1 ВИМІРЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН ТА МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

1.1 ВВЕДЕННЯ

Фізика як і інші природничі науки вивчає властивості матеріального світу, що нас оточує. ***Предметом вивчення фізики є найпростіші і водночас найзагальніші закономірності явищ природи, властивості і будова матерії, її закони руху.***

Для вивчення фізичних явищ і закономірностей, яким вони підлягають, фізика використовує ряд методів: ***метод спостереження, метод експерименту та метод теоретичного узагальнення*** даних спостереження та експерименту.

Процес пізнання у фізиці, як і в інших науках, починається або із спостереження фізичних явищ в природних умовах, або з вивчення їх в штучних (лабораторних) умовах шляхом проведення спеціально поставлених дослідів - ***експериментів***. Родоначальником експериментального методу у фізиці слід вважати Г.Галілея. За структурою експеримент суттєво відрізняється від спостереження наявністю спеціальних матеріальних засобів (експериментальних установок і приладів) впливу на досліджувані об'єкти або процеси. Експеримент є найважливішою частиною будь-якого процесу наукового пізнання взагалі, але роль експерименту особливо істотна у фізиці, тому ***фізика є експериментальною наукою***.

Узагальнення експериментальних даних приводить до більш глибокого рівня пізнання явищ, що вивчаються, - до розробки попереднього наукового припущення про механізм і їх взаємний зв'язок, тобто до ***гіпотези***. Якщо гіпотеза підтверджується новими спостереженнями і експериментами, тобто, якщо вона не тільки правильно пояснює явища, що вивчаються, але і дозволяє на їх основі передбачати нові явища і нові властивості, вона стає ***фізичною теорією***. Зв'язки між фізичними величинами, що встановлюються теорією, стають ***фізичними законами***.

Згодом, завдяки вдосконаленню техніки і методики фізичного експерименту, у міру розвитку фізики, встановлюються нові експериментальні факти, накопичуються нові дані спостережень і дослідів, які вступають у протиріччя зі старою теорією. Тоді її замінює нова теорія. Як правило, нова теорія включає стару як частинний випадок. Подібний процес є нескінченним, оскільки нескінченним є різноманіття властивостей природи.

Таким чином, фізичний експеримент, що є критерієм істинності фізичних теорій, в той же час є основою їх подальшого розвитку і вдосконалення. У зв'язку з цим до експерименту пред'являються досить високі вимоги. Він має забезпечити правильність отриманих результатів і виключити можливість їх неоднозначного трактування.

Вимоги до фізичного досліду:

- Чітке формулювання поставленої задачі.
- Однозначність тлумачення результатів.
- Найповніше виключення впливу другорядних чинників.
- Сталі умови досліду.
- Забезпечення найбільш високої точності вимірювань.
- Повторюваність досліду.

1.2 ОДИНИЦІ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН

Властивості матеріальних об’єктів, що оточують нас, зазвичай характеризуються визначеними фізичними величинами. Кожній фізичній величині притаманна своя ***якісна і кількісна визначеність***.

Якісна визначеність пов'язана з тією властивістю матерії, яку ця величина характеризує. Наприклад, маса тіл характеризує інертні властивості тіл, відносна діелектрична проникність - їх електричні властивості т. ін.

Кількісна визначеність фізичної величини пов'язана з її числовим значенням по відношенню до однорідної з нею величиною. прийнятою за міру. Кількісна сторона фізичної величини визначається в результаті вимірювання.

ВИМІРЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН

Основне завдання фізичного досліду - вимірювання числових значень фізичних величин і встановлення кількісних залежностей між ними.

Вимірювання є пізнавальним процесом, який полягає у порівнянні фізичної величини з однорідною величиною, яка умовно прийнята за одиницю вимірювання.

Одиниця фізичної величини - це фізична величина, якій за визначенням надається числове значення, що дорівнює 1.

Число, яке відображає відношення значення величини до відповідної одиниці цієї фізичної величини, називається ***числовим значенням величини***.

Якщо x - величина, що вимірюється, a - одиниця фізичної величини і A - їх відношення, то результат вимірювання може бути записаний у вигляді $x = Aa$. Це рівняння отримало назву ***основного рівняння вимірювання***.

Потрібно розрізняти істинне та справжнє значення фізичної величини.

Істинне значення фізичної величини - це значення величини, яке ідеально відобразило б як в якісному, так і кількісному відношеннях відповідну властивість об'єкта.

Справжнє значення фізичної величини - це експериментально знайдене значення величини, яке настільки наближається до істинного значення, що в даних умовах може бути використано замість нього.

Для проведення процесу вимірювання в першу чергу необхідно вибрати ***одиниці вимірювання***. При цьому для кожної величини можна було б встановити одиницю вимірювання довільно, незалежно від одиниць інших величин. Однак це привело б до виникнення у формулах, які відображають основні фізичні закони незручних числових коефіцієнтів, що ускладнили розуміння цих законів. Тому визначають тільки одиниці невеликої кількості величин, які називають ***основними***. Одиниці ж інших величин визначають за допомогою виразів, що зв'язують ці величини з тими, одиниці яких вибрані як основні. Такі одиниці називають ***похідними***. При зазначеному

способі вибору одиниць фізичні закони набувають найпростішого вигляду. Сама ж сукупність одиниць утворює певну систему.

Основна фізична величина - це величина, яка входить в систему та умовно прийнята незалежною від інших величин цієї системи.

Похідна фізична величина - це величина, яка входить у систему і визначається через основні величини цієї системи.

Залежність кожної похідної фізичної величини від основних виражається її розмірністю. Розмірність фізичної величини - це вираз, який відображає зв'язок цієї величини з основними величинами системи, при цьому коефіцієнт пропорційності дорівнює одиниці.

Розмірність величини - це добуток позначень основних величин, піднесених у відповідні степені, який є її якісною характеристикою.

Якщо всі показники розмірності деякої величини дорівнюють нулю, то величина називається ***безрозмірною***.

Приклад.

Безрозмірними величинами є відносна деформація, відносна діелектрична проникність та ін.

Розмірна фізична величина - це величина, в розмірності якої хоча б одна з основних величин підноситься до степеня, який не дорівнює нулю.

Найбільш зручною для практичного застосування в різних областях науки і техніки виявилася так звана ***Міжнародна система одиниць фізичних величин*** (скорочено СІ). Вона була затверджена у жовтні 1960 р. XI Генеральною конференцією з мір та терезів (Париж) та є єдиною системою, якою рекомендується користуватися у курсі загальної фізики.

Міжнародна система одиниць охоплює всі області вимірювань механічних, теплових, електричних, магнітних та інших величин. За ***основні одиниці*** у СІ прийняті такі

- довжина - метр (м);

- маса - кілограм (кг);
- час - секунда (с);
- термодинамічна температура - кельвін (К);
- сила електричного струму - ампер (А);
- сила світла - кандела (кд).
- кількість речовини – моль.

