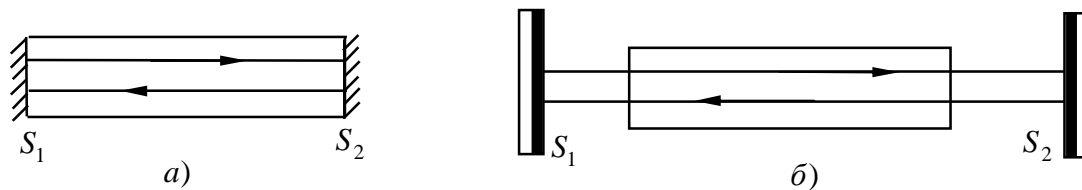


Рисунок 97.1

Тоді промінь світла, зазнаючи багаторазового відбиття від дзеркал S_1 і S_2 , буде проходити багато разів через активну речовину, підсилюючись при цьому в результаті вимушених переходів атомів з вищого енергетичного рівня E_2 на більш низький рівень E_1 .

Такий резонатор буде не тільки підсилювати світло, але також звужувати і монохроматизувати його. Для простоти припустимо спочатку, що дзеркала S_1 й S_2 ідеальні. Тоді промені, які паралельні осі циліндра, будуть проходити через активну речовину туди й назад необмежене число разів. Тоді промені, які поширюються похило, зрештою, потраплять на бічну стінку циліндра, де вони розсіються або вийдуть назовні. Зрозуміло, що максимально підсиляться промені, які поширюються паралельно осі циліндра. Цим і пояснюється колімація (зужування) променів.

Пояснимо тепер, як відбувається *монохроматизація світла*. Для простоти проведемо міркування стосовно до рис. 97.1а, коли роль дзеркал S_1 і S_2 виконують відполіровані й посріблені торці циліндра активної речовини, які перпендикулярні до його геометричної осі. Нехай L – довжина циліндра. Якщо $2L = m\lambda$, тобто на довжині L укладається ціле число m напівхвиль, то світлова хвиля, вийшовши від S_1 , після проходження через циліндр туди й назад повернеться до S_1 у тій самій фазі. Така хвиля підсилиться при другому й всіх наступних проходженнях через активну речовину в прямому й зворотному напрямках. Ця хвиля буде підсилюватися максимально.

У реальному лазері частина світла виводиться назовні. Для цього одне із дзеркал роблять напівпрозорим.

4 Рубіновий лазер. Створення лазера стало можливим після того, як були знайдені способи здійснення інверсної заселеності рівнів у деяких речовинах. Перший квантовий генератор світла був створений в 1961 р. Мейманом на рубіні. Рубін – це твердий кристал, основою якого є корунд, тобто кристал окису алюмінію (Al_2O_3), у якому невелика частина атомів алюмінію (близько 0,05%) заміщена іонами хрому Cr^{3+} . Іони хрому відіграють основну роль у роботі квантового генератора. Корунд – це діелектрик із широкою забороненою енергетичною зоною між валентною зоною й зоною провідності. Енергетичні рівні хрому в корунді лежать у цій забороненій зоні. Основним (незбудженим) рівнем є рівень E_1 (рис. 97.2). Він має складну структуру,

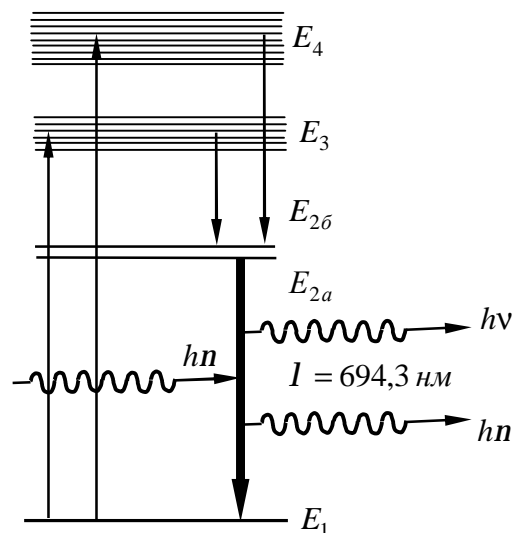


Рисунок 97.2

що, однак, не відіграє ролі в роботі квантового генератора. Вище лежать близькі збуджені рівні E_{2a} й E_{2b} . Це – поруч розміщені рівні. При переході з них на основний рівень E_1 випромінюється червоне світло з довжинами хвиль $\lambda=694,3$ і $692,9$ нм. Він й надає рубіну характерне рожеве або червоне фарбування (залежно від концентрації іонів хрому). Більш інтенсивна лінія $\lambda=694,3$ нм. Із цієї причини тільки вона й підсилюється при роботі лазера.

Друга лінія не відіграє ролі. Вище рівнів E_{2a} і E_{2b} розміщені дві порівняно широкі смуги енергій E_3 і E_4 .

Інверсна заселеність створюється між рівнями E_1 й E_2 . Для цього використовується так зване оптичне накачування, тобто освітлення кристала рубіна потужним спалахом світла. Рубіну надають форми циліндричного стрижня з діаметром 0,1-2 см і довжиною від 2 до 20 см і більше. Кінці стрижня ретельно відполіровані. Вони можуть бути дзеркалами. Тоді їх сріблять, як показано на рис. 97.1а. Дзеркала можуть бути й зовнішніми (рис. 97.1б), тоді сріблення не потрібно. Для висвітлення рубінового стрижня застосовують імпульсні ксенонові газорозрядні лампи, через які розряджаються батареї високовольтних конденсаторів (напруга 2-3 кВ). Тривалість спалаху порядку однієї мілісекунди.

Якщо б енергетичний спектр складався тільки із двох рівнів E_1 і E_2 , то за допомогою оптичного накачування створити інверсну заселеність було б неможливо. Дійсно, індуковані переходи атомів з нижнього рівня на верхній і назад ідуть із однаковими швидкостями. Тому лампа якнайбільше могла б лише зрівняти заселеності обох рівнів. Наявність же спонтанного випромінювання приводила б до збідніння (атомами) верхнього рівня в порівнянні з нижнім.

Положення змінюється завдяки наявності третього, широкого енергетичного рівня, що складається зі смуг E_3 і E_4 . Лампа переводить атоми хрому з незбудженого стану в збуджене, тобто в енергетичні смуги E_3 й E_4 . Значна ширина цих смуг має велике практичне значення. Лампа випромінює світло, близьке до білого. Якщо б рівні E_3 й E_4 були дуже вузькими, то лише незначна частина енергії лампи могла б бути використана на їх збудження. Завдяки ж значній ширині смуг E_3 і E_4 на їх збудження припадає 10–15% енергії випромінювання лампи. На рівнях E_3 і E_4 збуджені атоми хрому перебувають дуже короткий час ($\sim 10^{-8}$ с). За цей час вони переходять на один з рівнів E_2 . При такому переході атоми хрому не випромінюють, а витрачають свою енергію на збудження коливань кристалічної решітки. Можливість зворотного повернення атома зі смуг E_3 і E_4 на рівень E_1 хоча й існує, але ймовірність такого процесу дуже мала в порівнянні з імовірністю переходу на рівні E_2 . Рівні E_2 метастабільні. Час життя атома на них $\sim 10^{-3}$ с, що за атомними масштабами є дуже великим. Це дозволяє накопичувати атоми на рівнях E_2 . Якщо переводити атоми з рівня E_1 на рівні E_3 й E_4 досить швидко, то на рівень E_2 можна перевести більше половини атомів хрому. Тоді на рівнях E_2 виявиться більше атомів, ніж на рівні E_1 , тобто виникне інверсна заселеність.

На наступному етапі роботи лазера відбувається перехід з рівня E_2 на рівень E_1 . Цей перехід використовується для генерації світла в рубіновому лазері.

5 Випромінювання лазерів відрізняється рядом чудових особливостей. Для нього характерні: 1) велика монохроматичність ($\Delta\lambda \sim 0,01$ нм); 2) висока часова й просторова когерентність; 3) велика інтенсивність і 4) вузькоспрямованість пучка. Кутова ширина світлового пучка, який генерується лазером, настільки мала, що, використовуючи телескопічне фокусування, можна отримати на місячній поверхні пляму світла діаметром усього лише 3 км. Велика потужність і вузькоспрямованість пучка дозволяють при фокусуванні за допомогою лінзи отримати густину потоку енергії, яка в 1000 разів перевищує густину потоку енергії, що можна отримати фокусуванням сонячного світла.

Лазери мають численні застосування. Вони використовуються у техніці для зварювання, різання й плавлення металів; у медицині – як безкровні скальпелі, при лікуванні очних і наскірних хвороб. Лазерна локація дозволила виміряти швидкість обертання планет, уточнити характеристики руху Місяця й планети Венера. Лазери використовуються також у різних приладах для тонких фізичних досліджень.

ТЕМА 17 ЗОННА ТЕОРІЯ ТВЕРДИХ ТІЛ

§ 98 Енергетичні зони в кристалах. Зона провідності, заборонена зона, валентна зона. Метали, напівпровідники, діелектрики з точки зору зонної теорії [3]

1 Виявляється, що в кристалі спектр можливих значень енергії електронів розпадається на ряд дозволених і заборонених зон (рис. 98.1). У межах дозволених зон енергія змінюється квазінеперервно. Значення енергії, що належать забороненим зонам, не можуть реалізуватися. Це пов'язане з тим, що на електрони в кристалі діє періодичне поле кристалічної решітки.

Щоб зрозуміти походження зон, розглянемо уявний процес об'єднання атомів у кристал. Нехай спочатку є N ізольованих атомів якої-небудь речовини. Поки атоми ізольовані один від одного, вони мають схеми енергетичних рівнів, які повністю збігаються. Заповнення рівнів електронами здійснюється в кожному атомі незалежно від заповнення аналогічних рівнів в інших атомах. Коли електрони об'єднуються в одну квантову систему, то між ними виникає взаємодія. Відповідно до принципу Паулі в одній і тій самій квантовій системі не може бути двох електронів, які перебувають в одному і тому самому квантовому стані. Таким чином, зі зближенням атомів між ними виникає взаємодія, що посилюється і яка приводить до зміни положення рівнів. Замість одного однакового для всіх атомів рівня виникають N дуже близьких рівнів, які не збігаються. Таким чином, кожний рівень ізольованого атома розщеплюється в кристалі на N густо розміщених рівнів, які утворюють **зону**.

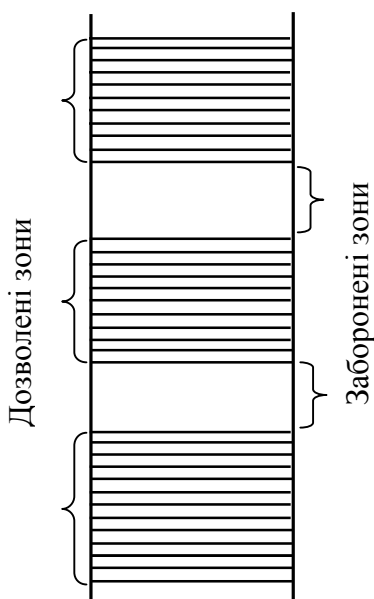


Рисунок 98.1 – Енергетичні зони в кристалі

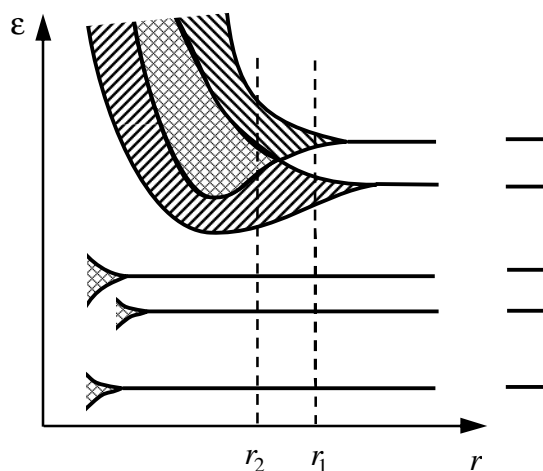


Рисунок 98.2 – Утворення енергетичних зон при зближенні атомів

Розщеплення різних рівнів не є однаковим. Сильніше всього збурюються рівні, заповнені в атомі зовнішніми електронами. Рівні, заповнені внутрішніми електронами, збурюються мало. На рис. 98.2 показане розщеплення рівнів як функції відстані r між атомами. Зі схеми бачимо, що виникає в кристалі розщеплення рівнів, які зайняті внутрішніми електронами, дуже мале. Помітно розщеплюються лише рівні, які зайняті валентними електронами. Таке саме розщеплення відбувається й з більш високими рівнями, які не зайняті електронами в основному стані атома.

Залежно від конкретних властивостей атомів рівноважна відстань між сусідніми атомами в кристалі може бути або типу r_1 , або типу r_2 (див. рис. 98.2). При відстані типу r_1 між дозволеними зонами, яка виникає із сусідніх рівнів атома, існує заборонена зона. При

відстані типу r_2 відбувається перекривання сусідніх зон. Число рівнів у такій об'єднаній зоні дорівнює сумі кількостей рівнів, на які розщеплюються обидва рівні атома.

Отже, спектр можливих значень енергії валентних електронів у кристалі розпадається на ряд **дозволених** і **заборонених зон**. Ширина зон не залежить від розмірів кристала. Вона залежить від кількості атомів у кристалі. Таким чином, чим більше атомів містить кристал, тим тісніше розміщуються рівні в зоні. Дозволені зони мають ширину порядку декількох електрон-вольт. Отже, якщо кристал містить 10^{23} атомів, відстань між сусідніми рівнями в зоні становить приблизно 10^{-23} еВ.

На кожному енергетичному рівні можуть знаходитися два електрони, які мають протилежно спрямовані спіни.

Існування енергетичних зон дозволяє пояснити з єдиної точки зору існування металів, напівпровідників і діелектриків.

Дозволену зону, яка виникла з того рівня, на якому знаходяться валентні електрони в основному стані атома, ми будемо називати **валентною зоною**. При абсолютному нулі валентні електрони заповнюють попарно нижні рівні валентної зони. Більш високі дозволені зони будуть вільними від електронів. Залежно від ступеня заповнення валентної зони й ширини забороненої зони можливі три випадки, які зображені на рис. 98.3. У випадку *a* електрони заповнюють валентну зону не повністю. Тому досить передати електронам, які знаходяться на верхніх рівнях, зовсім невелику енергію ($\sim 10^{-23} - 10^{-22}$ еВ) для того, щоб перевести їх на більш високі рівні. Енергія теплового руху (kT) становить при $1K$ величину порядку 10^{-4} еВ. Отже, при температурах, відмінних від абсолютного нуля, частина електронів переводиться на більш високі рівні. Додаткова енергія, яка викликана дією на електрон електричного поля, також виявляється достатньою для переведення електрона на більш високі рівні. Тому електрони можуть прискорюватися електричним полем і отримувати додаткову швидкість у напрямку, протилежному до напрямку поля. Таким чином, кристал з подібною схемою енергетичних рівнів буде являти собою метал.

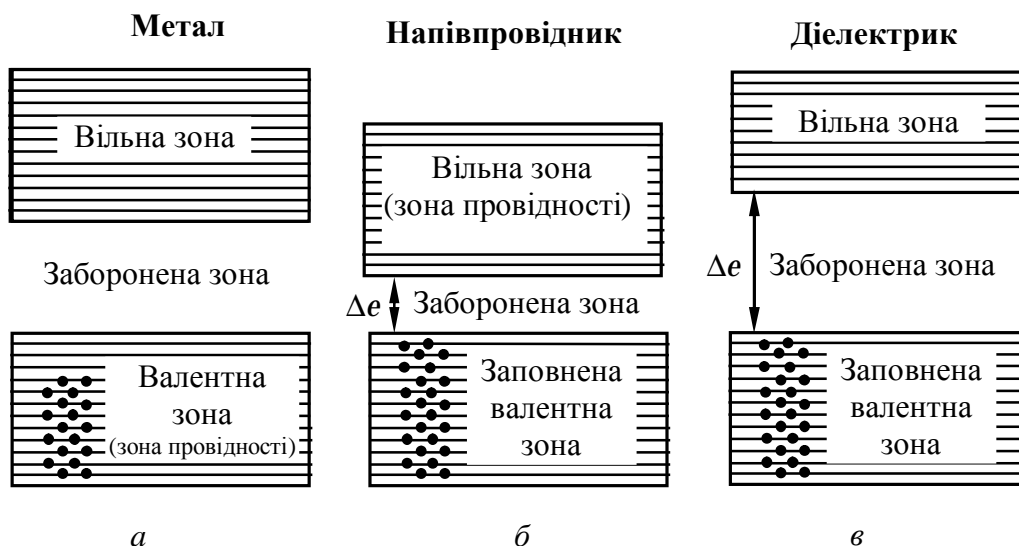


Рисунок 98.3 – Ширина забороненої зони визначає електричні властивості кристала

Часткове заповнення валентної зони (у випадку металу її називають також **зоною провідності**) спостерігається в тих випадках, коли на останньому зайнятому рівні в атомі знаходиться тільки один електрон або коли має місце перекривання зон (див. рис. 98.2, відстань r_2). У першому випадку N електронів провідності заповнюють попарно тільки половину рівнів валентної зони. У другому випадку число рівнів у зоні провідності буде

більше N , так що, навіть якщо кількість електронів провідності дорівнює $2N$, вони не зможуть зайняти всі рівні зони.

У випадках *б* і *в* (див. рис. 98.3) рівні валентної зони повністю зайняті електронами – зона заповнена. Для того щоб збільшити енергію електрона, необхідно передати йому кількість енергії, не менше, ніж ширина забороненої зони $\Delta\varepsilon$. Електричне поле (у всякому разі такої напруженості, при якій не відбувається електричний пробій кристала) передати електрону таку енергію не може. За цих умов електричні властивості кристала визначаються шириною забороненої зони $\Delta\varepsilon$. Якщо ця ширина невелика (порядку декількох десятих електрон-вольта), енергія теплового руху виявляється достатньою для того, щоб перевести частину електронів у верхню вільну зону. Ці електрони будуть знаходитися в умовах, аналогічних тим, у яких знаходяться валентні електрони в металі. Вільна зона виявиться для них **зоною провідності**. Одночасно стане можливим перехід електронів валентної зони на її верхні рівні, які звільнилися. Така речовина називається **власним напівпровідником**.

Якщо ширина забороненої зони $\Delta\varepsilon$ велика (порядку декількох електрон-вольт), тепловий рух не зможе перекинути у вільну зону помітне число електронів. У цьому випадку кристал є діелектриком.

