Сумський державний університет

Гармонічні коливання та їх характеристики. Зміна енергії при гармонічному коливанні

Практичне заняття № 5

Повторення теоретичного матеріалу

1. Гармонічні коливання – це коливання, при яких величина, що змінюється, відбувається за законом косинуса або синуса:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)*, \qquad (1.1)$$

або

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (1.2)$$

де $x(t)$ – значення величини, що змінюється в момент часу t;

$A = |x_{max}|$ – амплітуда коливань – величина, що дорівнює модулю максимального значення x;

ω_0 – циклічна частота;

φ_0 – початкова фаза коливань.

2. Механічні гармонічні коливання виникають під дією пружної або квазіпружної сили, яка підкоряється закону:

$$F = -kx, \qquad (1.3)$$

де k – коефіцієнт квазіпружної сили, $k = m\omega_0^2$.

Повторення теоретичного матеріалу

4. Швидкість і прискорення матеріальної точки, що здійснює гармонічні коливання:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (1.8)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (1.9)$$

Повторення теоретичного матеріалу

5. Кінетична енергія гармонічних коливань:

$$W_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Потенціальна енергія гармонічних коливань:

$$W_п = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Повна механічна енергія:

$$W = W_п + W_к = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{kA^2}{2}.$$

Повторення теоретичного матеріалу

При додаванні двох гармонічних коливань одного напрямку й однакової частоти $x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_{01})$, $x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_{02})$ виникає гармонічне коливання з тією ж частотою, але з іншою амплітудою і новою початковою фазою:

а) амплітуда результуючого коливання:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}\,; \qquad (1.13)$$

б) початкова фаза результуючого коливання:

$$\mathrm{tg}\varphi_0 = \frac{A_1 \sin\varphi_{01} + A_2 \sin\varphi_{02}}{A_1 \cos\varphi_{01} + A_2 \cos\varphi_{02}}\,. \qquad (1.14)$$

Повторення теоретичного матеріалу

Якщо матеріальна точка одночасно бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях з однаковими частотами $x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{01})$, $y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{02})$, то її траєкторія описується рівнянням:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = \sin^2(\varphi_{02} - \varphi_{01}).$$

Алгоритми розв’язання задач та методичні поради

- Задачі на кінематику коливального руху вимагають застосування загальних рівнянь гармонічних коливань:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

- Щоб знайти рівняння, що описують закони зміни швидкості або прискорення, необхідно продиференціювати перше або друге рівняння за часом:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

- Початкову фазу φ_0 (якщо вона не вказана в умові) знаходять з початкових умов.

Задача 1. Через який час від початку руху точка, яка здійснює гармонічні коливання, зміститься від положення рівноваги на половину амплітуди? Період коливань *T*=12 с.

t - ?

$x(t) = \frac{A}{2}$

$T = 12\,c$

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0), \quad \varphi_0 = 0$$

$$x = A\sin\omega t$$

$$\frac{\cancel{A}}{2} = \cancel{A}\sin\omega t$$

$$\sin\omega t = \frac{1}{2}$$

$$\omega t = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{2\cancel{\pi}}{T}\cdot t = \frac{\cancel{\pi}}{6} \Rightarrow t = \frac{T}{6\cdot 2} = \frac{T}{12}.$$

$$t = \frac{12}{12} = 1\,(c).$$

Задача 2. Рівняння руху точки надано у вигляді (*). Знайти моменти часу *t*, в які досягаються максимальна швидкість і максимальне прискорення.

$$x = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) \quad (*)$$

$t_1 - ?\ t_2 - ?$

v_{max}

a_{max}

$A = 2$ од.

$\omega = \frac{\pi}{2}\ c^{-1}$

$\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$ рад.

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)\right) = -2\cdot\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) = -\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

1) v_{max}, якщо: $\left|-\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)\right| = 1$

тоді $\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n = 0, 1, 2, 3\ldots$

$$\frac{t}{2} + \frac{1}{3} = n + \frac{1}{2}$$

$$\frac{t}{2} = n + \overset{3}{\frac{1}{2}} - \overset{2}{\frac{1}{3}} = n + \frac{1}{6}$$

$$t_1 = 2n + \frac{1}{3}.$$

Задача 2. Рівняння руху точки надано у вигляді (*). Знайти моменти часу *t*, в які досягаються максимальна швидкість і максимальне прискорення.

$$x = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) \quad (*)$$

2) a_{max};

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

$$a = \frac{d}{dt}\left(-\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{\pi^2}{2}$$

$$a = -\frac{\pi^2}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)\right| = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3} = \arccos 1 = \pi n, \quad n = 0, 1, 2, 3\ldots$$

$$\cancel{\frac{\pi}{2}}t + \cancel{\frac{\pi}{3}} = \cancel{\pi}n,$$

$$\frac{t}{2} = n - \frac{1}{3}$$

$$t_2 = 2n - \frac{2}{3}, \quad n = 1, 2, 3\ldots \quad (n \in N)$$

При $n = 0$ $t_2 = -\frac{2}{3} < 0$!

Задача 3. Знайти амплітуду A і початкову фазу φ_0 гармонічного коливання, отриманого від додавання однаково спрямованих коливань, заданих рівняннями (див. далі).
Написати рівняння результуючого коливання.

$$x_1(t) = \overset{A_1}{4}\cos \pi t \overset{\varphi_{01}}{_} (\text{см}) \qquad x_2(t) = \overset{A_2}{3}\cos\left(\pi t + \overset{\varphi_{02}}{\pi/2}\right) \ (\text{см})$$

$A - ?\ \varphi_0 - ?$

$A_1 = 4$ см

$\omega_1 = \pi$

$A_2 = 3$ см

$\omega_2 = \pi$

$\varphi_{02} = \frac{\pi}{2}$

$\varphi_{01} = 0$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}$$

$$A = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2\cdot 3\cdot 4\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)}_{0}} = \sqrt{16 + 9 + \cancel{24\cdot 1}} = \sqrt{\cancel{49}\ 25} = 5\,(\text{см})$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{A_1\sin\varphi_{01} + A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01} + A_2\cos\varphi_{02}}.$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{4\cdot\sin 0 + 3\cdot\sin\frac{\pi}{2}}{4\cos 0 + 3\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}(0{,}75) \approx 37^\circ = 0{,}2\pi.$$

Задача для самостійного розв’язування

Записати рівняння гармонічного коливального руху пружинного маятника з амплітудою A=5 см, якщо за час t=1 хв він здійснює 150 коливань і початкова фаза коливань дорівнює $\varphi_0=\pi/3$.