Додаткові одиниці системи СІ:

- Плоский кут – радіан (рад);
- Тілесний кут – стерадіан (ср).

Радіан і стерадіан у будь-якій системі одиниць мають значення, яке не залежить від вибору основних одиниць. Тому їх не можна віднести до похідних.

Інші фізичні одиниці у цій системі є ***похідними***.

Для збереження незмінності основних одиниць фізичних величин створюють спеціальні ***еталони*** – міри та вимірювальні пристрої, які призначені для зберігання та відтворення одиниць фізичних величин з найвищою точністю, що може бути досягнута на даному рівні розвитку науки і техніки. Еталони, як правило, для безпосередніх вимірювань фізичних величин не використовують, вони слугують для перевірки зразкових мір і вимірювальних приладів, які в свою чергу використовують для перевірки робочих мір та вимірювальних приладів. Саме вони призначені для практичних цілей вимірювання. Способами вибору і визначення одиниць, зберігання і відтворення їх еталонів займається ***метрологія***.

Еталони основних фізичних величин системи СІ.

Метр - дорівнює шляху, який проходить світло **у** вакуумі за інтервал часу 1/299 792 458 с.

Кілограм - дорівнює масі міжнародного прототипу кілограма. Це платино-іридієве циліндричне тіло, що зберігається у Міжнародному бюро мір і терезів у Севрі, поблизу Парижу. За допомогою платино-іридієвого прототипу кілограм відтворюється з відносною похибкою $2 \cdot 10^{-8}$, що вже не задовольняє сучасні потреби. Тому зараз іде розробка нового еталону маси.

Секунда - дорівнює 9 192 631 770 періодам випромінювання, що відповідає переходу між двома надтонкими рівнями основного стану атома цезію-133.

Ампер - дорівнює силі незмінного струму, який при проходженні по двох паралельних прямолінійних провідниках нескінченної довжини та дуже малої площі кругового перерізу, розміщених у вакуумі на відстані 1 м один від одного, спричинив би виникнення на кожній ділянці провідника довжиною 1 м силу взаємодії $2 \cdot 10^{-7} H$.

Кельвін - дорівнює 1/273,16 частині термодинамічної температури потрійної точки води.

Моль - дорівнює кількості речовини системи, яка містить стільки ж структурних елементів, скільки міститься атомів у вуглеці-12 масою 0,012 кг.

При застосуванні моля структурні елементи повинні бути специфікованими і можуть бути атомами, молекулами, іонами, електронами та іншими частинками або їх групами.

Кандела - дорівнює силі світла в заданому напрямі джерела, що дає монохроматичне випромінювання частотою $540 \cdot 10^{12} Гц$, енергетична сила світла якого у цьому напрямі становить 1/683 Вт/ср.

Радіан - це кут між двома радіусами кола, довжина дуги між якими дорівнює радіусу.

Стерадіан - це тілесний кут з вершиною у центрі сфери, який вирізує на поверхні сфери площу, що дорівнює площі квадрата з стороною, рівною радіусу сфери.

Поряд з одиницями СІ допускається використання одиниць відносних та логарифмічних величин.

Відносна величина - це величина, що дорівнює безрозмірному відношенню фізичної величини до однойменної величини, яку взято за вихідну. Відносні величини безрозмірні одиниці. Їх можна також виражати у позасистемних відносних одиницях: відсотках, проміле і мільйонних частинах.

Відсотком називається одиниця відносної величини, яка дорівнює одній сотій безрозмірної одиниці і позначається *%*.

Проміле - це одиниця відносної величини, яка дорівнює одній тисячній безрозмірної одиниці і позначається $^{0}/_{00}$.

Мільйонною часткою називається одиниця, яка дорівнює одній мільйонній безрозмірної одиниці і скорочено позначається $млн^{-1}$.

Якщо безрозмірне відношення однойменних фізичних величин змінюється в широких межах, то зручно використовувати логарифмічні величини.

1.3 ВИДИ ВИМІРЮВАНЬ

Лабораторні заняття є невід'ємним елементом процесу вивчення курсу загальної фізики, оскільки, як вже зазначалося, фізика є експериментальною наукою. У відповідності з цим у фізичному практикумі перед студентами стоять дві основні задачі: 1) поглиблення розуміння навчального матеріалу курсу фізики та дослідна перевірка найбільш важливих ідей і законів фізики; 2) вироблення навичок самостійної дослідницької роботи, і навичок грамотного вимірювання фізичних величин, що є найважливішим елементом техніки фізичного експерименту.

Основна задача фізичного досліду - визначення числових значень фізичних величин і встановлення кількісних залежностей між ними. Для цього результати будь-якого фізичного експерименту необхідно вміти аналізувати. Це означає, що при виконанні лабораторного практикуму необхідно навчитися не тільки вимірювати різні фізичні величини, але й знаходити зв’язки між ними, співставляти результати експерименту з висновками теорії тощо.

Процес проведення будь-якого досліду складається зі здійснення вимірювань і їх обробки за допомогою обчислень**.** При цьому всі вимірювання можуть бути поділені на дві групи: ***прямі та непрямі***.

Прямими називаються вимірювання, результат яких може бути одержаний безпосередньо з досліду. Приклад - вимірювання довжини тіла за допомогою лінійки або штангенциркуля, вимірювання струму амперметром та ін.

Часто величина, що вимірюється, не може бути знайдена безпосередньо. У цьому випадку для її знаходження виконують декілька прямих вимірювань інших величин, що функціонально зв'язані з нею і шляхом розрахунків знаходять її значення. Такі вимірювання називають ***непрямими***. До них відносяться, наприклад, вимірювання об'єму тіла, поверхневого натягу рідини, її коефіцієнта в'язкості та ін.

Рівняння непрямого вимірювання у загальному випадку має вигляд:

$$Y = f\left(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots a_n\right), \qquad (1)$$

де a_i - аргументи, отримані при прямих вимірюваннях, або відомі константи.

Під час вимірювання будь-якої фізичної величини як правило доводиться виконувати три послідовні операції:

- Вибір, перевірку і підключення вимірювальних приладів;
- Спостереження показів приладів і відлік;
- Розрахунок вимірюваної величини за результатами вимірювань, визначення похибок.

1.4 ВИДИ ПОХИБОК

Жодне вимірювання неможливо здійснити абсолютно точно. Одержане в результаті вимірювань значення фізичної величини завжди відрізняється від справжнього значення. Це обумовлено недосконалістю вимірювальної апаратури, несталістю умов вимірювання, похибками методу вимірювання, недосконалістю органів чуття спостерігача та ін. Тому всі вимірювання проводять тільки з визначеним ступенем точності і в результаті отримують не точне значення величини, а лише наближене, яке включає невідому нам похибку. Теорія похибок дозволяє оцінити граничні значення похибки при вимірюванні, тобто визначати інтервал, у якому з заданою імовірністю знаходиться справжнє значення вимірюваної величини.