§ 99 Напівпровідники. Власні, домішкові напівпровідники. Рух електронів та дірок. Рівень Фермі. Залежність провідності власних напівпровідників від температури [3]

1 Напівпровідниками є кристалічні речовини, у яких при $0^\circ K$ валентна зона повністю заповнена електронами, а ширина забороненої зони невелика. Напівпровідники зобов'язані своєю назвою тій обставині, що за електропровідністю вони займають проміжне положення між металами й діелектриками. Однак характерним для них є не значення провідності, а те, що їх провідність збільшується з підвищенням температури (нагадаємо, що в металах вона зменшується).

Розрізняють **власні** й **домішкові** напівпровідники. До числа власних належать хімічно чисті напівпровідники. Електричні властивості домішкових напівпровідників визначаються наявними в них домішками, що вводяться штучно.

2 При розгляді електричних властивостей напівпровідників велику роль відіграє поняття “**дірок**”. Зупинимося на з'ясуванні фізичного змісту цього поняття.

У власному напівпровіднику при абсолютному нулі всі рівні валентної зони повністю заповнені електронами, а в зоні провідності електрони відсутні (рис. 99.1*а*). Електричне поле не може перевести електрони з валентної зони в зону провідності. Тому власні

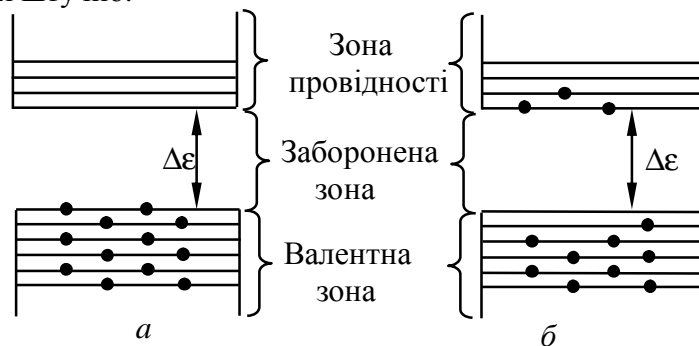


Рисунок 99.1 – Утворення вакантних рівнів у валентній зоні напівпровідника

напівпровідники поведуться при абсолютному нулі як діелектрики. При температурах, відмінних від $0^\circ K$, частина електронів з верхніх рівнів валентної зони переходить у результаті теплового збудження на нижні рівні зони провідності (рис. 99.1*б*). У цих умовах електричне поле отримує можливість змінювати стан електронів, що знаходяться у зоні провідності. Крім того, внаслідок утворення вакантних рівнів у валентній зоні електрони цієї зони також можуть змінювати свою швидкість під впливом зовнішнього поля. У результаті електропровідність напівпровідника стає відмінною від нуля й визначається процесами двох типів: рухом вільних електронів у зоні провідності й рухом валентних електронів (зв'язаних електронів із кристалічною решіткою) у валентній зоні.

Рух електронів різного типу має свої особливості. Щоб розрізнити ці два типи електронів, *рух валентних електронів ставлять у відповідність рух додатно заряджених квазічастинок із зарядом $+e$, які мають швидкість вакансії в кристалічній решітці. Ці квазічастинки отримали назву “дірок”, їх швидкість спрямована в протилежний бік відносно швидкості валентних електронів.* Електричний струм дірок дорівнює електричному струму валентних електронів. Про рух електронів, що відірвалися від кристалічної решітки (електронів у зоні провідності), говорять як про рух вільних електронів.

Підкреслимо, що рух дірки не є переміщенням якоїсь реальної додатно зарядженої частинки. Уявлення про дірки відображає характер руху валентних електронів у напівпровіднику.

4 Власна провідність напівпровідників. Власна провідність виникає в результаті переходу електронів з верхніх рівнів валентної зони у зону провідності. При цьому у зоні провідності з'являється деяке число носіїв струму – електронів, що займають енергетичні рівні поблизу дна зони; одночасно у валентній зоні звільняється таке саме число місць на верхніх рівнях, у результаті чого з'являються дірки.

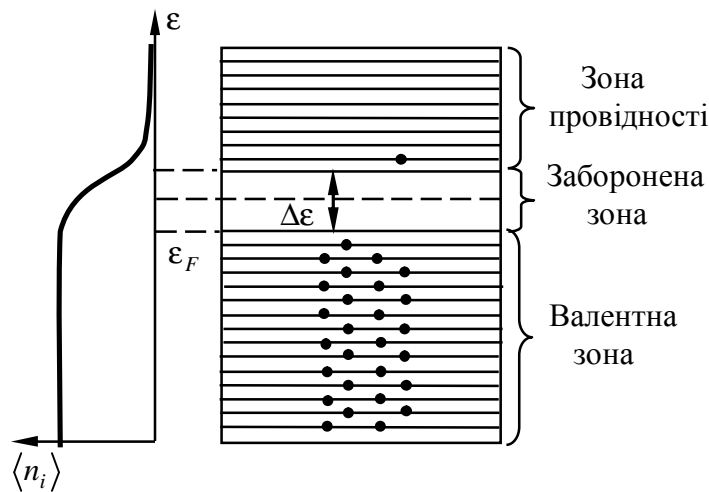


Рисунок 99.2 – Розподіл електронів по рівнях валентної зони й зони провідності у власному напівпровіднику

Розподіл електронів по енергетичних рівнях валентної зони й зони провідності описується не розподілом Больцмана, який використовується у класичній фізиці, а його аналогом у квантовій механіці – розподілом Фермі-Дірака, який є правильним для частинок з напівцілим спіном:

$$\langle n_i \rangle = \frac{2}{\exp[(\epsilon_i - \epsilon_F) / kT] + 1}. \quad (99.1)$$

Тут $\langle n_i \rangle$ – середнє значення числа електронів на i -му енергетичному рівні; ϵ_i – енергія i -го рівня; k – стала Больцмана; T – абсолютна температура; ϵ_F – параметр системи, який називається енергією Фермі. **Енергією Фермі називають таку енергію, імовірність знаходження частинки з якою дорівнює 0,5.** У формулі (99.1) також враховано, що на кожному енергетичному рівні можуть знаходитися два електрони, які відрізняються один від одного орієнтацією спіну.

Розподіл Фермі можна зробити наочним, зобразивши, як це зроблено на рис. 99.2, графік функції розподілу разом зі схемою енергетичних зон.

Відповідний розрахунок дає, що у власних напівпровідниках енергія Фермі, яка відрахована відносно верхнього краю валентної зони, дорівнює

$$\epsilon_F \approx \frac{1}{2} \Delta\epsilon, \quad (99.2)$$

де $\Delta\varepsilon$ – ширина забороненої зони. Це означає, що рівень Фермі лежить посередині забороненої зони (див. рис. 99.2). Отже, для електронів, які перейшли в зону провідності, величина $\varepsilon_i - \varepsilon_F$, що входить у формулу (99.1), мало відрізняється від половини ширини забороненої зони.

Рівні зони провідності лежать на “хвості” кривої розподілу (див. рис. 99.2). Тому середні числа заповнення для них малі в порівнянні з одиницею. У цьому випадку одиницею в знаменнику розподілу (99.1) можна знехтувати й вважати, що

$$\langle n_i \rangle \approx 2 \exp[-(\varepsilon_i - \varepsilon_F) / kT] \quad (99.3)$$

Поклавши в цій формулі $\varepsilon_i - \varepsilon_F \approx \Delta\varepsilon / 2$, отримаємо, що

$$\langle n_i \rangle \approx 2 \exp(-\Delta\varepsilon / 2kT). \quad (99.4)$$

Кількість електронів, які перейшли в зону провідності, а отже, і кількість дірок, які утворилися, будуть пропорційні виразу (99.4). Ці електрони й дірки є носіями електричного струму. Оскільки провідність пропорційна числу носіїв, вона також повинна бути пропорційна виразу (99.4). Тобто $\sigma = \sum_{\alpha=e,d} e_{\alpha} n_{\alpha} v_{\alpha}$, $n_e \sim \langle n_i \rangle$, $n_d \sim \langle n_i \rangle$. Отже $\sigma \sim \langle n_i \rangle$. Таким

чином, електропровідність власних напівпровідників швидко збільшується з температурою, змінюючись за законом

$$\sigma = \sigma_0 \exp(-\Delta\varepsilon / 2kT), \quad (99.5)$$

де $\Delta\varepsilon$ – ширина забороненої зони; σ_0 – величина, що змінюється з температурою набагато повільніше, ніж експонента, у зв'язку із чим її можна в першому наближенні вважати константою.

Якщо на графіку відкласти залежність $\ln \sigma$ від $1/T$, то для власних напівпровідників отримуємо пряму лінію, яка зображена на рис. 99.3. За нахилом цієї прямої можна визначити ширину забороненої зони $\Delta\varepsilon$.

5 Типовими напівпровідниками є елементи IV групи періодичної системи Менделєєва – германій і кремній. Вони утворюють решітку типу алмаза, у якій кожний атом зв'язаний ковалентними (парноелектронними) зв'язками із чотирма рівновіддаленими від нього сусідніми атомами. Умовно таке взаємне розміщення атомів можна подати у вигляді плоскої структури, яка зображена на рис. 99.4. Кружки зі знаком «+» позначають додатно заряджені атомні залишки (тобто ту частину атома, що залишається після видалення валентних електронів), кружки зі знаком «-» – електрони, подвійні лінії – ковалентні зв'язки.

При досить високій температурі тепловий рух може розірвати окремі пари, звільнивши один електрон. Покинута електроном місце перестає бути нейтральним, у його околі виникає надлишковий додатний заряд $+e$, тобто утвориться дірка (на рис. 99.4 вона зображена пунктирним кружком). На це місце може перескочити електрон однієї із сусідніх пар (валентний електрон). У результаті дірка починає також мандрувати по кристалу, як і електрон, що вивільнився (вільний електрон).

Під час зустрічі вільного електрона з діркою вони **рекомбінують** (з'єднуються). Це означає, що електрон нейтралізує надлишковий додатний заряд, який розміщений біля дірки, і втрачає можливість пересуватись доти, поки знову не отримає від кристалічної решітки енергію, достатню для свого вивільнення. Рекомбінація приводить до одночасного зникнення вільного електрона й дірки. На схемі рівнів (рис. 99.2) процесу рекомбінації відповідає перехід електрона із зони провідності на один з вільних рівнів валентної зони.

Отже, у власному напівпровіднику проходять одночасно два процеси: народження попарно вільних електронів і дірок та рекомбінація, що призводить до попарного зникнення електронів і дірок. Імовірність першого процесу швидко зростає з температурою. Імовірність рекомбінації пропорційна як числу вільних електронів, так і числу дірок. Отже, кожній температурі відповідає певна рівноважна концентрація електронів і дірок, яка змінюється з температурою пропорційно виразу (99.4).

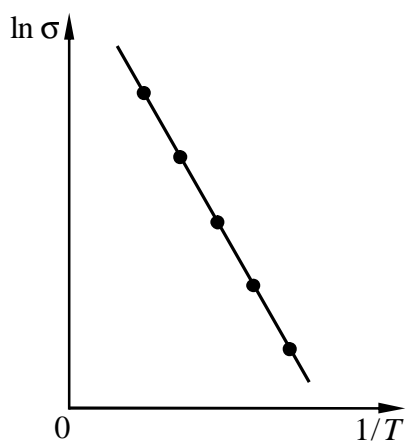


Рисунок 99.3 – Температурна залежність власної провідності напівпровідника

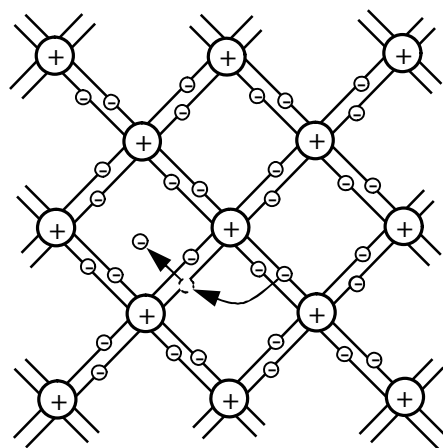


Рисунок 99.4 – Умовна схема кристала типу алмаза. Тут дірка зображена пунктирним кружком

Коли зовнішнє електричне поле відсутнє, електрони провідності й дірки рухаються хаотично. При увімкненні поля на хаотичний рух накладається впорядкований рух: електронів проти поля й дірок – у напрямку поля. Обидва рухи – і дірок, і електронів – приводять до перенесення заряду вздовж кристала. Отже, власна електропровідність обумовлюється ніби носіями заряду двох знаків – від’ємними електронами й додатними дірками.

Відзначимо, що при досить високій температурі власна провідність спостерігається в усіх без винятку напівпровідниках. Однак у напівпровідниках, які містять домішки, електропровідність складається із власної й домішкової провідності.

§ 100 Домішкова провідність напівпровідників. Донорні рівні, акцепторні рівні [3]

1 Домішкова провідність виникає, якщо деякі атоми напівпровідника замінити у вузлах кристалічної решітки атомами, валентність яких відрізняється на одиницю від валентності основних атомів. На рис. 100.1 умовно зображена решітка германію з домішкою п’ятивалентних атомів фосфору. Для утворення ковалентних зв’язків із сусідами атому фосфору достатньо чотирьох електронів. Отже, п’ятий валентний електрон виявляється, ніби зайвим, і легко від’єднується від атома за рахунок енергії теплового руху, створюючи вільний електрон.

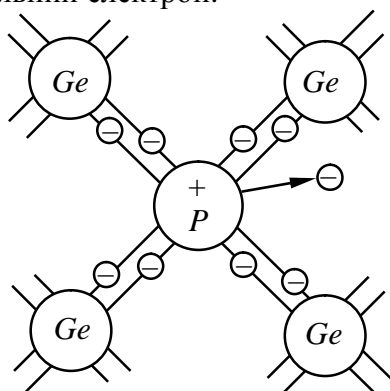


Рисунок 100.1 – Решітка германію з домішкою п’ятивалентних атомів фосфору

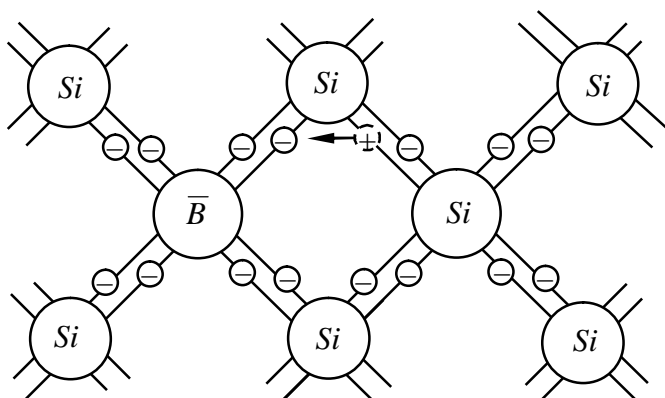


Рисунок 100.2 – Решітка кремнію з домішкою тривалентних атомів бору

У цьому випадку утворення вільного електрона не супроводжується розривом ковалентних зв’язків, тобто утворенням дірки. Хоча біля атома домішки виникає надлишковий додатний електричний заряд, але він пов’язаний із цим атомом і переміщатися

у решітці не може. Завдяки цьому заряду атом домішки може захопити електрон, що наблизився до нього, але зв'язок захопленого електрона з атомом буде неміцним й легко може бути зруйнованим знову за рахунок теплових коливань решітки.

Таким чином, у напівпровіднику з домішкою, валентність якої на одиницю більша валентності основних атомів, є тільки один вид носіїв струму – електрони. Тому говорять, що такий напівпровідник має електронну провідність, або є **напівпровідником *n*-типу** (від слова negative – від'ємний). Атоми домішки, що поставляють електрони провідності, називаються **донорними**.

2 Тепер розглянемо випадок, коли валентність домішки на одиницю менша валентності основних атомів. На рис. 100.2 умовно зображена решітка кремнію з домішкою тривалентних атомів бору. Тривалентних електронів атома бору недостатньо для утворення зв'язків з усіма чотирма сусідами. Тому один зі зв'язків виявиться неуплектованим й буде являти собою місце, здатне захопити електрон. При переході на це місце електрона однієї із сусідніх пар (ковалентного зв'язку) виникне дірка, що буде переміщуватися у кристалі. Поблизу атома домішки виникне надлишковий від'ємний заряд, але він буде пов'язаний з даним атомом і не може стати носієм струму.

Таким чином, у напівпровіднику з домішкою, валентність якої на одиницю менша валентності основних атомів, виникають носії струму тільки одного виду – дірки. Провідність у цьому випадку називається дірковою, а про **напівпровідник говорять, що він належить до *p*-типу** (від слова positive – додатний). Домішки, що викликають виникнення дірок, називаються **акцепторними**.

3 Домішки змінюють поле решітки, що приводить до виникнення на енергетичній схемі **домішкових рівнів**, розміщених у забороненій зоні кристала. У випадку напівпровідників *n*-типу домішкові рівні називаються **донорними** (рис. 100.3а), у випадку напівпровідників *p*-типу – **акцепторними** (рис. 100.3б).

Рівень Фермі в напівпровідниках *n*-типу розміщується у верхній половині забороненої зони, а в напівпровідниках *p*-типу – у нижній половині забороненої зони. При підвищенні температури рівень Фермі в напівпровідниках обох типів зміщуються до середини забороненої зони.

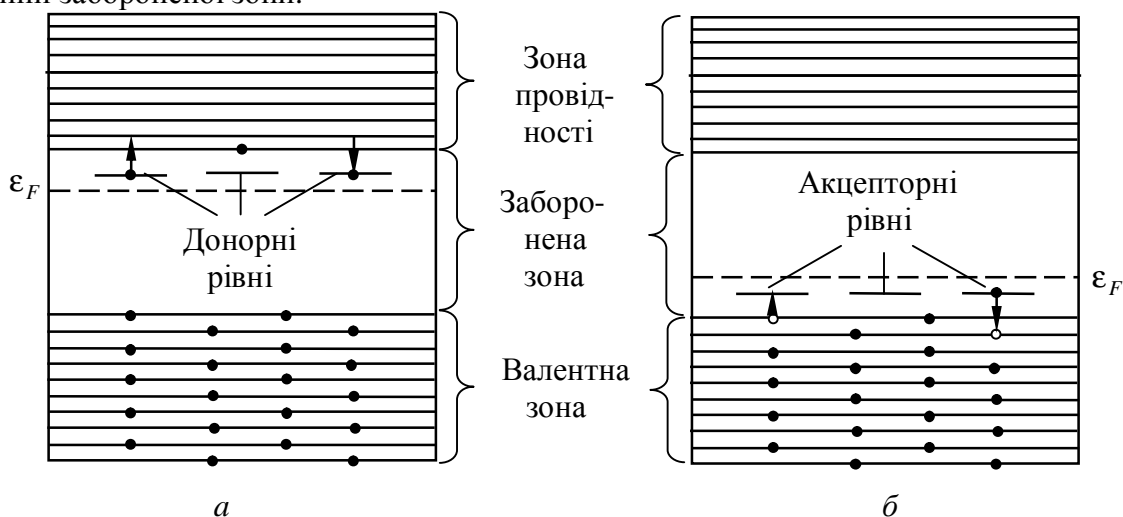


Рисунок 100.3 – Схема енергетичних рівнів напівпровідника *n*-типу (а) і *p*-типу (б)

Якщо донорні рівні розміщені недалеко від верхньої межі валентної зони, вони не можуть істотно вплинути на електричні властивості кристала. Інакше відбувається, коли відстань таких рівнів від дна зони провідності набагато менше ширини забороненої зони. У цьому випадку енергія теплового руху навіть при звичайних температурах виявляється достатньою для того, щоб перевести електрон з донорного рівня в зону провідності (див. рис. 100.3а). Цьому процесу відповідає відщеплення п'ятого валентного електрона від атома

домішки. Захопленню вільного електрона атомом домішки відповідає на рис. 100.3 перехід електрона із зони провідності на один з донорних рівнів.