Абсолютною похибкою вимірювання фізичної величини називається відхилення результату вимірювання a_i від її точного значення A

$$\Delta a_i = a_i - A. \qquad (2)$$

де A - точне або істинне значення фізичної величини.

Оскільки точне значення будь-якої фізичної величини невідоме, замість нього беруть середнє арифметичне значення серії n експериментальних вимірювань:

$$\langle a \rangle = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad (3)$$

Тоді похибка *i*–того вимірювання дорівнює

$$\Delta a_i = a_i - \langle a \rangle. \qquad (4)$$

Якщо вимірювана величина більша за справжнє значення, похибка додатна, якщо менша - похибка від'ємна. Величина абсолютної похибки ***не характеризує якість*** вимірювання.

Приклад: *якщо абсолютна похибка при вимірюванні столу довжиною в* $L_1 = 1\,м$ *складає* $\Delta_{L1} = 1\,мм$ *- це гарна якість вимірювання, а якщо з такою ж похибкою виміряли діаметр* $L_2 = 1\,см$ *олівця* $\Delta_{L1} = \Delta_{L2} = 1\,мм$*, то це невисока якість вимірювання.*

Характеристикою якості вимірювання є відносна похибка**.** Це відношення абсолютної похибки до справжнього значення цієї величини

$$\delta a_i = \frac{\Delta a_i}{\langle a \rangle} 100\%. \qquad (5)$$

Вона, зазвичай, виражається у відсотках.

***Приклад**: Візьмемо попередній приклад - вимірювання довжини столу $L_1 = 1\,м$ і діаметра $L_2 = 1\,см$ олівця.*

Тоді відносні похибки вимірювань дорівнюють.

Для столу

$$\delta_1 = \frac{\Delta L_1}{L_1} 100\% = \frac{10^{-3}}{1} 100\% = 0{,}1\%,$$

для олівця:

$$\delta_1 = \frac{\Delta L_2}{L_2} 100\% = \frac{10^{-3}}{10^{-2}} 100\% = 10\%.$$

Видно, що відносна похибка вимірювання довжини столу в 100 разів менша за відносну похибку вимірювання діаметру олівця, тобто якість вимірювання довжини столу в 100 разів вища при однаковій величині абсолютної похибки.

Похибки, що виникають при вимірюваннях прийнято поділяти на три групи: ***систематичні, випадкові та промахи*** (грубі помилки)

Промахи це помилки, які виникають у результаті неправильних дій експериментатора. Вони можуть виникати внаслідок невірного запису показів приладів, грубих неточностей при настроюванні приладів, порушень умов проведення досліду, описок т. ін. На грубу помилку окремого вимірювання вказує різка відмінність його від попередніх або наступних результатів. При обробці результатів вимірювань ***виявлені промахи потрібно відкидати*** та проводити додаткові вимірювання.

Систематична похибка $\Delta_{сист}$ це складова загальної похибки вимірювання, яка за однакових умов залишається сталою при повторних вимірюваннях фізичної величини. ***Систематичні похибки***, обумовлені причинами, що діють однаково під час усіх вимірювань. Вони викликаються несправністю вимірюва-

льних приладів, неправильним вибором методики вимірювань, дефектами градуювання вимірювального приладу та ін.

Аналіз джерел систематичних похибок - одна з основних задач при виконанні точних вимірювань. Для усунення систематичної похибки використовують методи вимірювання, які ґрунтуються на порівнянні фізичних величин. Часто знайдена систематична похибка може бути виключена з результату вимірювання шляхом введення відповідної поправки. Способи оцінки систематичної похибки описані нижче.

Випадкова похибка $\Delta_{вип}$ - це інша складова загальної похибки вимірювання, яка при повторних вимірюваннях за тих же умов змінюється випадково, без якоїсь закономірності. Випадкові похибки є наслідком накладання випадкових процесів, що супроводжують будь-яке фізичне вимірювання і впливають на його результат. Слід зазначити, що на відміну від систематичної похибки, випадкова похибка зменшується при збільшенні кількості повторних вимірювань. Спосіб оцінки випадкової похибки описаний нижче.

1.4.1 Випадкові похибки

Випадкові похибки - це помилки які вносяться самим експериментатором. Випадкові помилки це низка знакозмінних величин, які присутні завжди при будь-яких вимірюваннях. Якщо при вимірюваннях ми не знайшли випадкових похибок, то це означає, що метод вимірювання є недостатньо точним, або вимірювальні прилади недостатньо чутливі.

Гаус встановив ***закон нормального розподілу***, згідно з яким розподіляються похибки даної серії вимірювань. Крива на рис.1.1 відповідає граничному значенню нескінченно великого числа вимірювань. Найймовірніше значення вимірюваної величини (модуль розподілу) при нормальному розподілу є середнім арифметичним з усіх результатів вимірювань:

$$\langle a \rangle = \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_3)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad (6)$$

$$\langle a \rangle \to A \quad при \quad n \to \infty$$

Закон нормального розподілу свідчить, що найймовірнішими є похибки поблизу справжнього значення фізичної величини. Похибки, однакові за величиною, але протилежні за знаком, є рівноймовірними. Площа під кривою Гауса дорівнює одиниці $\int_{-\infty}^{+\infty} adx = 1$ оскільки ймовірність того, що справжнє значення фізичної величини лежить в інтервалі від - ∝ до +∝ є достовірною подією (***довірча ймовірність P=1***).

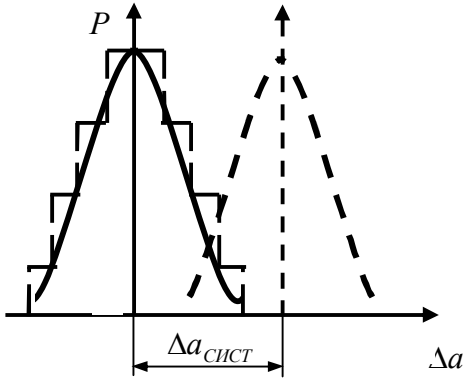

Рисунок 1.1 Закон нормального розподілу випадкових похибок.

Видно, що за наявності систематичної похибки графік розподілу зміщується на величину систематичної похибки в залежності від її знаку.

При скінченному числі вимірювань розподіл похибок дискретний. Він зображений ламаною лінією на рис.1.1. У цьому випадку говорять про імовірності виникнення похибки даної величини, лежить в межах заданого інтервалу. Тут Δa - випадкова помилка *i*-го вимірювання, $P = \frac{\Delta n}{n}$ - імовірність виникнення похибки даної величини, Δn - число випадків виникнення похибки даної величини, *n* - загальне число вимірювань.

1.4.2 Оцінка випадкової похибки

Встановимо, чому дорівнює випадкова похибка Δ справжнього значення величини $\langle a \rangle$. У теорії похибок показано, що за оцінку випадкової похибки Δ середнього арифметичного значення $\langle a \rangle$ треба брати середнє квадратичне відхилення σ, яке обчислюється за формулою:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\left(a_1 - \langle a \rangle\right)^2 + \left(a_2 - \langle a \rangle\right)^2 + \ldots + \left(a_n - \langle a \rangle\right)^2}{n(n-1)}},$$

або

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(a_i - \langle a \rangle\right)^2}{n(n-1)}}, \qquad (7)$$

де n – кількість проведених вимірювань, $\langle a \rangle$ - середнє арифметичне значення вимірюваної величини.

Інколи замість середньоквадратичного відхилення використовують середньоарифметичне значення абсолютних похибок.

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(a_i - \langle a \rangle\right)}{n}. \qquad (8)$$

Важливою особливістю цих співвідношень є те, що величина випадкової похибки σ залежить від числа вимірювань *n*. Звідси випливає, що зменшити випадкову похибку можна шляхом збільшення кількості повторних вимірювань.

Величина похибки визначає інтервал, у який справжнє значення вимірюваної величини попадає з визначеною імовірністю *P* (***довірчою ймовірністю***). Знайдемо довірчу імовірність для ряду випадків.

Теорія похибок показує, що для великої кількості вимірювань $n > 30$, випадкова похибка дорівнює середньому квадратичному відхиленню $\Delta = \sigma$, а довірча імовірність складає P=0,68. Якщо, як оцінку випадкової похибки, взяти значення $\Delta = 2\sigma$, то при багаторазових вимірюваннях у збільшений інтервал справжнє значення попаде з довірчою імовірністю P = 0,95, у випадку інтервалу $\Delta = 3\sigma$ - P=0,997 (рис.1.2). Ми бачимо, що довірча ймовірність збільшується зі збільшенням довірчого інтервалу. Це випливає з того, що оскільки при розширенні інтервалу площа кривої Гауса, яка попадає у цю область, збільшується.

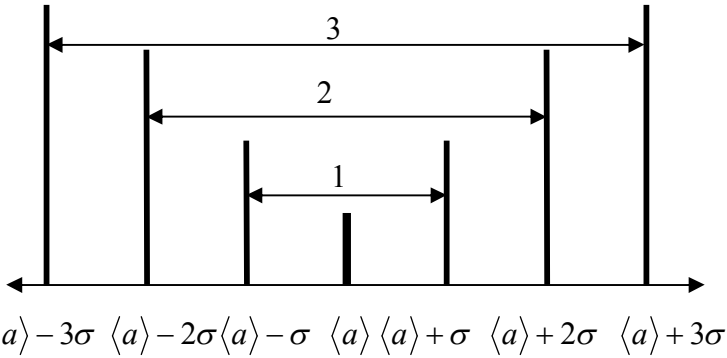

Рисунок 1.2 Зв’язок довірчої ймовірності з середнім квадратичним відхиленням

Якою ж оцінкою для випадкової похибки потрібно користуватися? Для вимірювань, які проводяться з навчальними цілями, звичайно для оцінки Δ беруть σ, тоді P=0,68. Для наукових вимірювань використовують $\Delta = 2\sigma$ (P=0,95). В особливо відповідальних випадках, коли проведені вимірювання пов'язані зі створенням еталонів або мають важливе значення для збереження здоров’я людей, для оцінки випадкової похибки беруть $\Delta = 3\sigma$ (P=0,997).

При виконанні лабораторних робіт будемо вважати, що $\Delta = \sigma$.

1.4.3 Клас приладу і точність вимірювання

Для характеристики більшості вимірювальних приладів використовують поняття ***класу точності (приведеної похибки)***. Похибка приладів оцінюється шляхом порівняння їх показань з показаннями інших приладів високої точності. ***Абсолютна похибка*** при вимірюванні дорівнює:

$$\Delta a = a_i - a_{cn}. \tag{9}$$

Відношення абсолютної похибки до верхньої межі вимірювань приладу (номінального значення) a_H називається ***приведеною похибкою:***

$$\gamma = \frac{\Delta a}{a_H}. \tag{10}$$

Виражена у відсотках найбільша приведена похибка приладу називається його ***класом точності.***

Існують прилади восьми основних класів:

γ =0,05 і 0,1 - еталонні;

γ =0,2 і 0,5 – лабораторні, які застосовують для точних вимірювань;

γ =1,0; 1,5; 2,5 - технічні,

γ =4 - індикаторні.

Клас точності, зазвичай, вказують на шкалі приладу. У випадку, коли такого позначення немає, то даний прилад є позакласним, тобто його приведена похибка більша за 4%. Підприємство, яке випускає прилад, гарантує відносну похибку вимірювання, яка дорівнює класу точності приладу при вимірюванні величини, що дає покази на всю шкалу.

Визначивши за шкалою клас точності і граничне значення, можна розрахувати його абсолютну похибку

$$\Delta a = \pm \frac{\gamma}{100\%} \cdot a_H . \qquad (11)$$

Приклад.

Розрахуємо абсолютну похибку вимірювання напруги вольтметром класу 0,5 при верхній межі вимірювань 30 В:

$$\Delta U = \pm 30B \cdot 0{,}5\% = \pm 30B \cdot 0{,}005 = \pm 0{,}15\ B .$$

Знаки $(+)$ і $(-)$ показують, що похибка може бути як зменшеною, так і збільшеною від справжнього значення вимірюваної величини. Слід зазначити, що при використанні приладу для конкретних вимірювань часто вимірювана величина дає покази не на всю шкалу. Це збільшує відносну похибку вимірювання.

Для оптимального використання приладів, їх вибирають так, щоб значення вимірюваної величини попадало у кінець шкали приладу, це зменшує відносну похибку вимірювання і наближає її до класу точності приладу.

Точність приладу неможливо покращити ніякою зміною методів вимірювання. Для більш точних вимірювань застосовують прилади більш високого класу.

Приклад.

Так для вимірювання товщини дроту не можна користуватися лінійкою з міліметровими поділками, потрібен штангенциркуль, мікрометр, чи інший більш точний прилад (наприклад, мікроскоп). А для вимірювання площі лабораторного столу достатньо метрової лінійки з сантиметровими поділками.

1.4.4 Систематичні похибки, оцінка їх величини

Як вже вказувалося, систематичні похибки при вимірюваннях в однакових умовах залишаються сталими. Це приводить до деякого зміщення кривої Гауса відносно точного значення фізичної величини (рис. 1.1). Тому необхідно навчитися виявляти систематичні похибки.