Акцепторні рівні впливають на електричні властивості кристала в тому випадку, якщо вони розміщені недалеко від межі валентної зони (див. рис. 100.3б). Утворенню дірки відповідає перехід електрона з валентної зони на акцепторний рівень. Зворотний перехід відповідає розриву однієї із чотирьох ковалентних зв'язків атома домішки з його сусідами й рекомбінації електрона, що утворився при цьому, і дірки.

При підвищенні температури концентрація домішкових носіїв струму швидко досягає насичення. Це означає, що практично звільнюються всі донорні або заповнюються електронами всі акцепторні рівні. Разом з тим зі збільшенням температури все більшою мірою починає позначатися власна провідність напівпровідника, обумовлена переходом електронів безпосередньо з валентної зони в зону провідності. Таким чином, при високих температурах провідність напівпровідника буде складатися з домішкової й власної провідностей. При низьких температурах переважає домішкова, а при високих – власна провідність.

§ 101 Контакт електронного та діркового напівпровідників. Електричне поле $p-n$ -переходу. Потенціальний бар'єр $p-n$ -переходу. Вольт-амперна характеристика. Напівпровідниковий діод [3]

1 Контакт напівпровідників різного типу, який називається $p-n$ -переходом, лежить в основі пристроїв, які отримали назву транзисторів та напівпровідникових діодів. Цей перехід являє собою тонкий шар на межі між двома областями одного і того самого кристала, які відрізняються типом домішкової провідності. Для виготовлення такого переходу беруть, наприклад, монокристал із дуже чистого германію з електронним механізмом провідності (обумовленим незначними залишками домішок). У вирізану із кристала тонку пластинку вплавляють із одного боку шматочок індію. Під час цієї операції, що здійснюється у вакуумі або в атмосфері інертного газу, атоми індію дифундують у германій на деяку глибину. У тій області, в яку проникають атоми індію, провідність германію стає дірковою. На межі цієї області виникає $p-n$ -перехід. Існують й інші способи отримання $p-n$ -переходів.

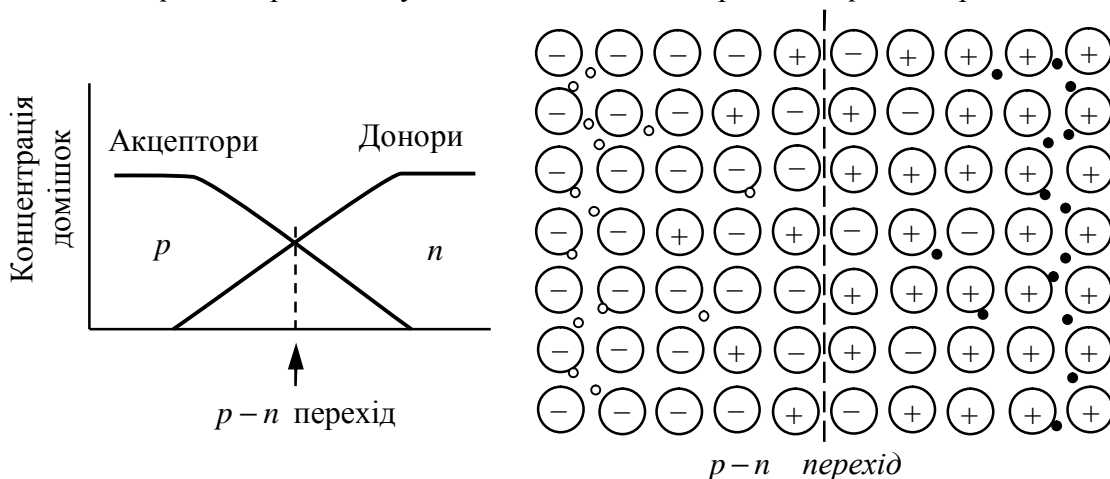


Рисунок 101.1 – Зміна концентрації акцепторних та донорних домішок в області $p-n$ -переходу

Рисунок 101.2 – Розподіл акцепторів і донорів біля $p-n$ -переходу. Більші кружки зі знаком плюс або мінус – іони, малі кружки – дірки, чорні точки – електрони

2 На рис. 101.1 показано хід концентрації домішок у напрямку, перпендикулярному до межі напівпровідників різного типу. В p -області основними носіями струму є дірки, що утворилися в результаті захоплення електронів атомами домішки; акцептори при цьому стають від'ємними іонами (рис. 101.2). Крім того, в p -області є невелике число неосновних носіїв – електронів, що виникають внаслідок переведення тепловим рухом електронів з

валентної зони безпосередньо в зону провідності (цей процес трохи збільшує й число дірок). У n -області основні носії струму – електрони, які передані донорами в зону провідності (донори при цьому перетворюються в додатні іони); перехід електронів, який відбувається за рахунок теплового руху, з валентної зони в зону провідності приводить до утворення невеликого числа дірок – неосновних носіїв для цієї області.

Дифундуючи у зустрічних напрямках через межовий шар, дірки й електрони рекомбінують один з одним. Тому $p-n$ -перехід стає сильно збідненим носіями струму й отримує великий опір. Одночасно на межі між областями виникає подвійний електричний шар, утворений від'ємними іонами акцепторної домішки, заряд яких тепер не компенсується дірками, і додатними іонами донорної домішки, заряд яких тепер не компенсується електронами (див. рис. 101.2). **Електричне поле** у цьому шарі спрямоване так, що протидіє подальшому переходу через шар основних носіїв. Рівновага досягається при такій напруженості електричного поля, коли перехід основних носіїв струму через $p-n$ перехід за рахунок дифузії припиняється.

З точки зору зонної теорії рівноважний стан на $p-n$ переході досягається при такій висоті потенціального бар'єра, при якій рівні Фермі обох областей розміщуються на однаковій висоті (рис. 101.3).

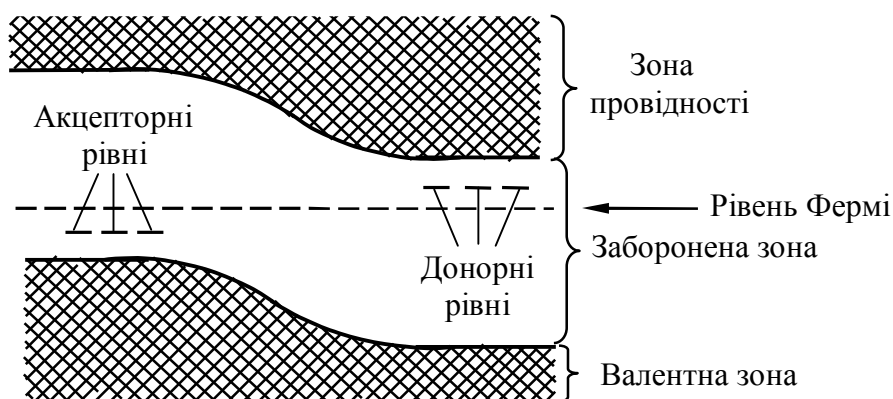


Рисунок 101.3 – Згинання енергетичних зон в області $p-n$ -переходу

Згинання енергетичних зон в області переходу викликане тим, що потенціал p -області в стані рівноваги нижчий, ніж потенціал n -області; відповідно потенціальна енергія електрона в p -області більша, ніж в n -області. Нижня межа валентної зони дає хід потенціальної енергії електрона в напрямку, перпендикулярному до переходу (див. рис. 101.3). Заряд дірок протилежний заряду електрона, тому їх потенціальна енергія більша там, де менше енергія електрона, і навпаки.

У стані рівноваги деякій кількості основних носіїв вдається перебороти потенціальний бар'єр, внаслідок чого через перехід проходить невеликий струм $I_{осн}$ (рис. 101.4a). Цей струм компенсується зустрічним струмом $I_{неосн}$, обумовленим неосновними носіями. Неосновних носіїв дуже мало, але вони легко проникають через межу областей, «скочуючись» з потенціального бар'єра. Величина $I_{неосн}$ визначається числом неосновних носіїв, що народжуються за одиницю часу, і від висоти потенціального бар'єра майже не залежить. Величина $I_{осн}$, навпроти, сильно залежить від висоти бар'єра. Рівновага встановлюється саме при такій висоті потенціального бар'єра, при якій обидва струми $I_{осн}$ й $I_{неосн}$ компенсують один одного.

4 Подамо на кристал зовнішню напругу такого напрямку, щоб плюс був під'єднаний до p -області, а мінус – до n -області (така напруга називається прямою). Це приведе до

зростання потенціалу p -області й зниженню потенціалу n -області. У результаті висота потенціального бар'єра зменшиться й струм $I_{осн}$ зросте. Струм же $I_{неосн}$ залишиться практично без змін (він, як відзначалося, від висоти бар'єра майже не залежить). Отже, результуючий електричний струм буде відмінним від нуля. Зниження потенціального бар'єра пропорційне прикладеній напрузі (вона дорівнює eU). При зменшенні висоти бар'єра струм основних носіїв, а отже, і результуючий струм швидко зростають. Таким чином, у напрямку від p -області до n -області $p-n$ -перехід пропускає струм, сила якого швидко зростає при збільшенні прикладеної напруги. Цей напрям називається *прямим* (або *пропускним*, або *прохідним*).

5 На рис. 101.4 наведена вольт-амперна характеристика $p-n$ -переходу. Виникаюче в кристалі при прямій напрузі електричне поле «підтискує» основні носії до межі між областями, внаслідок чого ширина перехідного шару, збідненого носіями, скорочується. Відповідно зменшується й опір переходу, причому тим сильніше, чим більша напруга. Тому вольт-амперна характеристика в пропускній області не є прямою (див. праву гілку кривої на рис. 101.45).

Тепер прикладемо до кристала напругу такого напрямку, щоб плюс був під'єднаний до n -області, а мінус – до p -області (така напруга називається зворотною). Це приведе до підвищення потенціального бар'єра й відповідного зменшення струму основних носіїв $I_{осн}$. Виникаючий при цьому результуючий струм (називаний зворотним) швидко досягає насичення (тобто перестає залежати від U) і дорівнює $I_{неосн}$. Таким чином, у напрямку від n -області до p -області (який називається зворотнім або запірним) $p-n$ -перехід пропускає слабкий струм, цілком обумовлений неосновними носіями. Лише при дуже великій зворотній напрузі сила струму починає різко зростати, що обумовлено електричним пробоем переходу (див. ліву гілку на рис. 101.4). Кожний $p-n$ -перехід характеризується своїм граничним значенням зворотної напруги, яку він здатний витримати без руйнування.

З рис. 101.4 випливає, що $p-n$ -перехід має у зворотному напрямку набагато більший опір, ніж у прямому. Це пояснюється тим, що поле, яке виникає у кристалі при накладенні зворотної напруги, «відтягає» основні носії від межі між областями, що приводить до зростання ширини перехідного шару, збідненого носіями. Відповідно збільшується й опір переходу.

Неоднаковість опору в прямому й зворотному напрямках дозволяє використовувати $p-n$ переходи для випрямлення змінного струму. На рис. 101.5 показаний графік струму, який проходить через перехід, коли прикладена напруга змінюється за гармонічним законом. У цьому випадку ширина шару, збідненого носіями, і опір переходу пульсують, змінюючись у такт зі змінами напруги.

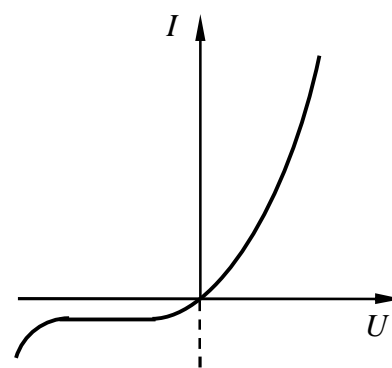


Рисунок 101.4 – Вольт-амперна характеристика $p-n$ -переходу

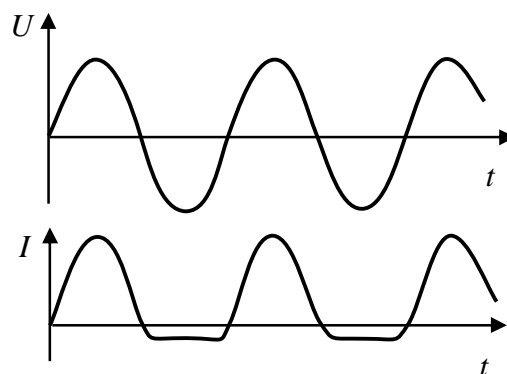


Рисунок 101.5 – Випрямлення змінного струму за допомогою $p-n$ -переходу

§ 102 Транзистор. База, емітер, колектор. Транзисторний підсилювач напруги [3]

1 Напівпровідниковий тріод, або *транзистор*, являє собою кристал із двома $p-n$ -переходами. Залежно від порядку, у якому чергуються області з різними типами

провідності, розрізняють $n-p-n$ - і $p-n-p$ -транзистори. Середня частина транзистора називається його **базою**. Прилягаючі до бази по обидва боки області з іншим, ніж у неї, типом провідності утворюють **емітер** та **колектор**.

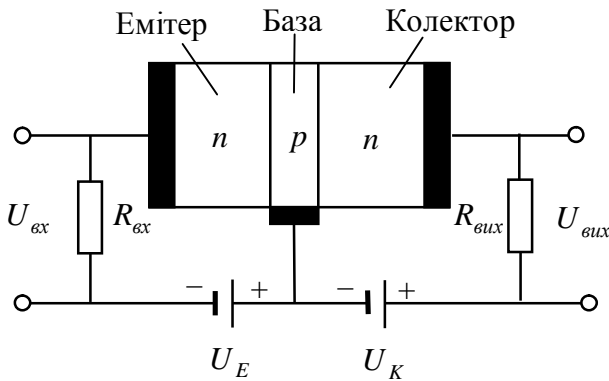


Рисунок 102.1

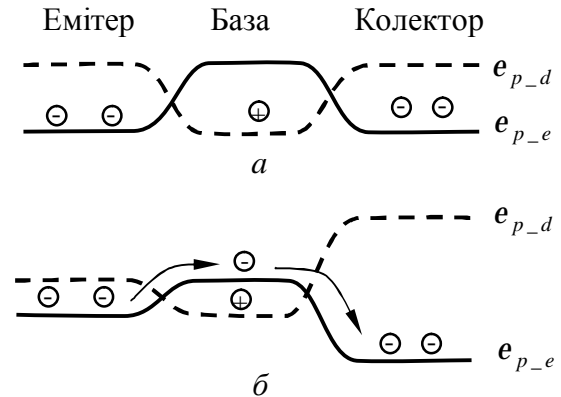


Рисунок 102.2

2 Розглянемо принцип роботи транзистора типу $n-p-n$. На рис. 102.1 показана схема **транзисторного підсилювача напруги** (можливі й інші схеми увімкнення транзистора). На перехід емітер-база подається постійна напруга U_E у прямому напрямку, а на перехід база-колектор – постійна напруга U_K у зворотному напрямку. Підсилювана змінна напруга $U_{вх}$ подається на невеликий вхідний опір $R_{вх}$. Підсилена напруга $U_{вих}$ знімається з вихідного опору $R_{вих}$. При зазначених на схемі знаках напруг опір переходу емітер – база невеликий, опір же переходу база – колектор, навпроти, дуже великий. Це дозволяє взяти як $R_{вих}$ опір великої величини.

На рис. 102.2а показаний хід потенціальної енергії електронів (суцільна крива) і дірок (пунктирна крива) у випадку, що коли напруги й вхідний сигнал відсутні. Під'єднання прямої напруги U_E знижує потенціальний бар'єр на першому переході, а під'єднання зворотної напруги U_K підвищує потенціальний бар'єр на другому переході (рис. 102.2б). Проходження струму в колі емітера супроводжується проникненням електронів в область бази. Електрони, які проникли в базу, дифундують у напрямку колектора. Якщо товщина бази невелика майже всі електрони, не встигають рекомбінувати, «скочуються» з потенціальної гірки, яка знаходиться на межі база – колектор, і надходять у коло колектора.

Обумовлена вхідною напругою зміна струму I_E в колі емітера приводить до зміни кількості електронів, які проникають у колектор, і, отже, до майже такої самої зміни струму I_K в колі колектора. Припустимо, що $I_K \approx I_E$. Виразивши ці струми через відповідні напруги й опори, отримаємо, що $U_{вх} / R_{вх} \approx U_{вих} / R_{вих}$. Звідси

$$U_{вих} : R_{вх} \approx U_{вих} : R_{вх}.$$

Оскільки $R_{вих} \gg R_{вх}$, напруга $U_{вих}$ значно перевершує вхідну напругу $U_{вх}$. Таким чином, транзистор підсилює напругу й потужність. Підвищена потужність з'являється за рахунок джерела струму, увімкнутого в коло колектора.

РОЗДІЛ 6 ЕЛЕМЕНТИ ФІЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА Й ЕЛЕМЕНТАРНИХ ЧАСТИНОК

ТЕМА 18 АТОМНЕ ЯДРО І ЕЛЕМЕНТАРНІ ЧАСТИНКИ

§ 103 Склад і характеристика атомного ядра. Ізотопи, ізобари, ізотони, ізомери [6]

1 Склад атомного ядра. У 1911 р. Резерфордом у результаті проведення дослідів з розсіювання α -частинок була запропонована *ядерна модель атома*. З цього часу почався відлік ядерної фізики. На той час були відомими лише дві елементарні частинки – *електрон і протон*. Тому і була висунута гіпотеза про те, що ядро складається з електронів і протонів. Однак така гіпотеза виявилася суперечливою, вона не узгоджувалася з експериментальними фактами.

Через 21 рік у 1932 р. англійським фізиком Дж. Чедвіком був відкритий *нейтрон* (елементарна частинка із зарядом, що дорівнює нулю, маса нейтрона приблизно дорівнює масі протона). У цьому самому році український фізик Дм. Іваненко вперше висловив ідею про те, що *ядра атомів складаються із протонів і нейтронів*. Частинки, що входять до складу атомного ядра: протон і нейтрон, – отримали назву *нуклонів*.