ТАБЛИЦЯ 1. Класифікація систематичних похибок

Тип систематичної похибки	*Спосіб оцінки або виключення*	*Приклад*
Постійна похибка відомої величини і знаку.	Може бути виключена шляхом уведення поправки (додатної або від'ємної).	Зміщення стрілки приладу від нульового положення на відоме число поділок.
Похибка градуювання приладу.	Може бути оцінена за класом точності приладу або за ціною поділки шкали приладу (виключити не можливо).	Ціна поділки лінійки дорівнює 1 мм. Систематична похибка градуювання складає 0,5 мм.
Похибка округлення числа.	Оцінюється як половина останнього зазначеного при округленні розряду числа.	Коли число π округлене до 3,14, то похибка округлення дорівнює 0,005, якщо беремо $\pi \approx 3{,}1$, то похибка - 0,05.
Похибка, про яку експериментатор тільки здогадується.	Похибку можна виявити шляхом вимірювання тієї ж величини за допомогою різних методів за різних умов.	Виявлення різноплечності терезів шляхом зважування на них тіла то на лівій, то правій чашках.

В табл.1 подано класифікацію систематичних похибок, способи їх виявлення та оцінки.

Варто докладніше розглянути систематичні похибки типу 2 (табл.1), а саме ***похибки градуювання приладу***. Такі похибки має будь-який вимірювальний прилад.

У випадку, коли клас точності приладу не зазначений (наприклад, штангенциркуль, мікрометр, лінійка), систематичну похибку визначають за ціною поділки. ***Ціною поділки приладу*** називають таку зміну фізичної величини, яка викликає переміщення стрілки приладу на одну поділку. Вважається, що **систематична похибка даного приладу дорівнює половині ціни поділки шкали** (в окремих випадках 1/3).

Приклад.

При вимірюванні довжину столу за допомогою лінійки з ціною поділки $1\ мм$*, систематична похибка вимірювання дорівнює* $0{,}5\ мм$.

Слід запам'ятати, що ***систематична похибка не може бути зменшена шляхом повторних вимірювань.***

Інші типи систематичних похибок наведені у таблиці 1.

1.5 ДОДАВАННЯ ПОХИБОК

Загальна абсолютна похибка вимірювання Δ, як вказувалося, містить дві складові: систематичну похибку $\Delta_{сист}$ і випадкову похибку $\Delta_{вип}$.

Можна окремо оцінити величину систематичної $\Delta_{сист}$ і випадкової похибки $\Delta_{вип}$. Тоді загальна абсолютна похибка знаходиться за формулою

$$\Delta = \sqrt{\Delta_{сист}^2 + \Delta_{вип}^2} \qquad (12)$$

Додавання похибок можна інтерпретувати і графічно (рис.1.3).

Загальна похибка Δ дорівнює гіпотенузі трикутника, катетами якого є $\Delta_{сист}$ і $\Delta_{вип}$. Покажемо, що часто при додаванні

похибок формулою (3) можна і не користуватися. Нехай одна з похибок, наприклад $\Delta_{сист}$, у 2 рази менша за $\Delta_{вип}$. Тоді, згідно з виразом (12)

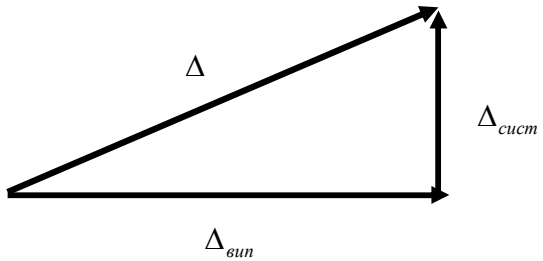

Рисунок 1.3 Графічне додавання випадкової та систематичної похибок.

$$\Delta = \sqrt{\Delta_{сист}^2 + \Delta_{вип}^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta_{вип}}{2}\right)^2 + \Delta_{вип}^2} = \Delta_{вип}\sqrt{\frac{5}{4}} = 1{,}1 \cdot \Delta_{вип} \qquad (13)$$

Видно, що абсолютна похибка у цьому випадку лише на 10% більша за випадкову. Враховуючи, що похибку рідко вдається оцінити з точністю кращою за 10-20%, в даному випадку можна взяти $\Delta = \Delta_{вип}$, тобто систематичною похибкою $\Delta_{вип}$ можна взагалі знехтувати.

1.6 ПРАВИЛА ВИЗНАЧЕННЯ ПОХИБКИ ВИМІРЮВАНЬ

Із вищезазначеного випливають наступні ***правила визначення похибки вимірювання:***

1) У випадку, коли систематична похибка у два і більше рази перевищує випадкову, випадковою похибкою можна знехтувати; велику кількість вимірювань при цьому проводити недоцільно, оскільки систематична похибка $\Delta_{сист}$ не зменшується

при збільшенні n. Тобто, коли $\Delta_{сист} > 2\Delta_{вип}$, то $\Delta \approx \Delta_{сист}$ (при цьому досить провести три-чотири вимірювання тільки для того, щоб переконатися, що покази приладу повторюються без випадкових відхилень).

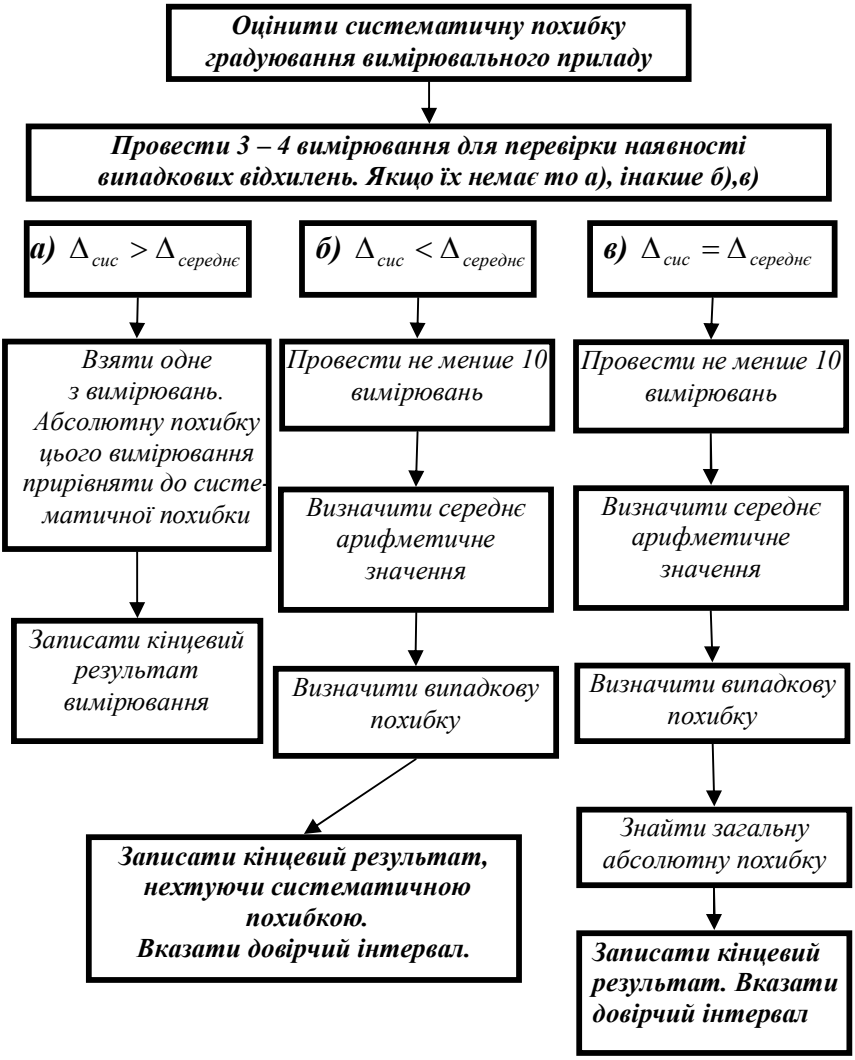

Рис. 1.4 Схема визначення похибки прямих вимірювань

2) Коли ж випадкова похибка більш ніж у 2 рази перевищує систематичну, то останньою можна знехтувати, тобто коли $\Delta_{вип} > 2\Delta_{сист}$, то $\Delta \approx \Delta_{вип}$ (бажано провести більшу кількість вимірювань для зменшення $\Delta_{вип}$).

3) У випадку, коли обидві складові загальної абсолютної похибки приблизно однакові їх потрібно додавати за формулою (12) або графічно (рис.1.3). Кількість вимірювань доцільно збільшити для зменшення $\Delta_{вип}$ і переходу до випадку 1.

Зважаючи на те, що замість $\Delta_{вип}$ можна взяти середньо квадратичне відхилення σ, то співвідношення (12) набуде вигляду: $\Delta = \sqrt{\Delta^2 + \sigma^2}$ На схемі (рис.1.4) узагальнені методи визначення похибки при прямих вимірюваннях.

1.7 ПРАВИЛА ОКРУГЛЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

Розраховуючи значення систематичної, випадкової і сумарної похибок, особливо при використанні електронного калькулятора, зазвичай одержують ці значення з великим числом знаків. Однак вхідні дані для розрахунків завжди вказуються з певним числом значущих цифр. Клас точності приладу на його шкалі вказується не більше, ніж із двома значущими цифрами, а середнє квадратичне відхилення не має сенсу записувати з більш ніж двома значущими цифрами, оскільки точність цієї оцінки при 10 вимірюваннях не вища за 30%.

Оскільки точність визначення фізичної величини визначається вимірюванням, а не розрахунками, то округлення числового значення результату вимірювання виконується до цифри того ж порядку, що і значення похибки.

Внаслідок цього в кінцевому значенні розрахункової похибки мають бути залишені тільки перші одна - дві значущі цифри.

При цьому необхідно враховувати наступне. У випадку, коли отримане число починається з цифри 1 або 2, то відкидання другого знаку приводить до дуже великої помилки (до 30 - 50%),

що неприпустимо. Якщо ж отримане число починається, наприклад, з цифри 9, то збереження другого знака, тобто вказівка похибки, наприклад, 0,94 замість 0,9, є недоцільно, тому що вихідні дані не забезпечують такої точності.

У підсумку можна сформулювати ***правила округлення*** розрахованого значення похибки та отриманого експериментального результату вимірювання:

1) Зайві цифри у цілих чисел замінюються нулями, а у десятинних дробів відкидаються;

Приклад,

$Y = 123\,357 \pm 678$ *(до округлення)*

$Y = 123\,400 \pm 700$ *(після округлення)*

2) Якщо цифра, яка замінюється нулем чи відкидається, менша за 5, то цифри, що залишаються, не змінюються. Коли ж вказана цифра більша 5, то остання цифра, яка залишається збільшується на одиницю.

Приклад,

$Y = 237{,}46 \pm 0{,}13$ *(до округлення)*

$Y = 237{,}5 \pm 0{,}1$ *(після округлення)*

3) У випадку, коли цифра, яка замінюється нулем, або відкидається дорівнює 5 (з наступними нулями), то округлення виконують так: остання цифра в округленому числі залишається без зміни, коли вона парна і збільшується на одиницю, коли вона є непарною.

Приклад,

$Y = 237{,}465 \pm 0{,}127$ *(до округлення)*

$Y = 237{,}46 \pm 0{,}13$ *(після округлення)*

$Y = 237{,}5 \pm 0{,}1$ *(після округлення)*

4) Абсолютна похибка результату вимірювання вказується двома значущими цифрами, якщо перша з них дорівнює 1 або 2, і однією, - якщо перша є 3 і більше.

5) Середнє значення вимірюваної величини округляється до того ж десяткового розряду, яким закінчується округлене значення абсолютної похибки.

6) Відносну похибку, виражену у відсотках, досить записати двома значущими цифрами.

7) Округлення проводиться лише в остаточній відповіді, а всі попередні обчислення беруть з одним-двома зайвими знаками.

***Приклад**:*

На вольтметрі класу точності 2,5 *з межею виміюваньв 300 В було виконано кілька повторних вимірювань напруги. При цьому виявилося, що усі вимірювання дали однаковий результат* 267,5 В.

Відсутність розходжень між знаками говорить про те, що випадкова похибка дуже маленька, тому сумарна похибка збігається із систематичної (див. рис. 4 а).

Спочатку знайдемо абсолютну, а потім відносну похибки. Абсолютна похибка градуювання приладу дорівнює:

$$\Delta U = 300B \times \frac{2{,}5\%}{100\%} = 7{,}5B \approx 8B\,.$$

Оскільки перша значуща цифра *абсолютної похибки більша трьох, то це значення має бути округлене до* 8 В.

Відносна похибка:

$$\delta_U = \frac{7{,}5B}{267{,}5B} \times 100\% = 2{,}81\% \approx 2{,}8\%\,.$$

У значенні відносної похибки мають бути збережені два значущі розряди 2,8 %.

Таким чином, у висновках потрібно записати “Вимірювана напруга дорівнює $U = (268 \pm 8)B$ з відносною похибкою δ_U*=2,8%* ”.

1.8 ПОХИБКИ НЕПРЯМИХ ВИМІРЮВАНЬ

Розглянемо, як знаходити похибки фізичної величини *Y* у випадку непрямих вимірювань (див. п.1.8.). Загальний вид рівняння вимірювання у цьому випадку задається співвідношенням (1).

На практиці використовують два способи розрахунку похибки непрямих вимірювань (див. п.1.8.). Обидва способи дають практично однаковий результат.