Розглянемо основні характеристики нуклонів.

Протон (p). Заряд протона дорівнює елементарному заряду $+e$, його маса

$$m_p = 938,28 \text{ MeV.} \quad (103.1)$$

Для порівняння зазначимо, що маса електрона

$$m_e = 0,511 \text{ MeV.} \quad (103.2)$$

Із порівняння (103.1) і (103.2) випливає, що $m_p = 1836 m_e$.

Протон має спін, що дорівнює $1/2$ ($s = 1/2$), і власний магнітний момент

$$\mu_p = +2,79\mu_y, \quad (103.3)$$

де

$$\mu_y = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5,05 \cdot 10^{-27} \text{ Дж/Тл} \quad (103.4)$$

– одиниця магнітного моменту, яка називається *ядерним магнетоном*. Порівнюючи ядерний магнетон μ_y з магнетоном Бора $\mu_B = e\hbar/(2m_e)$, можна зробити висновок, що μ_y у 1836 разів менше μ_B . Отже, власний магнітний момент протона приблизно у 660 разів менший, ніж власний магнітний момент електрона.

Нейтрон (n). Електричний заряд нейтрона дорівнює нулю, а маса

$$m_n = 939,57 \text{ MeV} \quad (103.5)$$

дуже близька до маси протона. Різниця мас нейтрона й протона $m_n - m_p$ становить 1,3 MeV, тобто $2,5 m_e$. Нейтрон має спін, що дорівнює $1/2$ ($s = 1/2$), і, незважаючи на відсутність електричного заряду, власний магнітний момент

$$\mu_n = -1,91\mu_y. \quad (103.6)$$

Знак мінус свідчить про те, що напрями власних механічного й магнітного моментів протилежні. Це досить дивний факт: незаряджена частинка має магнітний момент.

У вільному стані нейтрон нестабільний (радіоактивний) – він самочинно розпадається, перетворюючись у протон і випромінює електрон (e^-) і ще одну частинку, яку називають

антинейтрино ($\bar{\nu}_e$). Період напіврозпаду (тобто час, за який розпадається половина вихідної кількості нейтронів) дорівнює приблизно 12 хв. Схему розпаду можна написати так:



2 Характеристики атомного ядра. Однією з найважливіших характеристик атомного ядра є **зарядове число** Z . Воно дорівнює кількості протонів, що входять до складу ядра, і визначає його заряд, що дорівнює $+Ze$. Ми вже відзначали, що Z також визначає порядковий номер хімічного елемента в періодичній таблиці Менделєєва. Тому його також називають атомним номером ядра.

Число нуклонів (тобто сумарне число протонів і нейтронів) у ядрі позначається буквою A й називається **масовим числом ядра**. Число нейтронів у ядрі дорівнює $N = A - Z$.

Для позначення ядер застосовується символ



де під X мається на увазі хімічний символ даного елемента. Ліворуч угорі ставиться масове число, ліворуч унизу – атомний номер (останній значок часто опускають).

Ядра з однаковим Z , але різними A називаються **ізотопами**. Більшість хімічних елементів має декілька ізоотопів. Так, наприклад, у водню є три ізоотопи:

1_1H – звичайний водень, або протій ($Z = 1, N = 0$),

2_1H – важкий водень, або дейтерій ($Z = 1, N = 1$),

3_1H – тритій ($Z = 1, N = 2$).

Дейтерій позначають також символом D , а тритій – символом T . Протій і дейтерій стабільні, тритій є радіоактивним.

Ядра з однаковим масовим числом A називають **ізобарами**. Як приклад ізобар можна навести ${}^{40}_{18}Ar$ й ${}^{40}_{20}Ca$.

Ядра з однаковим числом нейтронів $N = A - Z$ називають **ізотонами** (${}^{13}_6C, {}^{14}_7N$).

Нарешті, існують радіоактивні ядра з однаковими Z й A , що відрізняються періодом напіврозпаду. Вони називаються **ізомерами**. Наприклад, є два ізомери ядра ${}^{80}_{35}Br$, в одного з них період напіврозпаду дорівнює 18 хв, в іншого – 4,4 години.

У природі трапляються елементи з атомним номером Z від 1 до 92, крім технецію ($Tc, Z = 43$) і прометію ($Pm, Z = 61$). Плутоній ($Pu, Z = 94$) після одержання його штучним шляхом був виявлений у незначних кількостях у природному мінералі – смолянній обманці. Інші трансуранові елементи (з Z від 93 до 107) були отримані штучним шляхом за допомогою різних ядерних реакцій.

3 Розміри ядер. У першому наближенні ядро можна вважати кулею, радіус якої досить точно визначається формулою

$$r = 1,3 \cdot 10^{-15} A^{1/3} \text{ м}. \quad (103.8)$$

З (103.8) випливає, що об'єм ядра є пропорційним числу нуклонів у ядрі. Таким чином, густина речовини у всіх ядрах приблизно однакова.

4 Спін ядра. Спіни нуклонів складаються у результуючий спін ядра. Спін нуклона дорівнює $1/2$. Тому квантове число спіну ядра буде напівцілим при непарному числі нуклонів A і цілим або нулем при парному A . Спіни ядер не перевищують декількох одиниць. Це свідчить про те, що спіни більшості нуклонів у ядрі взаємно компенсують один одного, розташовуючись антипаралельно. У всіх парнопарних ядер (тобто ядер з парним числом протонів і парним числом нейтронів) спін дорівнює нулю.

§ 104 Дефект маси й енергія зв'язку ядра. Залежність питомої енергії зв'язку ядра від масового числа [6]

1 Маса ядра $m_{\text{я}}$ менша від суми мас частинок, які входять у його склад. Цей факт відображає та обставина, що для того щоб розщепити ядро на протони й нейтрони, з яких це ядро складається, необхідно витратити деяку енергію. Цю енергію називають енергією зв'язку ядра.

Енергія зв'язку ядра чисельно дорівнює роботі, яку необхідно витратити, щоб розщепити ядро на нуклони, з яких це ядро складається (кінетична енергія нуклонів при цьому повинна дорівнювати нулю).

Енергія спокою частинки пов'язана з її масою відомим зі спеціальної теорії відносності співвідношенням

$$E_0 = mc^2.$$

Отже, енергія ядра, яке перебуває у стані спокою, менша сумарної енергії невзаємодіючих нуклонів, які перебувають у стані спокою, на величину

$$E_{\text{зв}} = c^2 \left[(Zm_p + (A - Z)m_n) - m_{\text{я}} \right]. \quad (104.1)$$

Ця величина і є енергією зв'язку нуклонів у ядрі.

Рівність (104.1) практично не зміниться, коли замінити масу протона m_p масою атома водню m_H , а масу ядра $m_{\text{я}}$ – масою атома m_a . Дійсно, якщо знехтувати порівняно незначною енергією зв'язку електронів з ядрами, зазначена заміна буде означати додавання до зменшеного й від'ємника однакової величини, що дорівнює Zm_e . Таким чином, формулі (104.1) можна надати вигляду

$$E_{\text{зв}} = c^2 \left[(Zm_H + (A - Z)m_n) - m_a \right]. \quad (104.2)$$

Ця формула є більш зручною, ніж (104.1), тому що в таблицях, як правило, подають не маси ядер, а маси атомів.

Енергія зв'язку, що припадає на один нуклон, тобто $E_{\text{зв}} / A$, називається *питомою енергією зв'язку нуклонів у ядрі*.

Величина

$$\Delta m = \left[(Zm_p + (A - Z)m_n) - m_{\text{я}} \right] \quad (104.3)$$

називається **дефектом маси ядра**. Дефект маси пов'язаний з енергією зв'язку співвідношенням

$$E_{\text{зв}} = \Delta mc^2.$$

Зрозуміло, що енергія зв'язку ядра є мірою його міцності. Чим вища енергія зв'язку ядра, тим більш міцним є ядро.

2 Розглянемо залежність питомої енергії зв'язку $E_{\text{зв}} / A$ від масового числа A (див. рис. 104.1). Бачимо, що найбільш сильно зв'язані нуклони в ядрах, масові числа яких мають порядок 50–60 (тобто для елементів від Cr до Zn). Енергія зв'язку для цих ядер досягає 8,7 МеВ/нуклон. Зі збільшенням A питома енергія зв'язку поступово зменшується; для найважчого природного елемента – урану – вона становить 7,5 МеВ/нуклон. Завдяки такій залежності питомої енергії зв'язку від масового числа стають **енергетично можливими такі два процеси:**

- 1) поділ важких ядер на більш легкі ядра;
- 2) злиття (синтез) легких ядер в одне ядро.

Обидва процеси повинні супроводжуватися виділенням великої кількості енергії. Так, наприклад, поділ одного ядра з масовим числом $A = 240$ (питома енергія зв'язку дорівнює 7,5 МеВ) на два ядра з масовими числами $A = 120$ (питома енергія зв'язку дорівнює 8,5 МеВ)

привело б до вивільнення енергії в 240 MeV. Злиття двох ядер важкого водню ${}^2_1\text{H}$ в ядро гелію ${}^4_2\text{H}$ привело б до виділення енергії, що дорівнює 24 MeV. Для порівняння зазначимо, що при з'єднанні одного атома вуглецю із двома атомами кисню (згоряння вугілля до CO_2) виділяється енергія, що дорівнює ~ 5 eV.

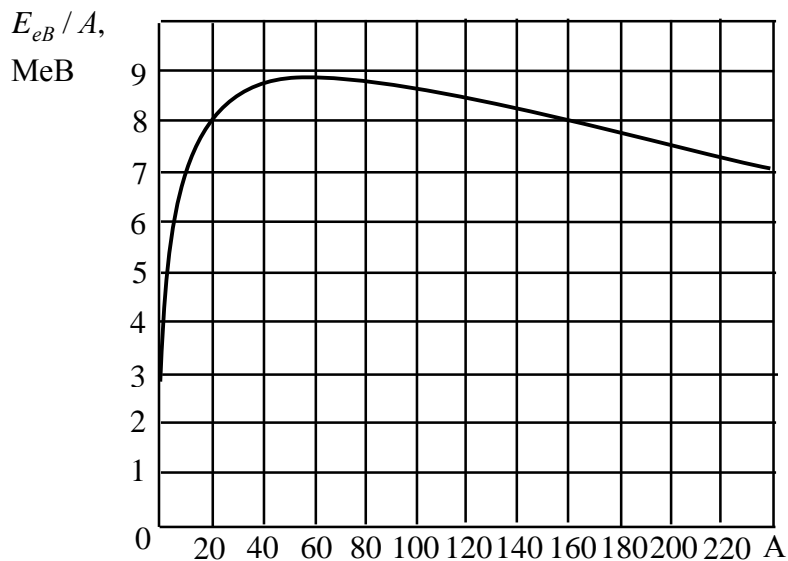


Рисунок 104.1 – Залежність енергії зв'язку, що припадає на один нуклон, від масового числа

Ядра зі значеннями масового числа A від 50 до 60 є енергетично найбільш вигідними. У зв'язку із цим виникає питання: чому ядра з іншими значеннями A виявляються стабільними? Відповідь полягає у такому. Для того щоб розділитися на кілька частин, важке ядро повинне пройти через ряд проміжних станів, енергія яких перевищує енергію основного стану ядра. Отже, для процесу поділу ядру потрібна додаткова енергія (енергія активації), що потім повертається назад, приплюсовуючись до енергії, яка виділяється при поділі за рахунок зміни енергії зв'язку. У звичайних умовах ядро не має можливості отримати енергію активації, внаслідок чого важкі ядра не перетерплюють спонтанний поділ. Енергія активації може бути передана важкому ядру захопленим ним додатковим нейтроном. Процес поділу ядер урану або плутонію під дією захоплених ядрами нейтронів лежить в основі дії ядерних реакторів і звичайної атомної бомби.

Для злиття легких ядер в одне ядро вони повинні підійти один до одного на дуже малу відстань ($\sim 10^{-15}$ м). Такому зближенню ядер перешкоджає кулонівське відштовхування між ними. Для того щоб перебороти це відштовхування, ядра повинні рухатися з величезними швидкостями, які відповідають температурам порядку кількох сотень мільйонів кельвін. Із цієї причини процес синтезу легких ядер називається **термоядерною реакцією**. Термоядерні реакції проходять у надрах Сонця й зірок. У земних умовах поки що були здійснені некеровані термоядерні реакції при вибухах водневих бомб. Учені ряду країн наполегливо працюють над пошуком способів здійснення керованого термоядерного синтезу.

§ 105 Краплинна й оболонкова моделі ядра [6]

При спробах побудови теорії ядра наштовхуються на такі труднощі: 1) недостатність знань про сили, що діють між нуклонами; 2) величезну громіздкість квантової задачі багатьох тіл (ядро з масовим числом A є системою з A тіл). Ці труднощі змушують іти шляхом створення ядерних моделей, які дозволяють описувати за допомогою порівняно простих математичних засобів певну сукупність властивостей ядра. Жодна з подібних моделей не може дати вичерпного опису ядра. Тому доводиться користуватися декількома

моделями, кожна з яких описує свою сукупність властивостей ядра й своє коло явищ. У кожній моделі містяться довільні параметри, значення яких підбираються так, щоб отримати узгодженість з експериментом.

Обмежимося коротким викладенням лише двох моделей: краплинної й оболонкової.

1 Краплинна модель. Ця модель була запропонована Я.І.Френкелем в 1939 р. і розвинена потім Н.Бором та іншими вченими. Френкель звернув увагу на подібність атомного ядра із крапелькою рідини, яка полягає у тому, що в обох випадках сили, які діють між складовими частинками – молекулами в рідині й нуклонами в ядрі, – є короткодійними. Крім того, практично однакова густина речовини в різних ядрах говорить про вкрай малу стисливість ядерної речовини. Настільки ж мала стисливість і в рідинах. Зазначена подібність дала підставу вважати ядро подібним до зарядженої крапельці рідини.

Краплинна модель дозволила вивести напівемпіричну формулу для енергії зв'язку частинок у ядрі. Крім того, ця модель допомогла пояснити багато інших явищ, зокрема процес поділу важких ядер.

2 Оболонкова модель. Оболонкова модель ядра була розвинена Марією Гепперт-Майер й іншими вченими. У цій моделі нуклони вважаються такими, що рухаються незалежно один від одного в усередненому центрально-симетричному полі. У відповідності до такого руху виникають дискретні енергетичні рівні (подібні до рівнів атома), які заповнюються нуклонами з урахуванням принципу Паулі (нагадаємо, що спин нуклонів дорівнює 1/2). Ці рівні групуються в оболонки, у кожній з яких може знаходитися певне число нуклонів. Повністю заповнена оболонка утворює особливо стійке утворення.

Відповідно до досліду особливо стійкими виявляються ядра, у яких число протонів, або число нейтронів (або обоє ці числа) дорівнює

$$2, 8, 20, 28, 50, 82, 126.$$

Ці числа отримали назву магічних. Ядра, у яких число протонів Z або число нейтронів N є магічним (тобто особливо стійкі ядра), також називаються магічними.

§ 106 Ядерні сили [6]

1 Величезна енергія зв'язку нуклонів у ядрі свідчить про те, що між нуклонами існує дуже інтенсивна взаємодія, яка має характер притягання. Ця взаємодія втримує нуклони на відстанях порядку 10^{-15} м один від одного, незважаючи на потужне кулонівське відштовхування між протонами. Ядерна взаємодія між нуклонами отримала назву **сильної взаємодії**. Її можна описати за допомогою **поля ядерних сил**. Перелічимо **характерні властивості ядерних сил**.

1 Ядерні сили є **короткодійними**. Їх радіус дії має порядок 10^{-15} м. На відстанях, істотно менших за 10^{-15} м, притягання нуклонів змінюється відштовхуванням.

2 Сильна взаємодія не залежить від заряду нуклонів. Ядерні сили, що діють між двома протонами, протоном і нейтроном і двома нейтронами, мають однакову величину. Ця властивість називається **зарядовою незалежністю ядерних сил**.

3 Ядерні сили залежать від **взаємної орієнтації спінів нуклонів**. Так, наприклад, нейтрон і протон утримуються разом, утворюючи ядро важкого водню дейтрон, тільки у тому випадку, коли їх спіни паралельні один одному.

4 Ядерні сили не є **центральними**. Їх не можна представляти спрямованими уздовж прямої, що з'єднує центри взаємодіючих нуклонів. Нецентральність ядерних сил впливає, зокрема, з того факту, що вони залежать від орієнтації спінів нуклонів.

5 Ядерні сили мають **властивість насичення** (це означає, що кожний нуклон у ядрі взаємодіє з обмеженим числом нуклонів). Насичення проявляється у тому, що питома енергія зв'язку нуклонів у ядрі при збільшенні числа нуклонів не зростає, а залишається приблизно сталою. Крім того, про насичення ядерних сил свідчить також пропорційність об'єму ядра числа нуклонів, що утворюють його.

За сучасними уявленнями сильна взаємодія обумовлена тим, що нуклони віртуально обмінюються частинками, що отримали назву мезонів.

§ 107 Закон радіоактивного розпаду. Середній час життя, період напіврозпаду, активність радіоактивної речовини. Види радіоактивного розпаду [6]

1 Радіоактивністю (радіоактивним розпадом) називається самочинне перетворення одних ядер атомів в інші, яке супроводжується випромінюванням елементарних частинок.

Радіоактивність, яка спостерігається в існуючих у природних умовах ядрах, називається **природною**. Радіоактивність ядер, отриманих за допомогою ядерних реакцій, називається **штучною**. Між штучною й природною радіоактивністю немає принципової різниці. Процес радіоактивного перетворення в обох випадках описується однаковими законами.

2 Закон радіоактивного розпаду. Окремі ядра під час радіоактивного перетворення розпадаються незалежно один від одного. Тому можна вважати, що кількість ядер dN , яка розпадається за малий проміжок часу dt , є пропорційною як числу ядер N , так і проміжку часу dt (це є результат експерименту):

$$dN = -\lambda N dt . \quad (107.1)$$

Тут λ – характерна для радіоактивної речовини стала, яка називається **сталю розпаду**. Знак мінус узятий для того, щоб можна було розглядати dN як збільшення числа ядер N , які не розпалися.

Інтегрування виразу (107.1) приводить до співвідношення

$$N = N_0 \exp(-\lambda t) , \quad (107.2)$$

де N_0 – кількість ядер у початковий момент; N – кількість атомів, що не розпалися, у момент часу t . **Формула (107.2) виражає закон радіоактивного розпаду.** Цей закон досить простий: число ядер, які не розпалися, зменшується експоненціально.