Спосіб 1.

Спочатку знаходиться абсолютна Δ, а потім відносна δ похибки. Цей спосіб рекомендується для таких рівнянь вимірювання, які містять суми і різниці аргументів.

Загальна формула для розрахунку абсолютної похибки при непрямих вимірюваннях фізичної величини *Y* для довільного виду *f* функції має вигляд:

$$\Delta Y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a_1}\right)^2 \cdot \Delta a_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial a_2}\right)^2 \cdot \Delta a_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial a_n}\right)^2 \cdot \Delta a_n^2}\,, \qquad (13)$$

де $\frac{\partial f}{\partial a_i}$ - частинні похідні функції $f(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots a_n)$ за аргументами $a_1, a_2, \ldots a_n$; Δa_i - загальна похибка прямих вимірювань величини a_i.

Для знаходження відносної похибки потрібно насамперед знайти середнє значення величини *Y*. Для цього в рівняння вимірювання (1) потрібно підставити середні арифметичні значення величин a_i.

Тоді середнє значення величини *Y* дорівнює:

$$\langle Y \rangle = f\left(\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle, \ldots \langle a_n \rangle\right). \qquad (14)$$

Тепер можна знайти відносну похибку

$$\delta_Y = \frac{\Delta Y}{\langle Y \rangle}. \qquad (15)$$

Приклад.

Знайти похибку вимірювання об'єму V циліндру, якщо висота h і діаметр D циліндру визначені шляхом прямих вимірювань, кількість вимірювань n=10 .

Вираз для розрахунку об'єму циліндра, тобто рівняння вимірювання має вигляд:

$$\langle V \rangle = \frac{1}{4}\pi \cdot \langle D \rangle^2 \cdot \langle h \rangle = f\left(\langle D \rangle, \langle h \rangle, \langle \pi \rangle\right).$$

Нехай $\langle h \rangle = 25{,}3$ *мм*; $\Delta h = 0{,}2$ *мм, при* $P = 0{,}68$.

$\langle D \rangle = 1{,}54$ *мм*, $\Delta D = 0{,}15$ *мм, при* $P = 0{,}68$.

$\pi = 3{,}14$ $\Delta\pi = 0{,}005$ - *похибка округлення числа* π .

Тоді, підставивши у формулу (13) середні значення величин, знайдемо:

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial D} \cdot \Delta D\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial h} \cdot \Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \pi} \cdot \Delta \pi\right)^2}. \qquad (*)$$

Розрахуємо часткові похідні

$$\frac{\partial f}{\partial D} = \frac{2\pi D h}{4} = \frac{2\pi D^2 h}{4D} = \frac{2\langle V \rangle}{\langle D \rangle},$$

$$\frac{\partial f}{\partial h} = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi D^2 h}{4h} = \frac{\langle V \rangle}{\langle h \rangle},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \pi} = \frac{D^2 h}{4} = \frac{\pi D^2 h}{4\pi} = \frac{\langle V \rangle}{\langle \pi \rangle}.$$

Підставимо ці значення у співвідношення (*)

$$\Delta V = \langle V \rangle \sqrt{\left(\frac{2(\Delta D)}{\langle D \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\langle h \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \pi}{\pi}\right)^2}\ .$$

Після підставлення числових значень величин знайдемо

$$\langle V \rangle = \frac{1}{4} 3{,}14 \cdot \left(1{,}54 \cdot 10^{-3}\right)^2 \cdot 25{,}3 \cdot 10^{-3} = 47{,}10 \cdot 10^{-9}\, м^3,$$

$$\Delta V = 47{,}10 \cdot 10^{-10} \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 0{,}15}{1{,}54}\right)^2 + \left(\frac{0{,}2}{25{,}3}\right)^2 + \left(\frac{0{,}005}{3{,}14}\right)^2}\ .$$

$$= 9{,}18 \cdot 10^{-10} \approx 9 \cdot 10^{-10}\, м$$

Видно, що похибка вимірювання об'єму у даному прикладі залежить, в основному від похибки вимірювання діаметру.

Відносна похибка

$$\delta = \frac{\Delta V}{\langle V \rangle} \cdot 100\% = \frac{9}{47{,}1} \cdot 100\% = 19{,}1\% \approx 19\%$$

Маємо кінцевий результат після округлення:

$$V = (47 \pm 9) \cdot 10^{-10}\, м^3;\ \delta = 19\%,\ P = 0{,}68$$

Спосіб 2.

Цей спосіб визначення похибки непрямих вимірювань відрізняється від першого способу меншими математичними ускладненнями, тому його використовують частіше.

Спочатку знаходять відносну похибку δ, і тільки потім - абсолютну Δ. Цей спосіб рекомендується у випадку, коли рів-

няння вимірювання містить тільки добутки і відношення аргументів.

Порядок дій розглянемо на тому ж прикладі - визначення похибки при вимірюванні об'єму циліндру. При цьому збережемо значення конкретних фізичних величин.

При застосуванні способу 2 потрібно виконати наступні дії:

1) Злогарифмувати рівняння вимірювання (логарифм беремо натуральний):

$$\ln\langle V\rangle = \ln\left(\frac{1}{4}\pi\cdot\langle D\rangle\cdot\langle h\rangle\right) = \ln\pi + \ln\langle D\rangle + \ln\langle h\rangle - \ln 4\,.$$

2) Знайти диференціали лівої і правої частин, вважаючи $\pi, \langle D\rangle, \langle h\rangle$ незалежними змінними:

$$\frac{dV}{\langle V\rangle} = \frac{d\pi}{\pi} + 2\frac{dD}{\langle D\rangle} + \frac{dh}{\langle h\rangle}\,.$$

3) Замінити диференціал кожної величини на абсолютну похибку цієї ж величини, а знаки "мінус", якщо вони є перед похибками, на "плюс".