Кількість ядер, що розпалися за час t , визначається виразом

$$N_0 - N = N_0 [1 - \exp(-\lambda t)] . \quad (107.3)$$

Час, за який розпадається половина початкової кількості ядер, називається **періодом напіврозпаду** T . Цей час легко визначити з умови

$$N_0 / 2 = N_0 \exp(-\lambda T) ,$$

звідки

$$T = \ln 2 / \lambda = 0,693 / \lambda . \quad (107.4)$$

Період напіврозпаду для відомих на цей час радіоактивних ядер знаходиться у межах від $3 \cdot 10^{-7}$ с до $5 \cdot 10^{15}$ років.

3 Знайдемо середній час життя радіоактивного ядра. Кількість ядер, які розпадаються за проміжок часу від t до $t + dt$, визначається модулем виразу (107.1): $|dN(t)| = \lambda N(t) dt$. Час життя кожного із цих ядер дорівнює t . Отже, суму часу життя всіх ядер N_0 отримуємо шляхом інтегрування виразу $t |dN(t)|$. Розділивши цю суму на вихідне число ядер N_0 , отримуємо **середній час життя** τ радіоактивного ядра:

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t |dN(t)| dt = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \lambda N(t) dt .$$

Підставимо сюди вирази (107.2) для $N(t)$ і отримаємо

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \lambda N_0 \exp(-\lambda t) dt = \int_0^{\infty} t \lambda \exp(-\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda}$$

(тут перейшли до змінної $x = \lambda t$ й виконали інтегрування частинами). Таким чином, *середній час життя є величина, яка зворотна сталій розпаду λ* :

$$\boxed{\tau = 1/\lambda} \quad (107.5)$$

Порівняння з (107.4) показує, що період напіврозпаду T відрізняється від τ числовим множником, що дорівнює $\ln 2$.

4 Активністю радіоактивного препарату називається число розпадів, що відбуваються в препараті за одиницю часу. Якщо за час dt розпадається $dN_{\text{розп}}$ ядер, то активність дорівнює $dN_{\text{розп}}/dt$. Згідно з (107.1)

$$dN_{\text{розп}} = |dN| = \lambda N dt.$$

Звідси випливає, що *активність радіоактивного препарату дорівнює*

$$\boxed{A = dN_{\text{розп}} / dt = \lambda N dt / dt = \lambda N},$$

тобто добутку сталої розпаду на кількість у препараті ядер, які не розпалися.

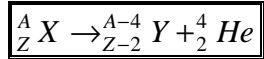
У системі СІ одиницею активності є беккерель (Бк), що дорівнює одному розпаду за 1 секунду. Допускається застосування внесистемних одиниць разп/хв і кюрі (Ки). Одиниця активності, яка називається кюрі, визначається як активність такого препарату, у якому відбувається $3,700 \cdot 10^{10}$ актів розпаду за 1 секунду. Використовують дробові одиниці (мілікюрі, мікрокюрі й т.д.), а також кратні одиниці (кілокюрі, мегакюрі).

5 Часто буває, що ядра, які виникають у результаті радіоактивного перетворення, у свою чергу виявляються радіоактивними й розпадаються зі швидкістю, яка характеризується сталою розпаду λ' . Нові продукти розпаду також можуть виявитися радіоактивними і т.д. У результаті виникає цілий ряд радіоактивних перетворень. У природі існує *три радіоактивних ряди (або сімейства)*, родоначальниками яких є ^{238}U (ряд урану), ^{232}Th (ряд торію) і ^{235}U (ряд актиноурану). Кінцевими продуктами у всіх трьох випадках є ізотопи свинцю – у першому випадку ^{206}Pb , у другому – ^{208}Pb й, нарешті, у третьому – ^{207}Pb .

Природна радіоактивність була відкрита в 1896 р. Беккерелем. Великий внесок у вивчення радіоактивних речовин зробили П'єр Кюрі й Склодовська-Кюрі. Ними було виявлено три з п'яти *видів радіоактивного розпаду*. В одному з них, який отримав назву α -розпад, випромінюються α -частинки, які відхиляються під дією магнітного поля у таку саму сторону, куди відхилився б потік додатно заряджених частинок. У другому розпаді, який отримав назву β -розпад, випромінюються β -частинки, які відхиляються магнітним полем у протилежний бік, тобто так, як відхилився б потік від'ємно заряджених частинок. У третьому розпаді, який отримав назву γ -розпад, випромінюються γ -частинки, які ніяк не реагують на дію магнітного поля. З часом з'ясувалося, що γ -промені є електромагнітним випромінюванням досить малої довжини хвилі (від 10^{-4} нм до 0,1 нм), β -промені є потоком електронів, α -промені – потік ядер гелію ^4_2He . Пізніше було відкрито ще два *види радіоактивного розпаду: спонтанний поділ важких ядер та протонна радіоактивність*.

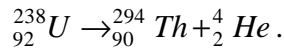
§ 108 Альфа-розпад. Енергія α -частинок. Теорія Гамова-Герні-Кондона [3, 11]

1 Альфа-розпад. *Альфа-розпадом називають самочинне перетворення одних ядер атомів в інші, яке супроводжується випромінюванням α -частинок, тобто ядер гелію ^4_2He .* Альфа-розпад проходить за такою схемою:



Буквою X позначений хімічний символ (материнського) ядра, яке розпадається, буквою Y – хімічний символ (дочірнього) ядра, яке утворилося. Альфа-розпад, як правило, супроводжується випромінюванням дочірнім ядром γ -променів.

Прикладом може бути розпад ізотопу урану ${}^{238}\text{U}$:



Швидкості, з якими α -частинки (тобто ядра ${}^4_2\text{He}$) вилітають із ядра, яке розпалося, дуже великі (приблизно 10^7 м/с; кінетична енергія дорівнює декілька мегаелектронвольт). Пролітаючи через речовину, α -частинка поступово втрачає свою енергію, іонізуючи молекул речовини, і, зрештою, зупиняється. На утворення однієї пари іонів у повітрі витрачається в середньому 35 еВ. Таким чином, α -частинка утворює на своєму шляху приблизно 10^5 пар іонів. Природно, що чим більша густина речовини, тим менший пробіг α -частинок до зупинки. Так, у повітрі при нормальному тиску пробіг становить кілька сантиметрів, у твердій речовині пробіг має значення порядку 0,01 мм (α -частинки повністю затримуються звичайним аркушем паперу).

Кінетична енергія α -частинок виникає за рахунок надлишку енергії спокою материнського ядра над сумарною енергією спокою дочірнього ядра й α -частинки. Енергії α -частинок, які випромінюються даною радіоактивною речовиною, виявляються точно визначеними. Здебільшого радіоактивна речовина випускає кілька груп α -частинок з близькою, але різною енергією. Це обумовлено тим, що дочірнє ядро може виникати не тільки в нормальному, але й у збуджених станах. Як правило, дочірнє ядро переходить у нормальний або більш низький збуджений стан, випромінюючи γ -фотон.

2 Енергія α -частинок. Теорія Гамова-Герні-Кондона. Значимо тепер парадокс, пояснити який класична фізика не змогла. Наприклад, уран ${}^{238}\text{U}$ випромінює α -частинки з енергією 4,2 МеВ, а радій ${}^{226}\text{Ra}$ – з енергією 4,8 МеВ. Здавалося б, коли обстріляти ці ядра α -частинками з такими самими енергіями, то вони повинні були б попадати усередину ядра. А експеримент показав, що цього не відбувається. Більше того, якщо обстрілювати ці ядра α -частинками з енергією 8,8 МеВ, то такі α -частинки також усередину ядра не попадають. Це говорить про те, що висота потенціального бар'єра U_{\max} ядер набагато вища енергії α -частинок, які випромінюються. Тоді стає незрозумілим, як відбувається випромінювання α -частинок з енергіями, які є набагато меншими за потенціальну енергію U_{\max} ядра, з якого вони вилітають?

Цей парадокс був вирішений незалежно один від одного Г.А.Гамовим, з одного боку, й Герні та Кондоном – з іншого. Для спрощення введемо припущення, що α -частинки вже існують усередині атомних ядер. При такій ідеалізації материнське ядро складається з дочірнього ядра й α -частинки. Ця ідеалізація, імовірно, не відповідає дійсності. Швидше за все, α -частинка утворюється із протонів і нейтронів перед вильотом з ядра. Однак вищезазначена ідеалізація приводить в основному до правильних результатів.

Розглянемо поведінку потенціальної енергії U взаємодії α -частинки й дочірнього ядра залежно від відстані між ними r . На порівняно великих відстанях, де практично перестають діяти ядерні сили, залишається тільки кулонівське відштовхування й потенціальна функція U подається формулою

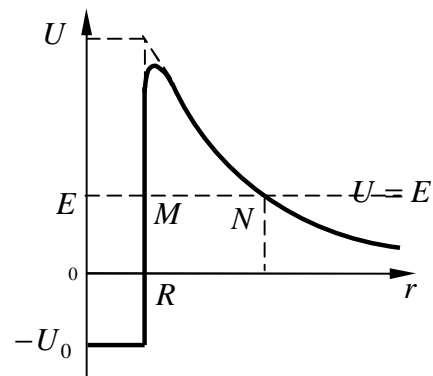


Рисунок 108.1

$U = 2Ze^2 / (4\pi\epsilon_0 r)$, де Ze – заряд дочірнього ядра, а $2e$ – заряд α -частинки. Кулонівське відштовхування на малих відстанях від ядра повинне перейти в притягання, яке обумовлене ядерними силами, інакше α -частинки в ядрі не могли б утримуватися (притягання відповідає від'ємна потенціальна енергія). Тому залежність потенціальної енергії $U(r)$ від відстані r можна подати так, як це зображено на рисунку 108.1. Аналізуючи залежність $U(r)$, бачимо, для того щоб α -частинка вилетіла з ядра, їй потрібно подолати потенціальний бар'єр. Тоді суть парадоксу можна сформулювати таким чином: як α -частинка з енергією E , меншою за висоту потенціального бар'єра U_{\max} , може пройти через нього?

Цей парадокс пояснюється за допомогою квантової механіки й уявлень про α -розпад як про тунельний ефект. З точки зору квантової механіки є деяка ймовірність того, що α -частинка маючи енергію, меншу за висоту потенціального бар'єра, пройде крізь цей бар'єр. *Теорія α -розпаду Гамова-Герні-Кондона, яка базується на уявленні про α -розпад як про тунельний ефект, приводить до результатів, що добре узгоджуються з дослідом.*

§ 109 Бета-розпад. Види бета-розпаду. Енергія β -частинок. Теорія Фермі. Слабка взаємодія [3, 11]

1 Бета-розпад. Види бета-розпаду. *Бета-розпад є самочинним процесом, у якому нестабільне ядро ${}^A_Z X$ перетворюється в ядро-ізобар ${}^A_{Z+1} X$ або ${}^A_{Z-1} X$.* Кінцевим результатом цього процесу є перетворення в ядрі нейтрона в протон або протона в нейтрон. Можна сказати, що β -розпад є не внутрішньоядерним, а внутрішньонуклонним процесом. При β -перетворенні відбуваються більш глибокі зміни речовини, ніж при α -розпаді.

Розрізняють три види β -розпаду:

1) *електронний β^- -розпад*, у якому ядро випромінює електрон, тому зарядове число Z збільшується на одиницю;

2) *позитронний β^+ -розпад*, у якому ядро випускає позитрон (частинку, які відрізняється від електрона лише тим, що її заряд є додатним) і з цієї причини його зарядове число зменшується на одиницю;

3) *електронне захоплення (e -захоплення)*, у якому ядро поглинає один з електронів електронної оболонки, тому зарядове число зменшується на одиницю. Як правило, електрон поглинається з K -оболонки атому, оскільки ця оболонка є найближчою до ядра. Електрон може поглинатися й з L - або M -оболонки і т.д., але ці процеси менш імовірні.

2 Енергія β -частинок. Теорія Фермі. Слабка взаємодія. Енергії α - і β -частинок, які випромінюються радіоактивними речовинами, можна виміряти методом відхилення їх в електромагнітних полях, тому що ці частинки заряджені. Такі виміри показали, що кожна α -радіоактивна речовина випромінює α -частинки цілком певної, визначеної енергії, яка характерна саме цій речовині. Цей результат є цілком природним. Здавалось би такі властивості повинні мати і β -частинки. Тобто енергія β -частинок повинна мати визначене значення. Однак експеримент показав зовсім інший результат:

випромінюються β -частинки з різною енергією, спектр їх енергій є суцільним.

Виявилось, що β -радіоактивні атоми одного і того самого сорту випромінюють електрони різних енергій, починаючи від нуля й закінчуючи деяким граничним значенням $E_{\text{гр}}$, яке є характерним для розглянутої речовини. Це граничне значення називається

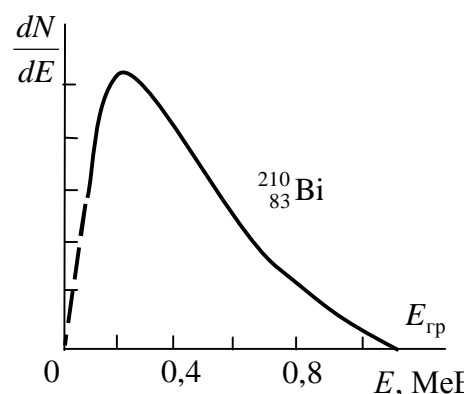


Рисунок 109.1

верхньою межею β -спектра. Для прикладу на рис. 109.1 наведений β -спектр (залежність кількості β -частинок в одиничному енергетичному інтервалі dN/dE від енергії частинок E), який виникає при розпаді ${}_{83}^{210}\text{Bi}$. *Постає питання: чому спектр енергій електронів при β -розпаді є суцільним, а не дискретним?*

Пояснив це протиріччя Паулі. Він висунув гіпотезу, яка пізніше була доведена експериментально, що *при β -розпаді разом з електроном вилітає ще якась невідома нейтральна частинка, яка не реєструвалася приладами*. У рідкісних випадках вся енергія, яка вивільняється в радіоактивному перетворенні, переноситься електроном. Така енергія відповідає верхній межі електронного β -спектра. Підтвердженням цього може бути дослідний факт, що зазначена межа збігається з різницею енергій материнського й дочірнього ядер. В інших рідкісних випадках вся енергія переноситься гіпотетичною частинкою. Але найчастіше енергія переноситься і цією частинкою, і електроном. Розподіл енергії між ними має випадковий характер, чим і пояснюється форма β -спектра. Пізніше Фермі назвав цю незаряджену частинку **нейтрино** (що в перекладі з італійського означає «маленький нейтрончик»). Маса нейтрино, якщо така є в цієї частинці, повинна бути меншою маси електрона.

На основі гіпотези Паулі в 1933 р. Фермі побудував кількісну теорію β -розпаду. Ця теорія досить складна. *Основна ідея Фермі полягає в тому, що β -частинки й нейтрино не існують в атомних ядрах, а народжуються в них у процесі β -розпаду*. Також для пояснення β -розпаду Фермі потрібно було ввести гіпотезу про існування особливого типу короткодійчих сил, які й викликають у ядрі процеси перетворення нейтрона в протон або протона в нейтрон з випромінюванням β -частинок і нейтрино в обох випадках. Відповідні сили називаються **слабкими силами**, а взаємодії, що відбувались під їх дією, – **слабкими взаємодіями**. Щоб мати уявлення про величину слабких взаємодій, зазначимо, що теоретичні розрахунки й подальші дослідні вимірювання показали, що середня довжина вільного пробігу нейтрино з енергією 1 МеВ у воді дорівнює приблизно 10^{21} см (100 світлових років). Такі нейтрино вільно проходять Сонце, а тим більше земну кулю. Радіус дії слабких взаємодій не перевищує 10^{-15} см.

Потрібно також зазначити, що постульована Паулі частинка, яка з'являється при β^- -розпаді разом з електроном, пізніше стала називатися електронним антинейтрино ($\tilde{\nu}_e$), а частинка, що з'являється при β^+ -розпаді разом з позитроном, – електронним нейтрино (ν_e). Щоб задовольнити закон збереження моменту імпульсу, потрібно припустити, що спіни $\tilde{\nu}_e$ і ν_e дорівнюють 1/2.

3 У зв'язку з вищевикладеним три β -розпади можна подати у вигляді таких схем.

1 Схема β^- -розпаду, або електронного розпаду:



Приклад: ${}_{90}^{234}\text{Th} \rightarrow {}_{91}^{234}\text{Pa} + {}^0_{-1} e + \tilde{\nu}_e$.

2 Схема β^+ -розпаду, або позитронного розпаду:



Приклад: ${}^13_7\text{N} \rightarrow {}^13_6\text{C} + {}^0_{+1} e + \nu_e$.

3 Схема електронного захоплення:

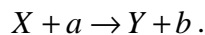


Приклад: ${}^{40}_{19}\text{K} + {}^0_{-1} e \rightarrow {}^{40}_{18}\text{Ar} + \nu_e$.

§ 110 Ядерні реакції. Енергія реакції. Гранична кінетична енергія. Компаунд-ядро. Реакція зриву. Реакція захоплення. Ефективний переріз ядерної реакції [3]

1 Ядерною реакцією називається процес взаємодії атомного ядра з елементарною частинкою або з іншим ядром, який приводить до перетворення ядра (або ядер). Взаємодія реагуючих частинок виникає при зближенні їх до відстаней порядку 10^{-15} м завдяки дії ядерних сил.

Найпоширенішим видом ядерної реакції є взаємодія легкої частинки a з ядром X , у результаті якого утвориться легка частинка b і ядро Y :



Рівняння таких реакцій записують скорочено у вигляді

$$X(a,b)Y. \quad (110.1)$$

У дужках зазначають легкі частинки, що беруть участь у реакції, спочатку вхідна, потім кінцева.

Як легкі частинки a й b можуть фігурувати нейтрон (n), протон (p), дейтрон (d), α -частинка (α) й γ -фотон (γ).

При розгляді ядерних реакцій, як і інших процесів, що обговорюються в ядерній фізиці, використовуються такі закони збереження:

1) закон збереження енергії; 2) закон збереження імпульсу; 3) закон збереження моменту імпульсу; 4) закон збереження електричного заряду. Також використовуються й інші закони збереження.

2 Ядерні реакції можуть супроводжуватися як виділенням, так і поглинанням енергії. Кількість енергії, що виділяється, при ядерній реакції називається **енергією реакції**. Вона визначається різницею мас вхідних і кінцевих ядер:

$$Q = c^2 \left(\sum_{i=1}^n m_i - \sum_{k=1}^{n'} m'_k \right), \quad (110.2)$$

де m_i – маси спокою частинок, які брали участь у реакції; m'_k – маси спокою частинок, які виникли в результаті реакції. Якщо сума мас ядер, що утворюються, перевищує суму мас вхідних ядер, реакція проходить з поглинанням енергії й енергія реакції буде від'ємною ($Q < 0$). Така реакція називається **ендотермічною**. Якщо сума мас ядер, які утворюються, менша суми мас вхідних ядер, реакція йде з виділенням енергії й енергія реакції буде додатною ($Q > 0$). Така реакція називається **екзотермічною**. Енергія реакції показує, наскільки збільшується (зменшується) кінетична енергія частинок після проходження ядерної реакції.

3 Екзотермічна реакція може проходити при як завгодно малій вхідній кінетичній енергії частинок, які зіштовхуються. Навпроти, ендотермічна реакція може проходити тільки тоді, коли кінетична енергія частинок, які зіштовхуються, перевершує деяке мінімальне значення. Це мінімальне значення кінетичної енергії $T_{пор}$, починаючи з якого ендотермічна реакція може проходити, називається **порогом реакції**. Істотно зазначити, що поріг реакції вимірюється завжди в лабораторній системі координат, у якій частинка-мішень перебуває у спокої.

Візьмемо, наприклад, частинку масою m_1 , що налітає зі швидкістю v на нерухому частинку масою m_2 . Розглядаємо нерелятивістський випадок. Вважаємо, що зіткнення цих частинок непружне, у результаті якого частина кінетичної енергії переходить у внутрішню. Для того щоб ендотермічна ядерна реакція відбулася необхідно, щоб частина кінетичної

енергії, що переходить у внутрішню, була не меншою модуля енергії реакції $|Q|$. З'ясуємо, якою повинна при цьому бути мінімальна кінетична енергія частинки, що налітає (порогова кінетична енергія). Для вирішення проблеми використаємо закон збереження імпульсу й закон збереження енергії

$$m_1 v = (m_1 + m_2) u, \\ \frac{m_1 v^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} + |Q|. \quad (110.3)$$

Тут u швидкість частинок після непружного удару. З першого рівняння (110.3) знаходимо u , підставляємо в друге рівняння й отримуємо

$$\frac{m_1 v^2}{2} \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) = |Q|,$$

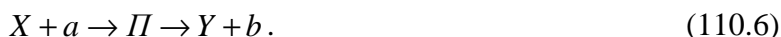
або

$$T_{\text{пор}} = \frac{m_1 v^2}{2} = |Q| / \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) = |Q| \cdot \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right). \quad (110.4)$$

Таким чином, для нерелятивістського випадку порогова кінетична енергія визначається співвідношенням (110.4). У релятивістському випадку, порогова кінетична енергія має вигляд

$$T_{\text{пор}} = |Q| \cdot \left(1 + \frac{m_1}{m_2} + \frac{|Q|}{2m_2 c^2} \right). \quad (110.5)$$

4 У 1936 р. Н. Бор встановив, що реакції, які викликані не дуже швидкими частинками, проходять у два етапи. Перший етап полягає в захопленні частинки a , що наблизилася до ядра X , і в утворенні проміжного ядра Π , яке називають **компаунд-ядром**. Енергія, привнесена частинкою a (вона складається з кінетичної енергії частинки й енергії її зв'язку з ядром), за дуже короткий час перерозподіляється між всіма нуклонами компаунд-ядра, у результаті чого це ядро виявляється в збудженому стані. На другому етапі компаунд-ядро випускає частинку b . Символічно таке проходження реакції у два етапи записується таким чином:



Якщо випущена частинка тотожна із захопленою ($b \equiv a$), процес (110.6) називають **розсіюванням**. У випадку, коли енергія частинки b дорівнює енергії частинки a ($E_b = E_a$), розсіювання є **пружним**, у протилежному разі (тобто при $E_b \neq E_a$) – **непружним**. Ядерна реакція має місце, якщо частинка b не тотожна з a .

Проміжок часу $\tau_{\text{я}}$, який необхідний нуклону з енергією порядку 1 МеВ (що відповідає швидкості нуклона порядку 10^7 м/с) для того, щоб пройти відстань, яка дорівнює діаметру ядра ($\sim 10^{-14}$ м), називається **ядерним часом** (або **ядерним часом прольоту**). Це час за порядком величини дорівнює

$$\tau_{\text{я}} \sim \frac{10^{-14} \text{ м}}{10^7 \text{ м/с}} = 10^{-21} \text{ с}. \quad (110.7)$$

Середній час життя компаунд-ядра (дорівнює $10^{-14} - 10^{-12}$ с) на багато порядків перевищує ядерний час прольоту $\tau_{\text{я}}$. Отже, розпад компаунд-ядра (тобто випромінювання ним частинки b) являє собою процес, який не залежить від першого етапу реакції, що полягає в захопленні частинки a (компаунд-ядро ніби «забуває» про спосіб свого утворення). Одне й те саме компаунд-ядро може розпадатися різними шляхами, причому

характер цих шляхів і їх відносна ймовірність не залежать від способу утворення компаунд-ядра.

5 Реакції, які викликані швидкими нуклонами й дейтронами, проходять без утворення проміжного ядра. Такі реакції називають *прямими*. Типовою прямою ядерною реакцією є *реакція зриву*, яка спостерігається при нецентральных зіткненнях дейтрона з ядром. При таких зіткненнях один з нуклонів дейтрона може опинитись у зоні дії ядерних сил і буде захоплений ядром, у той час як інший нуклон залишиться поза зоною дії ядерних сил і пролетить повз ядро. Символічно цю реакцію можна подати у вигляді (d, p) або (d, n) .

Зворотною до реакції зриву є *реакція підхоплення* – нуклон, що налетів (p або n) відколює від ядра один з нуклонів (n або p), перетворюючись при цьому в дейтрон: (n, d) або (p, d) .

6 У ядерній фізиці ймовірність взаємодії характеризують за допомогою *ефективного перерізу* σ . Зміст цієї величини полягає в такому. Нехай потік частинок, наприклад нейтронів, попадає на мішень, настільки тонку, що ядра мішені не перекривають один одного (рис. 110.1; нагадаємо, що потоком частинок називається кількість частинок, що пролітають через деяку поверхню за одиницю часу). Якщо б ядра були твердими кульками з поперечним перерізом σ , а частинки, які падають, – твердими кульками з дуже малим перерізом, то ймовірність того, що частинка, яка падає, зачепить одне з ядер мішені, дорівнювала б

$$P = \frac{S_{\text{яд}}}{S} = \frac{\sigma n V}{S} = \frac{\sigma n S \delta}{S} = \sigma n \delta,$$

де n – концентрація ядер, тобто число їх в одиниці об'єму мішені; δ – товщина мішені ($\sigma n \delta$ визначає відносну частинку площі мішені, перекриту ядрами-кульками).

Нехай на мішень падає перпендикулярно до її поверхні потік частинок N . Тоді кількість частинок, які мають за одиницю часу зіткнення з ядрами мішені, ΔN визначається формулою

$$\Delta N = NP = N\sigma n \delta. \quad (110.8)$$

Отже, визначивши відносну кількість частинок, яка має зіткнення, $\Delta N/N$, можна було б обчислити поперечний переріз ядра за формулою

$$\sigma = \Delta N / N n \delta. \quad (110.9)$$

У дійсності ні ядра мішені, ні частинки, що падають на неї, не є твердими кульками. Однак за аналогією з моделлю кульок, що зіштовхуються, для характеристики ймовірності взаємодії використовують величину σ , обумовлену формулою (110.9), у якій під ΔN мають на увазі не число частинок, які зіткнулися, а число частинок, які мали взаємодію з ядрами мішені. Ця величина й називається *ефективним перерізом* для даної реакції (або процесу).

Ефективні перерізи ядерних процесів виражають в одиницях, що отримали назву *барн*:

$$1 \text{ барн} = 10^{-28} \text{ м}^2 = 10^{-10} \text{ нм}^2. \quad (110.10)$$

7 Уперше ядерна реакція була проведена Резерфордом у 1919 р. При опроміненні азоту α -частинками деякі ядра азоту перетворювалися в ядра кисню, випускаючи при цьому протон. Рівняння цієї реакції має вигляд

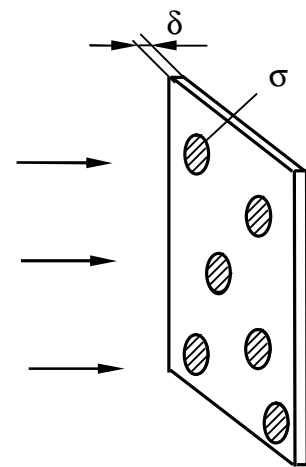
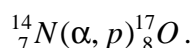
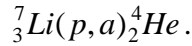


Рисунок 110.1 – До визначення ефективного перерізу реакції (або процесу)

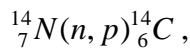
Резерфорд скористався для розщеплення атомного ядра природними снарядами – α -частинками. Перша ядерна реакція, викликана штучно прискореними частинками, була здійснена Кокрофтом і Уолтоном в 1932 р. За допомогою так званого множника напруги вони прискорювали протони до енергії порядку 0,8 МеВ і спостерігали реакцію



Далі з розвитком техніки прискорення заряджених частинок множилося число ядерних перетворень, які здійснювалися штучним шляхом.

Найбільше значення мають реакції, які викликаються нейтронами. На відміну від заряджених частинок (p, d, α) нейтрони не зазнають кулонівського відштовхування, внаслідок чого вони можуть проникати в ядра, маючи досить малу енергію. Ефективні перерізи реакцій звичайно зростають при зменшенні енергії нейтронів. Це можна пояснити тим, що чим менша швидкість нейтрона, тим більший час, який він проводить у сфері дії ядерних сил, пролітаючи поблизу ядра, і, отже, тим більша ймовірність його захоплення. Однак часто спостерігаються випадки, коли переріз захоплення нейтронів має різко виражений максимум для нейтронів певної енергії E_r . Як приклад на рис. 110.2 наведена крива залежності перерізу захоплення нейтрона ядром ${}^{238}\text{U}$ від енергії нейтрона E . Масштаб вздовж обох осей – логарифмічний. На рисунку видно, що при $E = E_r = 7 \text{ eV}$ переріз захоплення різко зростає, досягаючи 23 000 барн. Вид кривої свідчить про те, що явище має резонансний характер. Таке резонансне поглинання має місце в тому випадку, коли енергія, що привноситься нейтроном у компаунд-ядро, дійсно дорівнює тій енергії, яка необхідна для переведення компаунд-ядра на збуджений енергетичний рівень. Подібним чином для фотонів, енергія яких дорівнює різниці енергій між першим збудженим і основним рівнями атома, ймовірність поглинання особливо велика (резонансне поглинання світла).

Є цікавою реакція



яка постійно проходить в атмосфері під дією нейтронів, утворених космічними променями. Виникаючий при цьому вуглець ${}^{14}_6\text{C}$ називається **радіовуглецем**, тому що він β^- -радіоактивний, його період напіврозпаду становить 5730 років. Радіовуглець засвоюється при фотосинтезі рослинами й бере участь у кругообігу речовин у природі.

Кількість виникаючих в атмосфері за одиницю часу ядер радіовуглецю ΔN_+ в середньому залишається сталою. Кількість ядер, що розпадаються, ΔN_- є пропорційною числу наявних N ядер:

$$\Delta N_- = kN.$$

Оскільки період напіврозпаду дуже великий, встановлюється рівноважна концентрація ядер ${}^{14}\text{C}$ у звичайному вуглеці, що відповідає умові

$$\Delta N_+ = \Delta N_-, \text{ або } \Delta N_+ = kN.$$

Спеціальні дослідження показали, що внаслідок дії вітрів і океанських течій рівноважна концентрація ${}^{14}\text{C}$ в різних місцях земної кулі однакова й відповідає приблизно 14 розпадам за хвилину на кожний грам вуглецю.

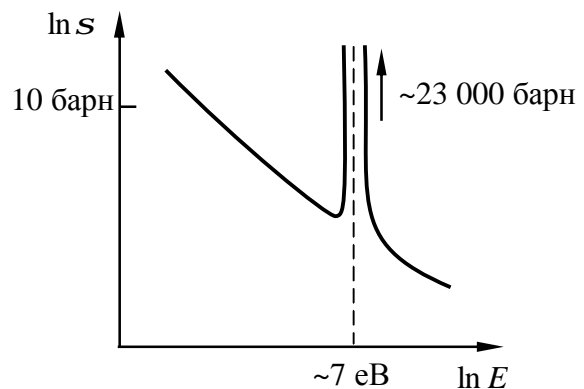


Рисунок 110.2 – Переріз захоплення нейтронів ядром урану-238

Поки організм живе, втрата у ньому ^{14}C через радіоактивність заповнюється за рахунок участі в кругообігу речовин у природі. У момент смерті організму процес засвоєння відразу ж припиняється й концентрація ^{14}C у звичайному вуглеці починає зменшуватися за законом радіоактивного розпаду. Отже, вимірявши концентрацію ^{14}C у рештках організмів (у деревині, костях і т.п.), можна визначити дату їх смерті або, як говорять, їх вік. Перевірка цього методу на древніх зразках, вік яких точно визначений історичними методами, дала цілком задовільні результати.

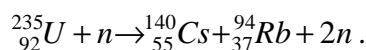
§ 111 Ділення ядер. Ланцюгова ядерна реакція. Ядерна бомба. Ядерний реактор [3]

1 У 1938 р. Ган і Штрассман виявили, що при опроміненні урану нейтронами утворюються елементи із середини періодичної системи – барій і лантан. Пояснення цього явища було дано Фрішем і Мейтнер. Вони висловили припущення, що ядро урану, яке захопило нейтрон, ділиться на дві приблизно рівні частини. Ці частини отримали назву осколків поділу.

Подальші дослідження показали, що поділ може відбуватися різними шляхами. Усього утвориться близько 80 різних осколків, причому найбільш імовірними є поділ на осколки, маси яких співвідносяться як 2:3. Крива на рис. 111.1 дає відносний вихід осколків різної маси, що виникають при поділі ^{235}U повільними (тепловими) нейтронами. Відповідно до цієї кривої відносне число актів поділу, при яких утворюються два осколки рівної маси ($A \approx 117$), становить $10^{-2}\%$, у той час як утворення осколків з масовими числами порядку 95 і 140 ($95:140 \approx 2:3$) спостерігається в 7% випадків.

Питома енергія зв'язку для ядер середньої маси приблизно на 1 МеВ більша, ніж у важких ядер. Звідси випливає, що поділ ядер повинен супроводжуватися виділенням великої кількості енергії. Але особливо важливим виявилася та обставина, що при поділі кожного ядра вивільняється кілька нейтронів. Відносна кількість нейтронів у важких ядрах помітно більша, ніж у середніх ядрах. Тому осколки, що утворилися, виявляються сильно перевантаженими нейтронами, у результаті чого вони виділяють декілька нейтронів. Більшість нейтронів випускається миттєво (за час, менше 10^{-14} с). Частина (близько 0,75%) нейтронів, яка отримала назву **запізнілі нейтрони**, випускається не миттєво, а із запізненням від 0,05 с до 1 хв. У середньому на кожний акт поділу виділяється 2,5 нейтронів.

Виділення миттєвих і запізнілих нейтронів не усуває повністю перевантаження осколків поділу нейтронами. Тому осколки виявляються здебільшого радіоактивними й мають ланцюжок β^- -перетворень, які супроводжуються випромінюванням γ -квантів. Пояснимо сказане прикладом. Один зі шляхів, якими здійснюється поділ, виглядає в так:



Осколки поділу – цезій і рубідій – мають перетворення:

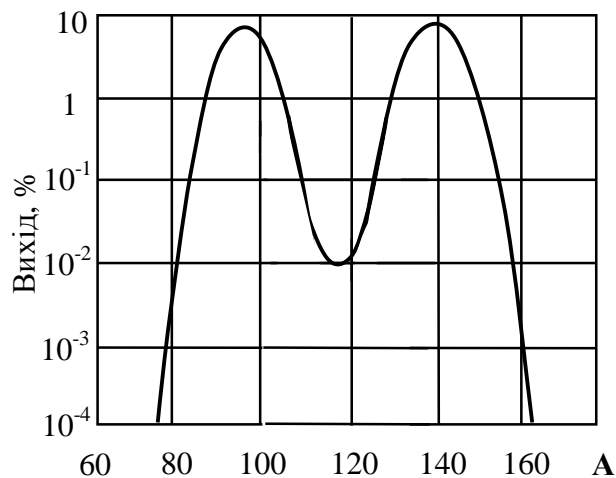
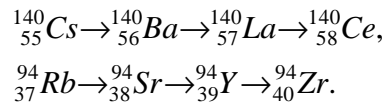


Рисунок 111.1 – Відносний вихід (у відсотках) осколків, що виникають при поділі урану-235 тепловими нейтронами. До осі ординат застосована логарифмічна шкала

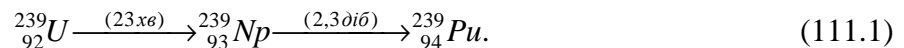


Кінцеві продукти – церій ${}^{140}\text{Ce}$ і цирконій ${}^{94}\text{Zr}$ – є стабільними.

Крім урану, при опроміненні нейтронами діляться торій (${}^{232}_{90}\text{Th}$) і протактиній (${}^{231}_{91}\text{Pa}$), а також трансурановий елемент плутоній (${}^{239}_{94}\text{Pu}$). Нейтрони надвисоких енергій (порядку декількох сотень мегаелектронвольт) викликають поділ і більш легких ядер. Ядра ${}^{235}\text{U}$ й ${}^{239}\text{Pu}$ діляться нейтронами будь-яких енергій, але особливо добре повільними нейтронами. Тепловими нейтронами діляться також ${}^{233}\text{U}$ і ${}^{230}\text{Th}$, але ці ізотопи в природі не трапляються, вони утворюються штучним шляхом.

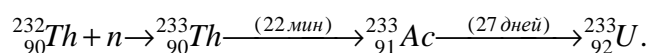
Ядра ${}^{238}\text{U}$ діляться тільки швидкими нейтронами (з енергіями, не меншими 1 МеВ). При менших енергіях нейтрони поглинаються ядрами ${}^{238}\text{U}$ без подальшого поділу. У результаті утвориться ядро ${}^{239}\text{U}$, енергія збудження якого виділяється у вигляді γ -фотона. Тому такий процес називається **радіаційним захопленням** (реакція (n, γ)). Ефективний переріз цього процесу різко зростає при енергії нейтронів, що дорівнює приблизно 7 еВ, досягаючи 23 000 барн. Переріз захоплення ядром ${}^{238}\text{U}$ теплових нейтронів становить менше 3 барн.

Ядро ${}^{239}\text{U}$, яке утворилося в результаті захоплення нейтрона, нестабільне (період напіврозпаду T дорівнює 23 хв.). Випускаючи електрон, антинейтрино й γ -фотон, воно перетворюється в ядро трансуранового елемента нептунія ${}^{239}\text{Np}$. Нептуній також перетерплює β^- -розпад ($T = 2,3$ дні), перетворюючись у плутоній ${}^{239}\text{Pu}$. Цей ланцюжок перетворень виглядає в так:



Плутоній α -радіоактивний, однак його період напіврозпаду такий великий (24 400 років), що його можна вважати практично стабільним.