Насправді число π – величина стала, але, в залежності від точності обчислень, її беруть з різним числом знаків, тому формально, її можна вважати змінною величиною. Зазвичай, беруть значення π =3,14, тоді $\Delta\pi$ ~0,0016.

$$\frac{\Delta V}{\langle V\rangle} = \frac{\Delta\pi}{\pi} + 2\frac{\Delta D}{\langle D\rangle} + \frac{\Delta h}{\langle h\rangle}\,.$$

4) Здається, що за допомогою цієї формули вже можна дати оцінку для відносної похибки $\frac{\Delta V}{\langle V\rangle}$, однак це не так. Потрі-

бно так оцінити похибку $\frac{\Delta V}{\langle V \rangle}$, щоб довірча імовірність цієї оцінки збігалася з довірчими ймовірностями оцінок похибок тих членів, які стоять у правій частині формули. Для цього, щоб ця умова виконувалася, потрібно всі члени останньої формули піднести до квадрату:

$$\left(\frac{\Delta V}{\langle V \rangle}\right)^2 = \left(\frac{\Delta \pi}{\pi}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta D}{\langle D \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\langle h \rangle}\right)^2.$$

5) Тепер можна обчислити відносну похибку результату, для цього треба взяти квадратний корінь з обох частин рівняння:

$$\delta = \frac{\Delta V}{\langle V \rangle} = \sqrt{\left(\frac{\Delta \pi}{\pi}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta D}{\langle D \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\langle h \rangle}\right)^2}$$

Імовірність цієї оцінки похибки об'єму буде збігатися з імовірністю оцінки похибок членів, що входять у вираз: $P_V = P_D = P_h$

Виконаємо підрахунки і переконаємося, що результат збігається з оцінкою за способом 1**:**

$$\delta = \frac{\Delta V}{\langle V \rangle} = \sqrt{2{,}5 \cdot 10^{-6} + 3{,}8 \cdot 10^{-2} + 0{,}62 \cdot 10^{-6}} = 0{,}19.$$

Тепер, знаючи відносну похибку, знаходимо абсолютну:
$\Delta V = 0{,}19 \cdot 47 \cdot 10^{-10} = 9{,}4 \cdot 10^{-10}\, м^3, \quad P = 0{,}68.$
Остаточний результат після округлення має вигляд:
$V = (47 \pm 9) \cdot 10^{-10}\, м^3;\ \delta = 19\%,\ P = 0{,}68,$
який збігається з результатом отриманим за способом 1.

1.9 ГРАФІЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

Часто результати вимірювань зручно наводити графічно. Графік при цьому будується за допомогою таблиці, яка вміщує достатню кількість вимірювань однієї фізичної величини – y (функція), які вона приймає при різних значеннях іншої величини – x (аргумент). Масштаб на графіку визначається так, щоб найменша відстань на графіку була не меншою за абсолютну похибку вимірювання. Результати вимірювання наносять у вигляді точок, а потім їх з'єднують плавною лінією. Лінію проводять так, щоб точки, які відповідають окремим вимірюванням, розташовувалися симетрично з обох її боків (див.рис.1.6). Для побудови кривих, які найбільш відповідають результатам вимірювань широко використовується метод найменших квадратів.

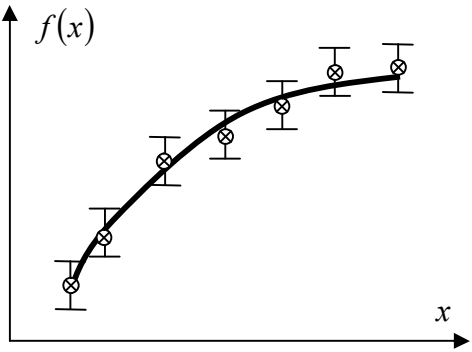

Рисунок 1.6 Графічне зображення результатів вимірювань

1.10 ВИМОГИ ДО ПІДГОТОВКИ, ВИКОНАННЯ І ЗВІТУ З ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

Студент має приходити на лабораторні заняття, вивчивши теорію поставленої у відповідній лабораторній роботі практичної задачі. Для цього студент повинен використати лекційний матеріал та матеріал методичних посібників до лабораторної роботи, а також зазначену у них методичну літературу.

У звіті з лабораторної роботи потрібно записати:

1. Прізвище, імя та по-батькові.
2. Номер лабораторної роботи.
3. Назву виконуваної роботи.
4. Навести схему установки.
5. Вивести розрахункову формулу роботи.
6. Усі результати вимірювань мають бути наведені у вигляді таблиць і коли це потрібно – графіків.
7. Підрахувати абсолютну і відносну похибку результатів вимірювань.
8. Результат вимірювань має бути представлений з точністю до 2-3 значущих цифр з урахуванням абсолютної похибки вимірювань.
9. Сформулювати висновок.

1.11 ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

a_i - величина, знайдена при прямих вимірюваннях.

$a_{сп}$ - справжнє значення величини.

Δa - абсолютна похибка вимірювання фізичної величини a. Вона дорівнює $\Delta a = a_i - a_{сп}$.

δ - відносна похибка вимірювання, яка знаходиться так:

$$\delta a_i = \frac{\Delta a_i}{\langle a \rangle} 100\%$$

$\Delta_{сист}$ - систематична похибка (входить до складу загальної абсолютної похибки Δ)

$\Delta_{вип}$ - випадкова похибка (інша складова загальної абсолютної похибки Δ)

$\langle a \rangle$ Середнє арифметичне значення фізичної величини:

$$a_{сп} = \langle a \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

σ - середнє квадратичне відхилення, яке знаходиться, наприклад, для a, за формулою $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(a_i - \langle a \rangle\right)^2}{n(n-1)}}$.

σ є мірою випадкової похибки, тобто при підрахунках замість $\langle \Delta_{вип} \rangle$ можна брати σ.

Δ - загальна абсолютна похибка вимірювання, яка визначається за формулою $\Delta = \sqrt{\Delta_{сист}^2 + \Delta_{вип}^2}$ або

$$\Delta = \sqrt{\Delta_{сист}^2 + \sigma^2}$$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ:

1) У чому полягає задача фізичних вимірювань?
2) Які типи вимірювань існують?
3) Як класифікують похибки вимірювань?
4) Дати визначення абсолютної і відносної похибок.

5) Що таке промахи, систематичні і випадкові похибки?

6) Як оцінити систематичну похибку?

7) Дати визначення середнього арифметичного значення вимірюваної величини.

8) Як оцінити величину випадкової похибки, і як вона пов'язана із середнім квадратичним відхиленням?

9) Чому дорівнює імовірність виявлення справжнього значення вимірюваної величини в інтервалі від $a_{спр} - \sigma$ до $a_{спр} + \sigma$?

10) Якщо, як оцінку для випадкової похибки вибрати величину 2σ або 3σ, то з якою імовірністю справжнє значення буде попадати у відповідні інтервали?

11) Як додаються похибки і коли це потрібно робити?

12) Як округлити абсолютну похибку і середнє значення результату вимірювання?

13) Які способи існують для оцінки похибок при непрямих вимірюваннях? Як при цьому потрібно діяти?

14) Як записується результат вимірювання? Які величини потрібно вказати?

ЛІТЕРАТУРА

1. В.М. Барановський, П.В. Бережний, І.Т. Горбачук, В.П. Дущенко, М.І. Шут. Загальна фізика. Лабораторний практикум.- Київ: Вища школа, 1990.
2. Л.Л. Гольдин Лабораторные занятия по физике. - М.: Наука,1983.
3. Б.Д. Степин Применение международной системы единиц физических величин в химии. -. М.: Высшая школа, 1990.
4. В.Н. Лавренчик. Постановка физического експеримента и статистическая обработка его результатов.- Высш. шк., 1986.