Радіаційне захоплення нейтронів ядром торія ${}^{232}\text{Th}$ приводить до утворення ізотопу урану ${}^{233}\text{U}$, який легко ділиться, що є відсутнім у природному урані:



Уран-233 α -радіоактивний ($T = 162\,000$ років).

2 Випромінювання при поділі ядер ${}^{235}\text{U}$, ${}^{239}\text{Pu}$ і ${}^{233}\text{U}$ декількох нейтронів дає можливість здійснити **ланцюгову ядерну реакцію**. Дійсно, випромінені при поділі одного ядра z нейтронів можуть викликати поділ z ядер, у результаті буде випущено z^2 нових нейтронів, які спричинять поділ z^2 ядер, і т.д. Таким чином, кількість нейтронів, що народжуються в кожному поколінні, зростає в геометричній прогресії. Нейтрони, що випромінюються при поділі ядер ${}^{235}\text{U}$, мають у середньому енергію порядку 2 МеВ, що відповідає швидкості порядку $2 \cdot 10^7$ м/с. Тому час, що проходить між випромінюванням нейтрона й захопленням його новим ядром, що ділиться, дуже малий, так що процес розмноження в речовині проходить досить швидко.

Намальована нами картина є ідеальною. Процес розмноження нейтронів проходив би описаним способом за умови, що всі нейтрони, які виділилися, поглинаються ядрами, що діляться. У дійсності це далеко не так. Насамперед через скінченні розміри тіла, де відбувається поділ, і велику проникаючу здатність нейтронів багато з них залишають зону реакції, перш ніж будуть захоплені яким-небудь ядром і спричинять його поділ. Крім того, частина нейтронів поглинеться ядрами домішок, що не діляться, внаслідок чого вони виходять із гри, не викликавши поділу й, отже, не утворивши нових нейтронів.

Об'єм тіла росте як куб, а поверхня – як квадрат лінійних розмірів. Тому відносна частка нейтронів, що вилітають назовні, зменшується зі збільшенням маси речовини, що ділиться.

Природний уран містить 99,27 % ізотопу ^{233}U , 0,72 % ^{235}U і близько 0,01 % ^{234}U . Отже, на кожне ядро ^{235}U , що ділиться під дією повільних нейтронів, припадає 140 ядер ^{238}U , які захоплюють не занадто швидкі нейтрони без поділу. Тому в природному урані ланцюгова реакція поділу не виникає.

Ланцюгова реакція в урані може бути здійснена двома способами. Перший спосіб полягає у виділенні із природного урану ізотопу ^{235}U , який ділиться. Внаслідок хімічної нерозрізненості ізотопів розділ їх являє собою досить важке завдання. Однак вона була вирішена декількома методами.

3 У чистому ^{235}U (або ^{239}Pu) кожний захоплений ядром нейтрон викликає поділ з випромінюванням, близько 2,5 нових нейтронів. Однак якщо маса такої речовини менша певного критичного значення, то більшість випромінених нейтронів вилітає назовні, не викликавши поділу, так що ланцюгова реакція не виникає. При масі, більшій *за критичну*, нейтрони швидко розмножуються, і реакція набуває вибухового характеру. На цьому базується дія *атомної бомби* (рис. 111.2). Ядерний заряд такої бомби являє собою два або більше частини майже чистого ^{235}U або ^{239}Pu . Маса кожної частини менша критичної, внаслідок чого ланцюгова реакція не виникає.

У земній атмосфері завжди є деяка кількість нейтронів, які народжені космічними променями. Тому щоб викликати вибух, досить з'єднати частини ядерного заряду в один з масою, більшою за критичну. Це потрібно робити дуже швидко, і з'єднання частин повинне бути дуже щільним. У протилежному разі ядерний заряд розлетиться на частини, перш ніж встигне прореагувати помітна частина речовини, яка ділиться. Для з'єднання використовується звичайна вибухова речовина (запал), за допомогою якої однією частиною ядерного заряду вистрілюють в іншу. Весь пристрій укладений у масивну оболонку з металу великої густини. Оболонка є відбивачем нейтронів і, крім того, утримує ядерний заряд від розпилення доти, поки максимально можливе число його ядер не виділить свою енергію при поділі. Ланцюгова реакція в атомній бомбі йде на швидких нейтронах. При вибуху встигає прореагувати тільки частина ядерного заряду.

4 Інший спосіб здійснення ланцюгової реакції використовується в *ядерних реакторах*. Як речовина, що ділиться, в реакторах є природний (або трохи збагачений ізотопом ^{235}U) уран. Щоб запобігти радіаційному захопленню нейтронів ядрами ^{238}U (який стає особливо інтенсивним при енергії нейтронів, що дорівнює приблизно 7 еВ), порівняно невеликі блоки речовини, що ділиться, розміщують на деякій відстані один від одного, а проміжки між блоками *заповнюють* сповільнювачем, тобто речовиною, у якому нейтрони вповільнюються до теплових швидкостей. Переріз захоплення теплових нейтронів ядром ^{238}U становить усього 3 барни, у той час як переріз поділу ^{235}U тепловими нейтронами майже в 200 разів більший (580 барн). Тому, хоча нейтрони зіштовхуються з ядрами ^{238}U у 140 разів частіше, ніж з ядрами ^{235}U , радіаційне захоплення відбувається рідше, ніж поділ, і при більших розмірах усього пристрою коефіцієнт розмноження нейтронів (тобто відношення кількостей нейтронів, що народжуються у двох наступних поколіннях) може досягти значень, більших одиниці.

Уповільнення нейтронів здійснюється за рахунок пружного розсіювання. У цьому випадку енергія, що втрачається частинкою, залежить від співвідношення мас частинок, які

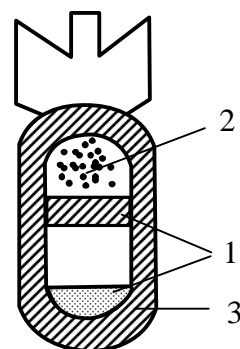
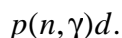


Рисунок 111.2 – Схематичне зображення атомної бомби: 1 – ядерний заряд; 2 – запал; 3 – корпус бомби

зіштовхуються. Максимальна кількість енергії втрачається у випадку, якщо обидві частинки мають однакову масу. Із цього погляду ідеальним сповільнювачем повинна була б бути речовина, що містить звичайний водень, наприклад вода (маси протона й нейтрона приблизно однакові). Однак такі речовини виявилися непридатними як сповільнювач, тому що протони поглинають нейтрони, вступаючи з ними в реакцію



Ядра сповільнювача повинні мати малий переріз захоплення нейтронів і великий переріз пружного розсіювання. Цю умову задовольняють дейтрон (ядро важкого водню-дейтерію D), а також ядра графіту (C) і берилію (Be). Для зменшення енергії нейтрона від 2 МеВ до теплових енергій у важкій воді (D_2O) досить близько 25 зіткнень, в C або Be – приблизно 100 зіткнень.

Перший уран-графітовий реактор був запущений у грудні 1942 р. у Чиказькому університеті під керівництвом італійського фізика Е.Фермі. У Радянському Союзі реактор такого самого типу був запущений під керівництвом І.В. Курчатова в грудні 1946 р. у Москві.

Схема уран-графітового реактора наведена на рис. 111.3. Стержні, позначені цифрою 3, містять кадмій або бор. Ці елементи інтенсивно поглинають нейтрони. Тому введення стрижнів у реактор зменшує коефіцієнт розмноження нейтронів, а виведення – збільшує. Спеціальний автоматичний пристрій, який управляє стержнями, дозволяє підтримувати потужність, яка розвивається в реакторі, на заданому рівні. Регулювання значно полегшується тією обставиною, що частина нейтронів, як ми вже відзначали, випускається при поділі ядер не миттєво, а із запізненням до 1 хв.

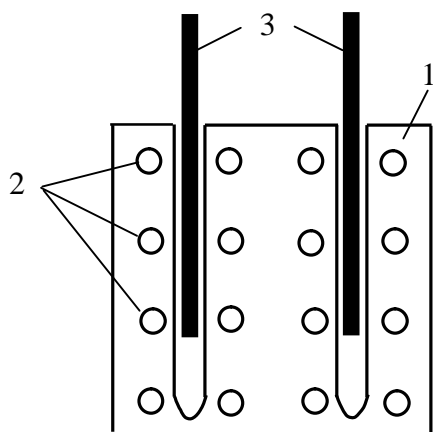


Рисунок 111.3 – Схема уран-графітового реактора: 1 – сповільнювач (графіт); 2 – блоки з урану; 3 – регулювальні стержні

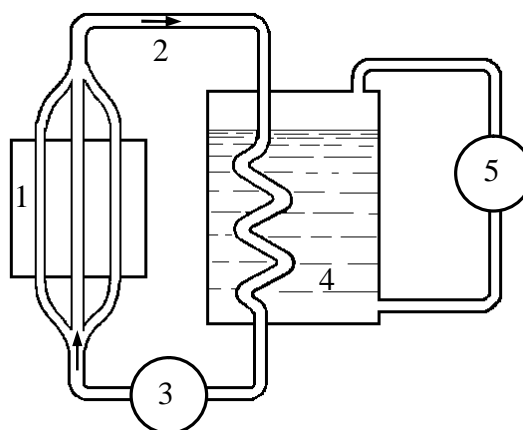


Рисунок 111.4 – Схема атомної електростанції: 1 – активна зона реактора; 2 – контур, по якому циркулює теплоносій; 3 – насос; 4 – теплообмінник; 5 – турбіна

Перші промислові реактори призначалися для виробництва матеріалу, що ділиться, для атомних бомб – плутонію. У таких реакторах частина нейтронів, що випромінюються при поділі ядер ^{235}U , іде на підтримку ланцюгової реакції, частина ж має радіаційне захоплення ядрами ^{238}U , що, як ми бачили, приводить в остаточному підсумку до утворення ^{239}Pu . Після того як в уранових блоках нагромадиться достатня кількість ^{239}Pu , блоки витягають із реактора й спрямовуються на хімічну переробку для виділення з них плутонію.

Застосування ядерної енергії для виробництва електроенергії відбувається в атомних електростанціях. Схема атомної електростанції зображена на рис. 111.4. Енергія, яка виділяється в активній зоні реактора 1, знімається теплоносієм, що циркулює в контурі 2. Циркуляція забезпечується насосом 3. Як теплоносій застосовується вода або лужні метали з

низькою температурою плавлення, наприклад натрій ($T_{\text{плав}} = 98^{\circ}\text{C}$). У теплообміннику 4 теплоносії віддає свою теплоту воді, перетворюючи її в пару, яка обертає турбіну 5.

Реактори зі сповільнювачем працюють на повільних (теплових) нейтронах. Використавши пальне, збагачене ізотопом, що ділиться (^{235}U або ^{239}Pu), можна побудувати реактор, що діє на швидких нейтронах. Частина нейтронів у таких реакторах використовується для перетворення ^{238}U в ^{239}Pu або ^{232}Th в ^{233}U , причому кількість ядер, що утворюються, здатних ділитися тепловими нейтронами, може перевищити кількість ядер, які діляться, витрачених на підтримку роботи реактора. Отже, відтворюється більша кількість ядерного пального, чим вигорає в реакторі. Тому такі ядерні реактори називають **реакторами-розмножувачами**.

Також відзначимо, що побічними продуктами процесів, які проходять у ядерних реакторах, є радіоактивні ізотопи багатьох хімічних елементів, які знаходять різноманітні застосування в біології, медицині й техніці.

§ 112 Термоядерні реакції. Дейтерій-тритієвий синтез. Протонно-протонний цикл. Вуглецевий цикл [3]

1 Ядерний синтез, тобто злиття легких ядер в одне ядро, супроводжується, як і поділ важких ядер, виділенням величезної кількості енергії. Оскільки для синтезу ядер необхідні дуже високі температури, цей процес називається **термоядерною реакцією**.

Щоб перебороти потенціальний бар'єр, обумовлений кулонівським відштовхуванням, ядра з порядковими номерами Z_1 й Z_2 повинні мати енергію

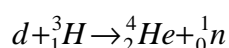
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_{\text{я}}},$$

де $r_{\text{я}}$ – радіус дії ядерних сил, що дорівнює приблизно $2 \cdot 10^{-15}$ м. Навіть для ядер із $Z_1 = Z_2 = 1$ ця енергія становить

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_{\text{я}}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{2 \cdot 10^{-15}} = 1,15 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} \approx 0,7 \text{ МэВ}.$$

На частину кожного ядра, що зіштовхується, припадає 0,35 МеВ. Середній енергії теплового руху, що дорівнює 0,35 МеВ, відповідає температура порядку $2 \cdot 10^9$ К. Однак синтез легких ядер може проходити й при значно менших температурах. Справа в тому, що через хаотичний розподіл частинок за швидкостями завжди є деяке число ядер, енергія яких значно перевищує середнє значення. Крім того, що особливо істотно, злиття ядер може відбутися внаслідок тунельного ефекту. Тому деякі термоядерні реакції проходять із помітною інтенсивністю вже при температурах порядку 10^7 К.

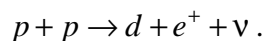
2 Особливо сприятливі умови для **синтезу ядер дейтерію й тритію**, тому що реакція між ними має резонансний характер. Саме ці речовини утворюють заряд **водневої** (або **термоядерної бомби**). Запалом у такій бомбі є звичайна атомна бомба, при вибуху якої виникає температура порядку 10^7 К. Реакція синтезу дейтрона (d , або ${}^2_1\text{H}$) і ядра тритію (${}^3_1\text{H}$)



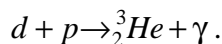
супроводжується виділенням енергії, що дорівнює 17,6 МеВ, що становить близько 3,5 МеВ на нуклон. Для порівняння зазначимо, що поділ ядра урану приводить до вивільнення приблизно 0,85 МеВ на нуклон.

3 Синтез ядер водню в ядра гелію є основним джерелом енергії Сонця й інших зірок, температура в надрах яких сягає 10^7 – 10^8 К. Цей синтез може здійснюватися двома шляхами.

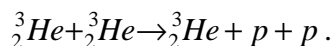
При більш низьких температурах має місце **протонно-протонний цикл**, що проходить таким чином. Спочатку відбувається синтез двох протонів з утворенням дейтрона, позитрона й нейтрино:



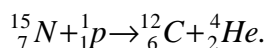
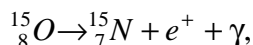
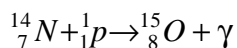
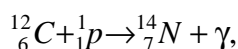
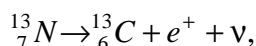
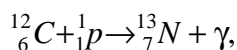
Дейтрон, що утворився, зіштовхуючись із протоном, з'єднується з ним у ядро ${}^3\text{He}$:



Остання ланка циклу є такою реакцією:



4 При більш високих температурах більшу ймовірність має запропонований Беті **вуглецевий** (або **вуглецево-азотний**) цикл, що складається з таких ланок:



Підсумком вуглецевого циклу є зникнення чотирьох протонів і утворення однієї α -частинки. Кількість ядер вуглецю залишається незмінною; ці ядра беруть участь у реакції в ролі каталізатора.

5 У водневій бомбі термоядерна реакція має неконтрольований характер. Для здійснення керованих термоядерних реакцій необхідно створити й підтримувати в деякому об'ємі температуру порядку 10^8 К. При настільки високій температурі речовина являє собою повністю іонізовану плазму. На шляху здійснення керованої термоядерної реакції стоять величезні труднощі. Поряд з необхідністю отримати надзвичайно високі температури, виникає проблема втримання плазми в заданому об'ємі. Зіткнення плазми зі стінками посудини призведе до зменшення її температури. Крім того, стінка з будь-якої речовини при такій температурі відразу випарується. У зв'язку із цим для втримання плазми в заданому об'ємі доводиться використовувати магнітне поле. Сили, що діють у цьому полі на заряджені частинки, що рухаються, змушують їх рухатися по траєкторіях, які розміщені в обмеженій частині простору.

Здійснення керованого термоядерного синтезу дасть людству практично невичерпне джерело енергії. Тому роботи з оволодіння керованими термоядерними реакціями проводяться в багатьох країнах. Одним з основних напрямків, у якому проходять ці роботи, є створення установок типу токамак (скорочення від «тороїдальна камера з магнітними котушками»). Така установка являє собою замкнутий магнітний уловлювач, що має форму тора. Плазма втримується в токамаці магнітним полем дуже складної конфігурації. Розігрів плазми здійснюється струмом, що проходить по ній.

Ряд фахівців вважає, що проблема керованого термоядерного синтезу буде успішно вирішена в XXI столітті.

§ 113 Види взаємодій і класи елементарних частинок [3]

1 Елементарними частинками називаються найменші відомі на цей час частинки матерії. Термін «елементарні частинки» значною мірою умовний, тому що не існує чіткого критерію елементарності частинки. Характерною рисою елементарних частинок є їх здатність до взаємних перетворень.

Усього разом з античастинками відкрито близько 350 елементарних частинок, і число їх продовжує зростати. Більшість елементарних частинок нестабільна – вони спонтанно перетворюються в інші частинки. Стабільними є фотон, електрон, всі види нейтрино, протон і їх античастинки.

Для того щоб пояснити властивості й поведінку елементарних частинок, їх доводиться наділяти, крім маси, електричного заряду й спіну також додатковими характерними для них величинами (квантові числа), про які буде сказано далі.

2 Відомі чотири види взаємодій між елементарними частинками: *сильне, електромагнітні, слабе й гравітаційне* (ми перелічили їх у порядку зменшення інтенсивності).

Інтенсивність взаємодії характеризують за допомогою так званої **константи взаємодії**, що являє собою безрозмірний параметр, який визначає ймовірність процесів, обумовлених даним видом взаємодії. Відношення значень констант дає відносну інтенсивність відповідних взаємодій.

Сильна взаємодія. Цей вид взаємодії забезпечує зв'язок нуклонів у ядрі. Константа сильної взаємодії має значення порядку 10. Найбільша відстань, на якому проявляється сильна взаємодія (радіус дії r), становить приблизно 10^{-15} м.

Електромагнітна взаємодія. Константа взаємодії дорівнює $1/137 \approx 10^{-2}$. Радіус дії необмежений ($r = \infty$).

Слабка взаємодія. Це взаємодія відповідальна за всі види β -розпаду ядер (включаючи e -захоплення), за багато розпадів елементарних частинок, а також за всі процеси взаємодії нейтрино з речовиною. Константа взаємодії дорівнює за порядком величини 10^{-14} . Слабка взаємодія, як і сильна, є короткодіючою.

Гравітаційна взаємодія. Константа взаємодії має значення порядку 10^{-39} . Радіус дії необмежений ($r = \infty$). Гравітаційна взаємодія є універсальною, її підлеглі все без винятку елементарні частинки. Однак у процесах мікросвіту гравітаційна взаємодія відчутної ролі не відіграє.

Таблиця 113.1

Вид взаємодії	Константа взаємодії	Час життя, с
Сильне	10	10^{-23}
Електромагнітне	10^{-2}	10^{-15}
Слабке	10^{-14}	10^{-8}
Гравітаційне	10^{-39}	-

У таблиці 1 зіставлені значення (порядок величини) констант різних видів взаємодії. В останньому стовпчику таблиці наведений середній час життя частинок, які розпадаються за рахунок даного виду взаємодії (цей час називають також часом розпаду).

3 Елементарні частинки звичайно підрозділяють на чотири класи. До одного з них належить тільки одна частинка – **фотон**. Другий клас утворюють **лептони**, третій – **мезони** й, нарешті, четвертий клас – **баріони**. Мезони й баріони часто поєднують в один клас сильно взаємодіючих частинок, які називають **адронами** (грецьке «адрос» означає великий, масивний).

Наведемо коротку характеристику перелічених класів частинок.

1 Фотони γ (кванти електромагнітного поля) беруть участь в електромагнітних взаємодіях, але не беруть участі у сильній й слабкій взаємодії.

2 Лептони отримали свою назву від грецького слова «лептос», що означає «легкий». До їх числа відносять частинки, що не мають сильної взаємодії: електрони (e^-, e^+), мюони (μ^-, μ^+), важкий тау-лептон (τ^-, τ^+), а також електронні нейтрино ($\nu_e, \tilde{\nu}_e$), мюонні нейтрино ($\nu_\mu, \tilde{\nu}_\mu$) й тау-нейтрино ($\nu_\tau, \tilde{\nu}_\tau$). Всі лептони мають спін, який дорівнює $1/2$, і, отже, є

ферміонами. Всі лептони мають слабку взаємодію. Ті з них, які мають електричний заряд (тобто електрони й мюони), мають також електромагнітну взаємодію.

3 Мезони – сильно взаємодіючі нестабільні частинки, що не несуть так званого баріонного заряду. До них належать π -мезони, або піони (π^+, π^-, π^0), K -мезони, або каони ($K^+, K^-, K^0, \tilde{K}^0$), і ета-мезон (η).

За допомогою π -мезонів здійснюється сильна взаємодія. Маса K -мезонів становить приблизно $970m_e$ (494 MeV для заряджених і 498 MeV для нейтральних K -мезонів). Час життя K -Мезонів має значення порядку 10^{-8} с. Вони розпадаються з утворенням π -мезонів і лептонів або тільки лептонів. Маса ета-мезона дорівнює 549 MeV ($1074m_e$), час життя порядку 10^{-19} с. K -мезони розпадаються з утворенням π -мезонів і γ -фотонів.

На відміну від лептонів мезони володіють не тільки слабкою (і, якщо вони заряджені, електромагнітною), але також і сильною взаємодією, що проявляється при взаємодії їх між собою, а також при взаємодії між мезонами й баріонами. Спін усіх мезонів дорівнює нулю, так що вони є бозонами.

4 Клас баріонів поєднує в собі нуклони (p, n) й нестабільні частинки з масою, більшої маси нуклонів, що отримали назву *гіперонів* ($\Lambda, \Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-, \Xi^0, \Xi^-, \Omega^-$). Всі баріони мають сильну взаємодію. Спін усіх баріонів дорівнює $1/2$, так що баріони є ферміонами. За винятком протона, всі баріони нестабільні. При розпаді баріона, поряд з іншими частинками, обов'язково утвориться баріон. Ця закономірність є проявом *закону збереження баріонного заряду*.

Крім перелічених вище частинок, виявлене велике число сильно взаємодіючих короткоживучих частинок, які отримали назву *резонансів*. Ці частинки являють собою резонансні стани, що утворені двома або більшим числом елементарних частинок. Час життя резонансів становить усього лише приблизно 10^{-23} - 10^{-22} с.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Савельев И.В. Курс общей физики: в 3 т. Т.1. Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1982.
2. Савельев И.В. Курс общей физики: в 3 т. Т.2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1982.
3. Савельев И.В. Курс общей физики: в 3 т. Т.3. Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1987.
4. Савельев И.В. Курс физики: в 3 т. Т.1. Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1989.
5. Савельев И.В. Курс физики: в 3 т. Т.2. Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1989.
6. Савельев И.В. Курс физики: в 3 т. Т.3. Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1989.
7. Сивухин Д.В. Общий курс физики: в 5 т. Т.1. Механика / Д.В.Сивухин. – М.: Физматлит, 2005.
8. Сивухин Д.В. Общий курс физики: в 3 т. Т.2. Термодинамика и молекулярная физика / Д.В.Сивухин. – М.: Физматлит, 2005.
9. Сивухин Д.В. Общий курс физики: в 3 т. Т.3. Электричество / Д.В.Сивухин. – М.: Физматлит, 2004.
10. Сивухин Д.В. Общий курс физики: в 3 т. Т.4. Оптика / Д.В.Сивухин. – М.: Физматлит, 2005.
11. Сивухин Д.В. Общий курс физики: в 3 т. Т.5. Атомная физика и ядерная физика / Д.В.Сивухин. – М.: Физматлит, 2002.
12. Лисенко О.В. Фізика: конспект лекцій / О.В. Лисенко. – Суми: Вид-во СумДУ, 2010. – Ч.1.
13. Ландсберг Г.С. Элементарный учебник физики: в 3 т. Т.2. Электричество и магнетизм. / Г.С. Ландсберг. – М.: Наука, 1985.
14. Детлаф А.А. Курс физики: в 3 т. Т.2. Электричество и магнетизм /А.А.Детлаф, Б.М.Яворский, Л.Б.Милковская. – М., Высш. школа, 1977.
15. Бушок Г.Ф. Курс фізики. Кн. 1. Фізичні основи механіки. Електрика і магнетизм / Г.Ф.Бушок, В.В.Левандовський, Г.Ф.Півень. – К.: Либідь, 2001.
16. Бушок Г.Ф. Курс фізики. Кн. 2. Оптика. Фізика атома і атомного ядра. Молекулярна фізика і термодинаміка / Г.Ф.Бушок, Є.Ф.Венгер. – К.: Либідь, 2001.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

А

Абсолютно чорне тіло 140
Автоколивання 54
Адрони 234
Активність радіоактивної речовини 220
Акустичний спектр звуку 86
Ампер 21
Амплітуда
 гармонічних коливань 54
 загасаючих коливань 68
 хвилі 79

Б

Баріони 234
Барн 226
Беккерель 220
Бел 86
Биття 62
Бозони 194
Бомба
 атомна 230
 воднева 232
 термоядерна 232

В

Вектор
 намагніченості 28
 Пойтінга 97
 Умова 84
Векторна діаграма 60
Взаємодія
 гравітаційна 234
 електромагнітна 234
 сильна 218, 234
 слабка 223, 234
Випромінювальна здатність 139, 140
Випромінювання
 вимушене 198
 індуковане 198
 спонтанне 197
Вироджені стани 187
Висота звуку 86
Власні значення рівняння 174
Власні коливання 91
Власні функції рівняння 174
Власні частоти струни 90
Вузол стоячої хвилі 89

Г

Гамільтоніан 180
Гіперони 235
Гіпотеза
 Ампера 28
 де Бройля 164

Планка 146

Гіромагнітне відношення 35, 190
Гістерезис магнітний 37
Головна площа кристала 134
Головний переріз кристала 134
Головні дифракційні максимуми 122
Густина потоку енергії 84

Д

Декремент загасання 68
Дефект маси ядра 216
Децибел 86
Дзеркала Френеля 106
Дисперсія світла 136
 аномальна 136
 нормальна 136
Дисперсія спектрального приладу 124
 кутова 124
 лінійна 124
Дисперсія хвиль 91
Диференціальне рівняння
 вимушених коливань 69
 гармонічних коливань 55
 загасаючих коливань 66
Дифракційна решітка 121
Дифракція 110
 Фраунгофера 110
 Френеля 110
Дихроїзм 136
Діаграма спрямованості диполя 98
Діамагнетик 36
Дірка 205
Добротність 68
Довжина когерентності 104
Довжина стоячої хвилі 90
Довжина хвилі 78
Домен 38
Домішки
 акцепторні 209
 донорні 209
Дослід
 Боте 152
 Девісона й Джермера 165
 Ерстеда 9
 Резерфорда 156
 Томсона й Тартаковського 166
 Фарадея 38
 Франка й Герца 159
 Штерна й Герлаха 191

Е

Електричне поле
 вихрове 41, 48
 потенціальне 48

Електричний опір
активний 75
емнісний 75
індуктивний 75
повний 74
реактивний 75
Електрон
валентний 196
оптичний 196
Електронна конфігурація 196
Електрорушійна сила
електромагнітної індукції 39
самоіндукції 43
Елементарна частинка 233
Елементарний диполь 97
Енергетична світність 139
Енергія
зв'язку ядра 216
Фермі 206
Ефект
Доплера для звукових хвиль 87
Доплера для світла
поздовжній 99
поперечний 99
Комптона 153
Ефективна напруга 75
Ефективна сила струму 75

З

Закон
Ампера 10
Біо-Савара-Лапласа 17
Брюстера 132
Вульфа-Брегга 128
електромагнітної індукції 39, 48
в диференціальній формі 49
в інтегральній формі 49
максвеллівське формулювання 41
збереження баріонного заряду 235
зміщення Віна 143
Кірхгофа 141
Малюса 131
Ома для змінного струму 74
радіоактивного розпаду 219
Стефана-Больцмана 143
Фарадея 39
Закони фотоефекту 150
Звук 86
Зміщення 54
Зона
валентна 204
дозволена 204
заборонена 204
провідності 204
Зони Френеля 111

І

Ізобар 215
Ізомер 215
Ізотон 215
Ізотоп 215
Імпеданс 74
Інверсна заселеність 200
Індуктивність 42, 43, 44
Індукційний струм 38
Інтенсивність 85
світла 101
Інтерференція 89
світла 102
Інфразвук 86

К

Квантове число
азимутальне 185, 187
головне 163, 187
магнітне 186, 187
Кільця Ньютона 108
Когерентні хвилі 89, 103
Когерентність 103
Коерцитивна сила 37
Коефіцієнт
відбиття 178
загасання 66
прозорості 178
проходження 178
Коефіцієнти Ейнштейна 199
Коливальний контур 59
Коливання 54
вимушені 54
вільні 54
власні 54
гармонічні 54
параметричні 54
Комбінаційний принцип Рітца 162
Компаунд-ядро 225
Комптонівська довжина хвилі частинки 155
Короткохвильова межа рентгенівського
випромінювання 149
Корпускулярно-хвильовий дуалізм 100
світла 153
частинок 164
Кратність виродження 187
Кристал
двовісний 133
одновісний 133
Критерій Релея 124
Критична маса 230
Кут Брюстера 132
Кут ковзання 128

Л

Лазер 199
рубіновий 201

Лептони 234
Логарифмічний декремент загасання 68

М

Магнетон Бора 191
Магнітна індукція 9, 11, 23
 залишкова 37
 поля відрізка із струмом 19
 поля на осі колового струму 20
 поля нескінченно довгого прямого
 провідника зі струмом 19
Магнітна стрілка 9
Магнітний момент
 власний 36
 контуру 22
 орбітальний 35
 спіновий 192
Магнітний полюс 9
Магнітний потік 24
 повний 40
Маятник
 математичний 57
 пружинний 56
 фізичний 58
Мезони 234
Механічний момент
 власний 36
 орбітальний 35
Модель ядра
 краплинна 218
 оболонкова 218

Н

Намагніченість 28
Напівпровідник
 n-типу 209
 p-типу 209
 власний 205
 домішковий 205
Напруженість магнітного поля 30
Нейтрино 223
Нейтрон 214
Ніколь 135
Нормальні коливання 91
Нуклон 214

О

Оболонка 195
Оператор 180
 Гамільтона 180, 182
 енергії 182
 імпульсу 183
 Лапласа 81, 180
 набла 22
 радіуса-вектора 182
Оператори комутативні 184
Оптика 100
Оптична вісь кристала 134

Оптична густина середовища 100
Оптична довжина 103
Оптична різниця ходу 103
Оптичний квантовий генератор 199
Основна частота струни 90

П

Парамагнетик 36
Перехід електронно-дірковий (*n-p*-перехід)
 210
Період дифракційної решітки 121
Період коливачь 55
Період напіврозпаду 219
Періодична система елементів Д.І.Менделєєва
 195
Питома енергія зв'язку нуклонів у ядрі 216
Підоболонка 195
Пластинка з четверть хвилі 136
Площина поляризатора 130
Поглиняльна здатність 140
Поглиняння вимушене 198
Показник заломлення 100
Поле
 вихрове 26
 магнітне 9
Поляризатор 130
 ідеальний 130
 неідеальний 130
Поляризаційна призма 134
Полярніди 136
Поріг чутності звуку 86
Постулати Бора 159
Потік енергії 84
Потокозчеплення 40
Потужність випромінювання диполя 98
Правило
 квантування орбіт 159
 Ленца 39
 лівої руки 11
 правого гвинта 19
Призма Ніколя 135
Принцип
 Гюйгенса-Френеля 110
 невизначеностей Гейзенберга 169, 170
 нерозрізненості однакових частинок 194
 Паулі 194
 суперпозиції магнітного поля 11
 суперпозиції хвиль 88
 суперпозиції хвильових функцій 181
 тотожності однакових частинок 194
Промінь
 звичайний 133
 незвичайний 133
Проникність магнітна 31
Протон 214
Псі-функція 170
Пучність стоячої хвилі 89

Р

Радіоактивний розпад 219
альфа-розпад 220
бета-розпад 220, 222
електронне захоплення 222
електронний 222
позитронний 222
гамма-розпад 220
Радіоактивність 219
Радіус зони Френеля 112
Радіус когерентності 104
Резонанс 72
зміщення 71
напруги 71
струмів 73
швидкості 73
Рентгенівська спектроскопія 128
Рентгенівська трубка 148
Рентгенівське випромінювання
гальмівне 148
характеристичне 148
Рентгенівські промені 148
Рентгеноструктурний аналіз 128
Рівень
акцепторний 209
донорний 209
Рівень гучності звуку 86
Рівняння
Максвелла
матеріальні 53
фундаментальні 52
плоскої біжучої хвилі 79, 80
плоскої загасаючої хвилі 80
плоскої хвилі 80
стоячої хвилі 89
сферичної хвилі 81
хвилі 78
хвильове 81
Шредінгера
загальне 171
стаціонарне 173
Роздільна здатність об'єктива 125
Роздільна здатність спектрального приладу 124

С

Світло
поляризоване 130
еліптично 130
лінійно 130
по колу 130
природне 130
частково поляризоване 130
Світловий вектор 101
Середній час життя радіоактивного ядра 219
Серія
Бальмера 161

Брекета 161
Лаймана 161
Пашена 161
Пфунда 162
Сила
Ампера 10
Лоренца 12
Сили
квазіпружні 56
ядерні 218
Сіре тіло 140
Смуги
однакового нахилу 108
однакової товщини 108
Соленоїд 27
Спектр лінійчастий 161
Спектральна густина енергії 144
Співвідношення невизначеностей Гейзенберга 169, 170
Спін 36, 192
електрона 193
нейтрона 214
протона 214
ядра 215
Сприйнятливність магнітна 31
Стала
Планка 146
радіоактивного розпаду 219
Рідберга 161
Стала часу електричного кола 47
Стандартні умови для хвильової функції 171
Струм
зміщення 51
квазістаціонарний 59
повний 51
Ступінь поляризації 131

Т

Тембр звуку 86
Температура Кюрі 37
Теорема
Гаусса для вектора індукції магнітного поля
в диференціальному вигляді 25
в інтегральному вигляді 25
Гаусса для індукції магнітного поля в речовині
в диференціальному вигляді 28
в інтегральному вигляді 28
про циркуляцію вектора індукції магнітного поля у вакуумі 26
про циркуляцію вектора напруженості магнітного поля 30
Теорія
Гамова-Герні-Кондона 221
Фермі 222
Терм 162
Тесла 11

Тороїд 26
Транзистор 212
база 213
емітер 213
колектор 213
підсилювач напруги 213
Тунельний ефект 179

У

Ультразвук 86
Ультрафіолетова катастрофа 146
Умова квазістаціонарності 59
Умова нормування 171
Універсальна функція Кірхгофа 141

Ф

Фаза коливань 54
Фазова швидкість 79
звукових хвиль 82
поздовжньої пружної хвилі 82
поперечної пружної хвилі 82
Ферміон 194
Феромагнетик 36
Фігури Ліссажу 65
Формула
Бальмера 161
Віна 143
Вульфа-Брегга 128
Ейнштейна для фотоефекту 151
Планка 147
Резерфорда 158
Релея-Джинса 146
Томсона 60
Фотоефект 149
Фотон 152, 234
Фронт хвилі 78

Х

Хвильова зона диполя 97
Хвильова поверхня 78
Хвильова функція 170
Хвильовий вектор 80
Хвильовий пакет 91
Хвильовий фронт 78
Хвиля 77
біжуча 77
гармонічна 77
де Бройля 164
плоска 78
поздовжня 77
поперечна 77
стояча 89

сферична 78

Ц

Цикл
вуглецевий 233
вуглецево-азотний 233
протонно-протонний 233
Циркуляція вектора 25
Цуг 77

Ч

Час когерентності 104
Частота
биття 62
власна 66
гармонічних коливань 55
загасаючих коливань 67
кругова 55
резонансна 72, 73
циклічна 55
циклотронна 14, 15
Червона межа фотоефекту 151
Число
зарядове 215
масове 215
хвильове 80

Ш

Швидкість групова 92
Швидкість електромагнітних хвиль 94
Ширина інтерференційної смуги 106

Я

Явище
взаємної індукції 44
електромагнітної індукції 38
подвійної променезаломлюваності 133
самоіндукції 42
Ядерна модель атома 156
Ядерна реакція 224
екзотермічна 224
ендотермічна 224
енергія 224
ефективний переріз 226
зриву 226
ланцюгова 229
підхоплення 226
поріг реакції 224
пряма 226
термоядерна 217, 232
Ядерний реактор 230

Навчальне видання

ФІЗИКА

Конспект лекцій

для студентів напрямів підготовки:

6.050801 “Мікро- та наноелектроніка”,

6.050802 “Електронні пристрої та системи”,

6.050701 “Електротехніка та електротехнології”,

6.050201 “Системна інженерія”

усіх форм навчання

Частина 2

Відповідальний за випуск Ю.М.Лопаткін

Редактор Н.З.Клочко

Комп’ютерне верстання О.В.Лисенка

Підп. до друку 12.07.2010, поз.

Формат 60x84/8. Ум. друк. арк. 28,83. Обл.-вид. арк. 22,37. Тираж 100 пр. Зам. №

Собівартість вид. грн к.

Видавець і виготовлювач

Сумський державний університет,

вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК №3062 від 17.12.2007.